

## Ein Gegenbeispiel zur Stabilität des absolut stetigen Spektrums gewöhnlicher Differentialoperatoren

Rafael René del Rio Castillo

IIMAS-UNAM, Apdo. Postal 20–726, Admon No. 20, Deleg. Alvaro Obregon, 01000 Mexico, D.F., Mexico

### 1. Einleitung

In Heinz [3] und Weidmann [10] wurde für Sturm-Liouville-Operatoren und Dirac-Systeme gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen an die Koeffizienten in der Nähe des rechten Randpunktes  $\infty$  das Spektrum in  $[0, \infty)$  bzw.  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  absolut stetig ist. Dabei spielt das Verhalten der Koeffizienten am linken Rand keine Rolle; es ist auch gleichgültig, ob der linke Punkt regulär oder singular ist.

Dies legt die folgende Vermutung nahe (die im wesentlichen auf Weidmann [10] zurückgeht):

Sei  $l$  ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf  $(a, b)$  und  $A$  eine selbstadjungierte Realisierung. Für ein  $c \in (a, b)$  habe *jede* selbstadjungierte Realisierung  $A_b$  von  $l$  in  $(c, b)$  absolut stetiges Spektrum in  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ . Dann gilt dies auch für  $A$ . (Dabei sagen wir: ein selbstadjungierter Operator hat in einem Intervall  $I$  absolut stetiges Spektrum wenn  $\|E(\lambda)f\|^2$  in  $I$  absolut stetig bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist für alle  $f \in L_2(a, b)$ .)

Wir widerlegen diese allgemeine Vermutung, indem wir zeigen, daß sie für Sturm-Liouville-Operatoren nicht gilt. Eine entsprechende Konstruktion ist für Dirac-Systeme möglich (siehe [1]).

### 2. Präliminarien

Sei  $l$  der Differentialausdruck

$$lu = -u'' + q(x)u \quad a \leq x \leq b. \quad (1)$$

Die Funktion  $q$  sei reellwertig und in  $(a, b)$  lokal integrierbar.

Sei  $u_1(x, z), u_2(x, z)$  ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung

$$lu = zu,$$

das holomorph von  $z$  abhängt.

Sei  $L$  ein durch  $l$  erzeugter selbstadjungierter Operator in  $L_2(a, b)$ . Für  $z \in \rho(L)$  wird die Resolvente definiert durch

$$R_z(L)g(x) = (z - L)^{-1}g(x).$$

Diese ist ein Integraloperator mit dem Kern

$$R(x, y, z) = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^2 m_{jk}^+(z) u_j(x, z) u_k(y, z) & \text{für } y < x \\ \sum_{j,k=1}^2 m_{jk}^-(z) u_j(x, z) u_k(y, z) & \text{für } x < y. \end{cases}$$

Die Matrizen  $(m_{ij}^\pm)$  werden die charakteristischen Matrizen bezüglich des Fundamentalsystems  $u_1, u_2$  genannt.

$L$  ist unitär äquivalent zum Operator der Multiplikation mit der Variablen in  $L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ , wobei die  $(2 \times 2)$ -matrixwertige Spektralfunktion durch die Formeln von Weyl-Titchmarsh-Kodaira gegeben ist:

$$\rho_{kj}(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\delta}^{\lambda + \delta} \operatorname{Im} m_{kj}^\pm(s + i\varepsilon) ds. \quad (2)$$

Siehe [7, 9].

Sei jetzt  $l$  regulär bei  $a$  und bei  $b$  liege der Grenzpunktfall (GPF) vor. Die selbstadjungierte Randbedingung bei  $a$  sei durch

$$u(a) \cos \alpha + u'(a) \sin \alpha = 0 \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$

gegeben. Wir definieren das Fundamentalsystem  $u_1, u_2$  so, daß

$$\begin{aligned} u_1(a, z) &= \sin \alpha, & u_2(a, z) &= \cos \alpha, \\ u_1'(a, z) &= -\cos \alpha, & u_2'(a, z) &= \sin \alpha \end{aligned}$$

gilt. Die Funktion  $u_1$  erfüllt offensichtlich die Randbedingung bei  $a$  und für die Wronskideterminante gilt

$$W(u_1, u_2)(z) = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Mit diesem Fundamentalsystem erhält die Spektralfunktion die Form

$$\begin{pmatrix} \rho_{11}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir  $m(z) \in \mathbb{C}$  so, daß

$$u_b := m(z) u_1(x, z) + u_2(x, z)$$

bei  $b$  quadratisch integrierbar ist, so gilt

$$-\operatorname{Im} m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(u - \lambda)^2 + \varepsilon^2} d\rho(\lambda) \quad z = u + i\varepsilon \quad (3)$$

(s. [6] S. 136 Satz 5.2).

**Satz 1.** Sei  $l$  regulär bei  $a$  und bei  $b$  liege der GPF vor. Seien  $u_1, u_2$  und  $m(z)$  wie oben. Wenn wir statt  $u_2$  eine andere zu  $u_1$  linear unabhängige Funktion  $\tilde{u}_2(\cdot, z)$  wählen, die holomorph von  $z$  abhängt, erhalten wir unter Benutzung der Formel von Weyl-Titchmarsh-Kodaira, die gleiche Spektralfunktion.

*Beweis.* Sei  $\tilde{u}_2(x, z) = C_1(z)u_1(x, z) + C_2(z)u_2(x, z)$ .  $C_1(z)$  und  $C_2(z)$  hängen holomorph von  $z$  ab. Ist  $m_b(z)$  so, daß

$$m_b(z)u_1(x, z) + \tilde{u}_2(x, z) \in L_2(c, b) \quad c \in (a, b)$$

gilt, so folgt

$$C_2(z)m(z) = m_b(z) + C_1(z)$$

und

$$W(u_1, \tilde{u}_2) = C_2(z)W(u_1, u_2).$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{m_b(z)}{W(u_1, \tilde{u}_2)} + \frac{C_1(z)}{W(u_1, \tilde{u}_2)} &= \frac{m_b(z) + C_1(z)}{C_2(z)W(u_1, u_2)} \\ &= \frac{C_2 m(z)}{C_2 W(u_1, u_2)} = \frac{m(z)}{W(u_1, u_2)} = m(z). \end{aligned}$$

Da  $\frac{C_1(z)}{W(u_1, \tilde{u}_2)(z)}$  holomorph und reell für  $z \in \mathbb{R}$  ist, folgt aus (2) die Behauptung. Q.E.D.

Für jedes  $f$  aus  $L_2(a, b)$  sei das Maß  $m_f$  definiert durch  $m_f(\Delta) := \|E(\Delta)f\|^2$ . Es gilt folgendes Resultat, das wir ohne Beweis angeben:

**Hilfssatz 2.** Das Maß  $m_f$  ist genau dann für alle  $f \in L_2(a, b)$  absolut stetig bezüglich des Lebesgueschen Maßes, wenn  $\rho_{ik}$  für alle  $i, k$  absolut stetig bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist.

### 3. Beweis der Existenz eines Gegenbeispiels

Jetzt widerlegen wir die obige Vermutung, indem wir zeigen, daß ein Sturm-Liouville-Ausdruck  $lu = -u'' + qu$  auf  $(0, \infty)$  existiert mit einer selbstadjungierten Realisierung, die in einem Intervall  $I = [0, 1]$  singular stetiges Spektrum hat, während jede selbstadjungierte Realisierung in  $(c, \infty)$ ,  $c > 0$  in  $I$  rein absolut stetiges Spektrum hat.

Seien  $\rho_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , nicht abnehmende Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen:

a)  $\rho_1(\lambda)$  ist absolut stetig in einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$

$$\left. \frac{d\rho_1}{d\lambda} \right|_{\lambda \in I} \geq N' > 0$$

$\rho_2$  singular stetig in  $I$ .

b) Die Funktion  $\rho_0 := \rho_1 + \rho_2$  erfülle die folgenden Bedingungen des Satzes von Gelfand-Levitan [7]):

A) Für beliebiges reelles  $x$  existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^0 e^{\sqrt{|\lambda|x}} d\rho_0(\lambda).$$

B) Setzt man

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \rho_0(\lambda) - \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda > 0 \\ \rho_0(\lambda) & \text{für } \lambda < 0, \end{cases}$$

so existiert das Integral

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda} d\tau(\lambda)$$

für alle  $x$  aus dem Intervall  $0 \leq x < \infty$  und die Funktion

$$a(x) = \int_1^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\lambda} d\tau(\lambda)$$

hat in  $0 \leq x \leq \infty$  stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich.

Wir können zum Beispiel  $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) und  $I$  wie folgt wählen:  $I = [0, 1]$

$$\rho_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \in (-\infty, 0] \\ \frac{2}{\pi} \lambda & \text{für } \lambda \in (0, 1] \\ \frac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda \in (1, \infty), \end{cases}$$

$$\rho_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \in (-\infty, 0] \\ F(\lambda) & \lambda \in (0, 1] \\ 1 & \lambda \in (1, \infty), \end{cases}$$

wobei  $F(\lambda)$  eine singulärstetige nichtabnehmende Funktion ist mit

$$F(0) = 0, \quad F(1) = 1$$

s. z.B. [8] S. 48.

Da  $\rho_0$  offensichtlich die Bedingungen des Satzes von Gelfand-Levitan erfüllt (man beachte, daß  $\tau$  nur in  $[0, 1]$  wächst), gibt es einen Differentialoperator  $L_0$  mit Spektralfunktion  $\rho_0$ , der durch einen Differentialausdruck

$$(l_0 u)(x) = -u''(x) + q_0(x) u(x) \quad 0 \leq x < \infty$$

mit stetigen reellwertigen Koeffizienten  $q_0$  und Randbedingungen der Form

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0$$

definiert ist.

Wir werden jetzt zeigen, daß für jedes  $c > 0$  und alle Randbedingungen  $u(c) \cos \theta + u'(c) \sin \theta = 0$  die entsprechende selbstadjungierte Realisierung in  $I$  hat.

Dazu wählen wir  $\{u_1(x, z), u_2(x, z)\}$  so, daß

$$-u_k''(x) + q_0(x) u_k(x) = z u_k(x) \quad k=1, 2, \quad 0 \leq x < \infty$$

gilt und

$$u_1(0, z) \cos \alpha + u_1'(0, z) \sin \alpha = 0,$$

$$u_2(c, z) \cos \theta + u_2'(c, z) \sin \theta = 0,$$

wobei  $0 < c < \infty$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$ .

*Bemerkung.* Alle folgenden Überlegungen gelten auch, wenn wir  $c < 0$  wählen. In diesem Fall ist das Potential beliebig (integrierbar) in  $[c, 0]$  und gleich  $q_0$  in  $[0, \infty)$ .

Die Wronskideterminante  $W(u_1, u_2)(z)$  ist eine holomorphe Funktion von  $z$ . Diese Funktion  $W(u_1, u_2)(z)$  kann nicht identisch Null sein, sonst wäre jedes  $z$  ein Eigenwert des Problems mit obigen Randbedingungen in  $[0, c]$ , aber dies ist unmöglich, weil das Problem in  $[0, c]$  regulär ist (s. [11], Satz 8.29(c)). Hieraus folgt, daß  $u_1(x, z)$  und  $u_2(x, z)$  linear unabhängig sind, abgesehen von isolierten Punkten  $z$ .

Sei  $I_\theta \subset I$  ein kompaktes Intervall, das keinen dieser Punkte enthält.

I) Die charakteristische Matrix des Operators  $L_0$  bezüglich  $u_1(x, z)$ ,  $u_2(x, z)$  ist

$$\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_b}{W(u_1, u_2)} & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{W(u_1, u_2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus (3) und aus Satz 1 folgt, für  $z = u + i\varepsilon$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$-\operatorname{Im} m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(u-\lambda)^2 + \varepsilon^2} d\rho_0(\lambda),$$

wobei  $m(z) = \frac{m_b}{W(u_1, u_2)}(z) + H(z)$ .

$H(z)$  ist holomorph in  $\mathbb{C}$ . Da der Differentialausdruck reell ist, haben wir  $\operatorname{Im} H(z) = 0$  für  $z \in \mathbb{R}$ . Deshalb können wir für jedes  $M > 0$  ein  $k'' > 0$  wählen, so daß

$$|\operatorname{Im} H(u + i\varepsilon)| < M \quad \text{für } \varepsilon < k''.$$

Dies gilt gleichmäßig für  $u \in I_\theta$  ( $I_\theta$  ist kompakt).

Aus der Bedingung a) folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda - u)^2 + \varepsilon^2} d\rho_1(\lambda) > 2N > 0$$

für  $u \in I_\theta$ ,  $0 < \varepsilon < k'$ ,  $k'$  klein genug.

Da  $\rho_2$  nichtfallend ist, gilt

$$\begin{aligned} & -\operatorname{Im} \frac{m_b}{W(u_1, u_2)}(z) - \operatorname{Im} H(z) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda - u)^2 + \varepsilon^2} d\rho_0(\lambda) \\ &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda - u)^2 + \varepsilon^2} d\rho_1(\lambda) > 2N \quad \text{für } u \in I_\theta, 0 < \varepsilon < k'. \end{aligned}$$

Deshalb haben wir, für  $u \in I_\theta$ ,  $0 < \varepsilon < k$ ,  $k$  hinreichend klein

$$-\operatorname{Im} \frac{m_b}{W(u_1, u_2)}(u + i\varepsilon) > N > 0. \quad (4)$$

II. Sei  $L_{c\theta}$  der Differentialoperator, der durch den oben gefundenen Differentialausdruck

$$(l_0 u)(x) = -u''(x) + q_0(x)u(x), \quad 0 < c \leq x < \infty$$

und durch die Randbedingung

$$u(c) \cos \theta + u'(c) \sin \theta = 0$$

definiert ist. Die Funktion  $u_2$  erfüllt diese Randbedingung bei  $c$ .

Die charakteristische Matrix des Operators  $L_{c\theta}$  bezüglich  $u_1(x, z)$ ,  $u_2(x, z)$  ist:

$$\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{W(u_1, u_2)} \\ 0 & -\frac{1}{W(u_1, u_2)m_b} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt nach der Formel von Weyl-Titchmarsh-Kodaira mit  $m_{c\theta} := m_{22}^+$ , daß für  $\gamma < \mu$

$$\rho_{c\theta}(\mu) - \rho_{c\theta}(\gamma) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} \operatorname{Im} m_{c\theta}(u + i\varepsilon) du$$

gilt, wobei  $[\gamma + \delta, \mu + \delta] \subset I_\theta$ .  $\rho_{c\theta}$  ist die Spektralfunktion von  $L_{c\theta}$ .

Jetzt wollen wir beweisen, daß  $\rho_{c\theta}$  in  $I_\theta$  absolutstetig ist. Damit hätten wir, daß  $L_{c\theta}$  in  $I_\theta$  absolut stetiges Spektrum hat.

Sei  $m_0 := \frac{m_b}{W(u_1, u_2)}$ . Wenn wir die charakteristischen Matrizen von  $L_0$  und  $L_{c\theta}$  vergleichen, sehen wir, daß

$$m_{c\theta} = -\frac{[W(u_1, u_2)]^{-2}}{m_0} = -K(z)[m_0(z)]^{-1}$$

gilt (wobei  $K(z) := [W(u_1, u_2)(z)]^{-2}$ ). (Es ist klar, daß  $K(z)$  und  $m_0$  von  $\theta$  abhängen.) Auch wissen wir aus (4), daß

$$-\operatorname{Im} m_0 \geq N > 0$$

gilt.

Sei  $-m_0(z) = u(z) + i v(z)$ . Dann gilt

$$\frac{1}{m_0(z)} = -\frac{1}{u(z) + i v(z)}$$

und

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1}{m_0(z)} \right) = \frac{v(z)}{u^2(z) + v^2(z)} \leq \frac{1}{v(z)} = \frac{-1}{\operatorname{Im} m_0(z)} \leq \frac{1}{N}.$$

Andererseits gilt

$$N \leq v(z) = \frac{\operatorname{Im} \left( \frac{1}{m_0(z)} \right)}{\left( \operatorname{Re} \frac{1}{m_0(z)} \right)^2 + \left( \operatorname{Im} \frac{1}{m_0(z)} \right)^2} \leq \frac{\frac{1}{N}}{\left( \operatorname{Re} \frac{1}{m_0(z)} \right)^2},$$

und somit

$$\left| \operatorname{Re} \frac{1}{m_0(z)} \right| \leq \frac{1}{N}.$$

Diese Ungleichungen gelten für  $z = u + i\varepsilon$  mit  $u \in I_\theta$ ,  $0 < \varepsilon < k$ ,  $k$  klein. Betrachten wir jetzt die Spektralfunktion  $\rho_{c\theta}$  des Problems in  $(c, \infty)$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{c\theta}(\mu) - \rho_{c\theta}(\gamma) &= -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} \operatorname{Im} \left[ K(z) \left( -\frac{1}{m_0(z)} \right) \right] du \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} \left[ \operatorname{Re} K(z) \operatorname{Im} \left( \frac{1}{m_0(z)} \right) + \operatorname{Re} \left( \frac{1}{m_0(z)} \right) \operatorname{Im} K(z) \right] du. \end{aligned}$$

Aus der Holomorphie von  $K(z)$  und der Beschränktheit von  $\operatorname{Im} \frac{1}{m_0(z)}$  und  $\operatorname{Re} \frac{1}{m_0(z)}$  folgt die absolute Stetigkeit von  $\rho_{c\theta}$  in  $I_\theta$ .

III. Schließlich zeigen wir noch, daß der Operator  $L_{c\theta}$  im gesamten Intervall  $I$  rein absolut stetiges Spektrum hat. Da  $\rho_{c\theta}$  in jedem  $I_\theta \subset I$  (das im Sinne der obigen Konstruktion zulässig ist) absolut stetig ist, gibt es nur isolierte Stellen, nämlich die Punkte  $\lambda_i \in I$  mit  $W(u_1, u_2)(\lambda_i) = 0$ , die noch zu untersuchen sind. Da  $\rho_{c\theta}$  monoton ist, genügt es für die absolute Stetigkeit in  $I$ , die Stetigkeit in diesen Punkten  $\lambda_i$  zu beweisen.

Nehmen wir an, daß  $\rho_{c\theta}$  in einem der Ausnahmepunkte  $\lambda_i$  nicht stetig ist. Dieser Punkt muß Eigenwert von  $L_{c\theta}$  sein. Sei  $\tilde{u}_i$  die Eigenfunktion zum Eigenwert  $\lambda_i$ . Da

$$\begin{aligned} -u_2'' + q_0(x) u_2 &= \lambda_i u_2, \\ u_2(c, \lambda_i) \cos \theta + u_2'(c, \lambda_i) \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

gilt (s. Def. von  $u_2$ ), folgt, daß  $\tilde{u}_i$  und  $u_2(x, \lambda_i)$  linear abhängig sind, weil beide dieselbe Gleichung mit derselben Randbedingung erfüllen. Hieraus folgt, daß  $u_2$  auch Eigenfunktion zu  $\lambda_i$  ist.

Da  $W(u_1, u_2)(\lambda_i) = 0$  gilt, sind  $u_1, u_2$  linear abhängig i.e.  $u_2(x, \lambda_i) = K u_1(x, \lambda_i)$ . Hieraus folgt, daß  $u_1$  Eigenfunktion von  $L_0$  zum Eigenwert  $\lambda_i$  ist. Hiermit haben wir einen Widerspruch, weil wir  $L_0$  so konstruiert haben, daß  $L_0$  keine Eigenwerte in  $I$  hat.

Hieraus folgt, daß  $\rho_{c\theta}$  absolut stetig in  $I$  ist, für alle  $\theta$ . Zusammen mit Hilfssatz (2) folgt, daß der Operator  $L_{c\theta}$  in  $I$  absolut stetiges Spektrum hat.

Für Dirac-Systeme kann die Vermutung entsprechend widerlegt werden. Statt des Satzes von Gelfand-Levitan wird der Satz von Gasyimov-Levitan [2] benutzt.

#### 4. Schlußbemerkungen

a) Ein positives Resultat der gewünschten Art läßt sich beweisen, wenn wir zusätzlich Voraussetzungen über die Spektralfunktion von wenigstens zwei selbstadjungierten Realisierungen in  $L(c, b)$  machen (s. [1]).

b) Mit Hilfe der obigen Konstruktion läßt sich auch die folgende Vermutung widerlegen:

Sei  $l$  ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf  $(a, b)$ . Existiert, für kein  $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  eine  $L_2(a, b)$ -Lösung von  $(l - \lambda)u = 0$ , so ist das Spektrum jeder selbstadjungierten Realisierung von  $l$  in  $(a, b)$  absolut stetig in  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ .

c) Für einen speziellen Fall unseres Resultates, nämlich, wenn nicht gefordert wird, daß jede selbstadjungierte Realisierung  $A_b$  von  $l$  in  $(c, b)$  absolut stetiges Spektrum in  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  hat, ist ein explizites Beispiel für den Fall des Dirac-Systems in N. Jakobowsky [4] konstruiert worden.

#### Literatur

1. del Rio Castillo, R.R.: Dissertation, Frankfurt 1986
2. Gasyimov, M.G., Levitan, B.M.: The inverse Problem for a Dirac System. Sov. Math. Dokl. Tom **167**, No. 5 (1966)
3. Heinz, E.: Über das absolut stetige Spektrum singulärer Differentialgleichungssysteme. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II Math.-Phys. Kl. (1982)
4. Jakobowsky, N.: Diplomarbeit, Göttingen 1985
5. Jörgens, K.: Spectral theory of second order ordinary differential operators. Lectures delivered at Aarhus Universitet 1962/63. Lecture Notes Series No. 2
6. Levitan, B.M., Sargsjan, I.S.: Introduction to spectral theory. Vol. 39. Translations of Mathematical Monographs, American Math. Soc. (1975)
7. Neumark, M.A.: Lineare Differentialoperatoren. Berlin: Akademie-Verlag 1960
8. Riesz, F., Nagy, B.S.: Functional analysis. New York: Frederick Ungar Publishing Co. 1953
9. Titchmarsh, E.C.: Eigenfunction expansions. Vol. 1, Oxford: University Press 1962
10. Weidmann, J.: Absolut stetiges Spektrum bei Sturm-Liouville-Operatoren und Dirac-Systemen. Math. Z. **180**, 423–427 (1982)
11. Weidmann, J.: Lineare Operatoren in Hilberträumen. Stuttgart: B.G. Teubner 1976