UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
UNIDAD IZTAPALAPA División de Ciencias Básicas e Ingeniería

EXPANSIONES ASINTONICAS PARA LA FUNCION DE KREIN

MATEMATICAS

ANALISIS

JUAN HECTOR ARREDONDE RUIZ

Y

RAFAEL DEL RIO CASTILLO

INVESTIGACION

0402I01 013.90

EXPANSIONES ASINTOTICAS PARA LA FUNCION DE KREIN

Por

JUAN HECTOR ARREDONDO RUIZ

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
AV. MICHOACÁN Y LA PURÍSIMA
COL. VICENTINA, IZTAPALAPA, C.P. 09340
APDO. POSTAL 55-534, MÉXICO D.F.
M E X I C O

Y

RAFAEL DEL RIO

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS
Y EN SISTEMAS
APDO. POSTAL 20-726, MÉXICO D.F.
M E X I C O

Reconocimiento

Este manuscrito resume las notas y discusiones del Seminario que se efectuó en el IIMAS durante 1987-1988 con la participación de J.H. Arredondo R., R. del Río Y R. Weder.

INTRODUCCION

I.1. Breve Introduccion Historica

Un resultado clásico establecido por Hermann Weyl dice que la distribución asintótica de los eigenvalores del operador $-\Delta$ en $L^2(K)$ (con condiciones de Dirichlet en la fontera suave de K, ∂K, y K un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$) esta relacionada al volumen de K. Es decir,

$$\# \{\lambda_j \le \lambda \mid \varphi \in L^2(K),\ -\Delta\varphi \in L^2(K),\ \varphi = 0 \text{ en } \partial K,\ -\Delta\varphi = \lambda_j\varphi\}$$

$$= w_{n-1}\frac{(2\pi)^{-n}}{n} \cdot \mathrm{Vol}(K)\,\lambda^n + o(\lambda^n), \qquad (I.1)$$

donde w_{n-1} es el área de la esfera unitaria S^{n-1}.

A. Majda y J. Ralston[(1)] prueban un resultado análogo al de H. Weyl para problemas exteriores. Para este caso $K \subseteq \mathbb{R}^n$, n impar, es un conjunto acotado estrictamente convexo y $-\Delta$ actúa en $L^2(\mathbb{R}^n\setminus K)$, con condiciones de Dirichlet en la frontera de K, ∂K. El operador de Laplace no tiene eigenvalores en este caso. La matriz de colisiones $W(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$, asociada a la ecuación de onda es el sustituto a el lado izquierdo de la ecuación (I.1). $W(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es un operador unitario de $L^2(S^{n-1})$ sobre $L^2(S^{n-1})$.

Definiendo

$$S(\lambda) = \text{argumento } \det W(\lambda), \tag{I.2}$$

el resultado de Majda y Ralston establece que para cada $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2\pi}\,(S(\lambda) - S(-\lambda)) = w_{n-1}\,\frac{(2\pi)^{-n}}{n}\,\mathrm{Vol}\,(K)\,\lambda^{n} + o\,(\lambda^{n+\varepsilon-1/5}). \tag{I.3}$$

Posteriormente T. Kato y A. Jensen[2] obtienen una expansión asintótica similar a la de Majda y Ralston para $S(\lambda^{1/2})$, $\lambda > 0$, para el caso en que $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, es un conjunto abierto, acotado y conexo en forma de estrella (star-like), usando la teoría de Krein-Birman y el principio de invariancia de Kato para operadores de onda.

Uno de los resultados de Jensen y Kato para $H = -\Delta$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y H_e en $L^2(\mathbb{R}^n\backslash K)$ con condiciones de Dirichlet en ∂K es,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} S(\lambda^{1/2})\,e^{-\lambda t}\,d\lambda = \frac{1}{t}\,\mathrm{tr}\,[e^{-tH} - e^{-tH_e}]. \tag{I.4}$$

Majda y Ralston logran entonces generalizar sus estimaciones calculando mayores coeficientes en la expansión asintótica para $S(\lambda)$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, acotado y estrictamente convexo y ∂K suave. Usando (I.4) y la teoría desarrollada por H. Mc Kean e I. Singer para los Kerneles de la ecuación de calor y la de R. Melrose que obtiene expansiones para $\frac{dS}{d\lambda}$ de la forma

$$\frac{dS}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda^{n_i} (a_i + b_i \log \lambda) + O(\lambda^{n_j} \log \lambda), \qquad (I.5)$$

$$n_i \searrow -\infty, \quad i \to +\infty,$$

es posible en principio obtener una expansión del orden deseado.

I.2. OBJETIVOS EN ESTAS COMUNICACIONES TECNICAS

Nosotros pensamos que estos resultados pueden ser generalizados en varios aspectos. Quisiéramos nosotros obtener expansiones asintóticas para $S(\lambda^{1/2})$ en dominios más generales y para operadores elípticos. Pensamos que la condición Vol (K) $< +\infty$ - más condiciones de suavidad en la frontera ∂K y de regularidad en el operador elíptico - deberían ser suficientes para obtener resultados similares a los de Jensen y Kato[(2)]. De hecho, hemos encontrado el orden en que $S(\lambda^{1/2})$ se comporta en infinito aunque no sabemos el valor numérico explícito del coeficiente en la expansión asintótica. Esto se presentará en unas posteriores comunicaciones técnicas.

Las herramientas básicas que se han usado son la teoría de integrales directas y la teoría desarrollada por Jensen y Kato.

En una segunda comunicación, quisiéramos introducir las técnicas de Ricardo Weder[3] y R.B. Melrose[4] para conjuntos $K \subseteq \mathbb{R}^n$, estrictamente convexos para intentar aplicarlas en nuestro trabajo.

Dentro de estas comunicaciones técnicas usaremos el formalismo y la notación de Jensen-Kato[2], en lugar de los de Lax - Phillips[5],[6] usado por Majda y Ralston[1].

La presentación de estas notas es como sigue:

En los preliminares damos resultados generales bien conocidos dentro de la teoría matemática de colisiones. En el primer capítulo presentamos una demostración de una fórmula debida a Birman y Krein y en el segundo las ideas principales del artículo de Jensen y Kato[2].

0. Algunos Resultados y Definiciones importantes en Teoria de Dispersion.

Nosotros consideraremos operadores lineales entre espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. El dominio de A es denotado por D(A), el rango, por Ran(A) y su núcleo por Ker(A). Un operador A definido en todo $\mathcal{H}_1$, es llamado acotado si

$$\|A\| := \sup_{\|\varphi\|_1 = 1} \|A\varphi\|_2 < +\infty ,$$

donde $\|\cdot\|_i$, $i = 1,2$ denota la norma en $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2$. $\|A\|$ es llamada la norma de A. El conjunto de operadores acotados de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ es denotado por $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Escribiremos

$$\operatorname*{n-lim}_{j\to+\infty} A_j = A \quad \text{si} \quad \|A_j - A\| \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow +\infty ,$$

$$\operatorname*{s-lim}_{j\to+\infty} A_j = A \quad \text{si} \quad \|(A_j - A)\varphi\|_2 \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow +\infty , \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{H}_1 ,$$

$$\operatorname*{w-lim}_{j\to+\infty} A_j = A \quad \text{si} \quad (\Psi, (A_j - A)\varphi)_2 \longrightarrow 0, \quad j \longrightarrow +\infty , \quad \forall\, \psi \in \mathcal{H}_2$$

$$\text{y } \forall\, \varphi \in \mathcal{H}_1 ,$$

donde $(\cdot,\cdot)_i$, $i = 1,2$ denota el producto escalar en $\mathcal{H}_i$, $i = 1,2$. Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$, ponemos $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H},\mathcal{H})$. El conjunto de operadores lineales de $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ con dominio denso en $\mathcal{H}_1$ y tales que su dominio es un espacio de Banach con respecto a la norma $\|\varphi\|_1 + \|A\,\varphi\|_2$ es llamado el conjunto de operadores cerrados y denotado por $C(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Si $\mathcal{D}(A)$ es denso en $\mathcal{H}_1$, el adjunto de A es denotado por A^* y está definido como

$$(A^*\,\psi,\ \varphi)_1 := (\psi,\ A\varphi)_2\,, \quad \forall \quad \varphi \in D(A).$$

Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ y $A = A^*$, A es llamado autoadjunto. Un operador V de $\mathcal{H}_1$ sobre $\mathcal{H}_2$ es llamado isométrico si V^*V es el operador identidad en $\mathcal{H}_1$ y VV^* lo es en $\mathcal{H}_2$. Un operador P $\in L(\mathcal{H})$, tal que $P^* = P$, $P^2 = P$ es llamado un proyector. $U \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ es una isometría parcial si UU^* es un proyector. Esto implica que U^*U también lo es. En $\mathbb{R}$ tenemos el campo de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Un campo de Borel $\mathcal{B}$ sobre un conjunto Γ es tal que $\phi \in \mathcal{B}$, unión numerable de elementos de $\mathcal{B}$ es un miembro de $\mathcal{B}$ y el complemento de un miembro de $\mathcal{B}$ es un miembro de $\mathcal{B}$. Una colección de conjuntos en Γ es llamada el generador de $\mathcal{B}$ si coincide con el campo de Borel más pequeño conteniendo a toda la colección. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es el campo de Borel generado por los abiertos, por los compactos y por la intersección numerable de abiertos.

Los ingredientes principales en la teoría desarrollada por Jensen, Kato para expansiones asintóticas de la fase de colisión son el principio de invariancia[7] y la función de Krein[8], desarrollada en la teoría de Birman-Krein.

Hay varias versiones del principio de invariancia. Incluso es válida cuando se consideran operadores de onda entre dos espacios de Hilbert distintos[9]. Nosotros consideraremos nada más el principio de invariancia para operadores de onda en un espacio de Hilbert separable.

Definición 0.1

Una función φ en $T \subset \mathbb{R}$, abierto, es llamada admisible si $T = \cup_1^N I_n$, donde $I_n = (\alpha_n, \beta_n)$ son disjuntos, N es finito ó infinito, y:

(a) La derivada en sentido de distribuciones φ'' está en L' en cada subintervalo compacto de T;

(b) φ' es o bien positiva o bien negativa en cada subintervalo (α_n, β_n).

Ejemplo 0.2

Supongamos que $T \subset [0,+\infty)$, entonces $\varphi(x) = x^{-1/2} - a$ es admisible. Notemos que si $A > -a$, $B > -a$, A y B siendo operadores autoadjuntos, entonces para

$$A_1 := (A + a)^{-n}, \qquad (0.3)$$
$$B_1 := (B + a)^{-n},$$

obtenemos que

$$\varphi(A_1) = A \qquad (0.4)$$
$$\varphi(B_1) = B$$

Además, $A_1 - B_1$ es un operador a traza[10] si $A - B$ lo es. Este hecho lo utilizaremos bastante.

Teorema 0.5 (Principio de Invariancia para operadores con diferencia a traza)

Sea φ una función admisible en un conjunto abierto T. Supongamos que A y B son autoadjuntos en $\mathcal{H}$, un espacio de Hilbert separable. Sean $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ sus espectros respectivamente, con $\sigma(A), \sigma(B) \subset \overline{T}$ y que en cada punto frontera de T, o bien φ tenga un límite finito ó $\sigma(A)$ y $\sigma(B)$ no tengan espectro puntual en ese punto. Sea $A - B$ un operador a traza.

Entonces, los siguientes límites fuertes existen

$$\Omega^{\pm}(A,B) := s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itA} e^{-itB} P_{ac}(B), \qquad (0.5)$$

$$\Omega^{\pm}(\varphi(A),\ \varphi(B)) := \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{it\varphi(A)} e^{-it\varphi(B)} P_{ac}(\varphi(B)). \tag{0.6}$$

Además,

$$\Omega^{\pm}(\varphi(A),\ \varphi(B)) = \Omega^{\pm}(A,B)\, E_{T_1}(B) + \Omega^{\mp}(A,B)\, E_{T_2}(B), \tag{0.7}$$

donde T_1 (T_2) es la unión de aquellos intervalos donde $\varphi'>0$ $(\varphi'<0)$ y $E_{\Delta}(B)$ es el proyector espectral asociado al operador autoadjunto B sobre el conjunto $\Delta \subseteq \mathbb{R}$.

Más aún, tenemos que los operadores $\Omega^{\pm}(A,B)$ y $\Omega^{\pm}(\varphi(A),\ \varphi(B))$ son completos. Es decir,

$$\operatorname{Ran} \Omega^{\pm}(A,B) = \mathcal{H}_{ac}(A), \tag{0.8}$$

$$\operatorname{Ran} \Omega^{\pm}(\varphi(A),\ \varphi(B)) = \mathcal{H}_{ac}(\varphi(A)) = \mathcal{H}_{ac}(A), \tag{0.9}$$

donde $\mathcal{H}_{ac}(A)$ denota el subespacio de continuidad absoluta del operador A.

Demostración:

Para probar la fórmula (0.5) consideremos un subconjunto denso de $\mathcal{H}_{ac}(B)$. Sea $M(B)$ el conjunto de vectores de $\mathcal{H}$, tales que la media espectral $d(\varphi, P_{\lambda}(B))$ asociada a φ es de la forma $d(\varphi, P_{\lambda}\varphi) = |f(\lambda)|^2 d\lambda$, donde $f \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Sea $|||\varphi|||$ la norma L^{∞}

de f. $M(B)$ es obviamente un subespacio de $\mathcal{H}_{ac}(B)$ denso en la norma usual de $\mathcal{H}^{(11)}$.

Sea $C \equiv A - B = \sum_n \lambda_n (\psi_n, \cdot)\, \psi_n$ y tomemos

$$\eta \in \operatorname{Ran} P_{(\alpha_n, \beta_n)}(B) \cap M(B) \tag{0.10}$$

Sea $W(t) = e^{iAt}\, e^{-itB}$. Es suficiente con probar que

$$\lim_{t,s\to+\infty} \|(W(t) - W(s))\, \eta\| = 0. \tag{0.11}$$

Por el teorema fundamental del cálculo

$$W(t)^*W(s) - e^{iaB}\, W(t)^*W(s)\, e^{-iaB} = \int_0^a e^{iBu}\, Y(t,s)\, e^{-iBu}\, du, \tag{0.12}$$

donde

$$Y(t,s) = -i\left[e^{itB}e^{-i(t-s)A}(A-B)e^{-isB} - e^{itB}(A-B)e^{-i(t-s)A}e^{-isB}\right] \tag{0.13}$$

y además

$$W(t) - W(s) = i\int_s^t e^{iuA}(A-B)\, e^{-iuB}\, du \tag{0.14}$$

donde el integrando es un operador compacto y la integral está definida como una integral de Riemman. En consecuencia, $W(t) - W(s)$ es compacto[12]. Usando el hecho ahora que el límite débil es cero

$$w - \lim_{t\to\pm\infty} e^{-itB}\eta = 0, \tag{0.15}$$

puesto que $\eta \in M(B)$, y el que operadores compactos mandan sucesiones debilmente convergentes en fuertemente convergentes, obtenemos que el límite fuerte es cero.

$$s - \lim_{a\to t\infty} e^{iaB} W(t)^* (W(t) - W(s))\, e^{-iaB}\eta = 0. \tag{0.16}$$

Notemos ahora que

$$W(t)^*W(t)-e^{iaB}W(t)^*W(t)e^{-iaB}-(W(t)^*W(s)-e^{iaB}W^*(t)W(s)e^{-iaB})$$
$$= \int_0^a e^{iBu}(Y(t,t)-Y(t,s))\, e^{-iBu}\, du. \tag{0.17}$$

Usando (0.17) obtenemos que

$$\left[\eta,\ W(t)^*(W(t)-W(s))\eta\right] = \lim_{a\to+\infty} \left[\eta,\ \int_0^a e^{iBu}(Y(t,t)-Y(t,s))e^{-iBu}du\ \eta\right]. \tag{0.18}$$

Sea $C = \sum_n \lambda_n(\psi_n,\cdot)\psi_n$ con $\sum_n \lambda_n = \|C\|_1$. Entonces si X es un operador acotado,

$$\left|\left[\eta, \int_0^a du\ e^{irB}e^{iuB}\ X\ C\ e^{-iuB}e^{-irB}\eta\right]\right| = \left|\left[\eta, \int_0^a du\ e^{i(u+r)B}\ \sum_n \lambda_n\right.\right.$$

$$\left.\left.(\psi_n, e^{-i(u+r)B})\ X\ \psi_n\right]\right|$$

$$= \left|\sum_n \lambda_n \int_0^a (\eta,\ e^{i(u+r)B}\ X\ \psi_n)\ (\psi_n,\ e^{-i(u+r)B})\ du\right|$$

$$= \left|\sum_n \lambda_n \int_r^{r+a} dx\ (\eta,\ e^{ixB}\ X\ \psi_n)(\psi_n,\ e^{-ixB}\eta)\right| \le \left[\sum_n \lambda_n \int_r^{a+r} |(\eta,\ e^{ixB}\ X\right.$$

$$\left.\psi_n)|^2\ dx\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_n \lambda_n \int_r^{a+r} |(\psi_n,\ e^{-ixB}\eta)|^2\ dx\right]^{1/2}$$

$$\le \sqrt{2\pi}\ \|X\|\ |||\eta|||\ \|C\|_1\ \left[\sum_n \lambda_n \int_r^{+\infty} |(\psi_n,\ e^{-ixB}\eta)|^2\ dx\right]^{1/2}, \qquad (0.19)$$

donde hemos usado que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(\psi,\ e^{-itB}\ \eta)|^2\ dt \le 2\pi\ \|\psi\|^2\ |\|\eta\||^2. \qquad (0.20)$$

Por lo tanto, de (0.13), (0.17) y (0.19) con $r = \min(t,s)$

$$\|(W(t)-W(s))\eta\|^2 = (\eta,\ W(t)^*(W(t)-W(s))\eta) + (\eta,\ W(s)^*(W(s)-W(t))\eta)$$

$$\le 8\ (2\pi\|C\|_1)^{1/2}\ |\|\eta\||\ \left[\sum_n \lambda_n \int_r^{+\infty} |(\psi_n,\ e^{-ixB}\eta)|^2\ dx\right]^{1/2}. \qquad (0.21)$$

Puesto que $\sum_n \lambda_n\ |(\psi_n,\ e^{-ixB}\ \eta)|^2$ es una función en L' por

(0.20), obtenemos (0.5).

Supongamos ahora que $\varphi'>0$ en (α_n,β_n) entonces para $t\to+\infty$ y $s=0$ en (0.21) obtenemos que

$$\|(\Omega^{\pm}(A,B)-I)\, e^{-i\varphi(B)r}\eta\|^2 \le \text{const.} \left[\sum_{n=1}^{+\infty}|\lambda_n| \int_0^{\pm\infty}((\psi_n,\ e^{-iBt-i\varphi(B)r}\eta)^2 dt\right]^{1/2} \tag{0.22}$$

Por teoría general, sabemos que el subespacio generado por B y η, $Q\mathcal{H}$, es unitariamente equivalente a $L^2(\mathbb{R}, |f(\lambda)|^2\, d\lambda)$ de tal forma que η corresponde al vector $\eta(\lambda)\equiv 1$ y $e^{-itB-i\varphi(B)r}$ es multiplicación por $e^{-it\lambda-i\varphi(\lambda)r}$. Entonces, puesto que $f\in L^{\infty}$, tenemos que

$$\left[\psi_n,\ e^{-itB-i\varphi(B)r}\ \eta\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t-i\varphi(\lambda)r}\ w_n(\lambda)\ d\lambda, \tag{0.23}$$

donde $w_n(\lambda)\in L^2(\mathbb{R}, d\lambda)$, y $\operatorname{supp} w_n \subset (\alpha_n,\beta_n)$. Usando que $\varphi'>0$ en (α_n,β_n) y tomando $|r|>0$, se puede demostrar que cada integral en (0.22) tiende a cero si $r\to\pm\infty$ (Si $\varphi'<0$ en (α_n,β_n), se toma $r\to\mp\infty$). Por (0.20) $\sum_n |\lambda_n| \int_0^{+\infty} |(\psi_n,\ e^{-iBt-i\varphi(B)r}\ \eta)|^2 \le$ constante.

Por lo que (0.22) tiende a cero si $r\to\pm\infty$. Por otro lado, sabemos que

$$A\ \Omega^{\pm}(A,B) = \Omega^{\pm}(A,B)B. \qquad (0.25)$$

Esto implica que $e^{-i\varphi(A)s}\ \Omega^{\pm}(A,B) = \Omega^{+}(A,B)\ e^{-i\varphi(B)s}$.

En consecuencia,

$$\|e^{i\varphi(A)r}(\Omega\pm(A,B)-I)e^{-i\varphi(B)r}\eta\| = \|(\Omega\pm(A,B) - e^{i\varphi(A)r}\ e^{-i\varphi(B)r})\eta\|$$

$$= \|(\Omega\pm(A,B)-I)e^{-i\varphi(B)r}\eta\| \to 0, \quad r\to\pm\infty. \qquad (0.26)$$

Obtenemos que

$$\lim_{r\to\pm\infty} e^{i\varphi(A)r}\ e^{-i\varphi(B)r}\eta = \Omega^{\pm}(A,B)\ \eta, \quad \eta \in \operatorname{Ran} P_{(\alpha_n,\beta_n)} \cap M(B), \quad \varphi'>0$$

en (α_n,β_n),

$$\lim_{r\to\pm\infty} e^{i\varphi(A)r}\ e^{-i\varphi(B)r}\eta = \Omega\mp(A,B)\ \eta, \quad \eta \in \operatorname{Ran} P_{(\alpha_n,\beta_n)} \cap M(B), \quad \varphi'<0$$

en (α_n,β_n).

Además, las hipótesis sobre φ implican que si $\Delta \subset \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero entonces también la medida de Lebesgue de $\varphi(\Delta\cap T)$ y $\varphi^{-1}(\Delta)$ son cero. Por lo que $P_{ac}(\varphi(B)) = P_{ac}(B)$. Esto prueba (0.6) y (0.7).

La función de Krein para H y H_0 está relacionada con representaciones espectrales de el operador de colisiones

$$S(H,H_0) := (\Omega^{+}(H,H_0))^{*}\ \Omega^{-}(H,H_0), \qquad (0.27)$$

el cual por la propiedad (0.25) siempre conmuta con H_0

restringido a su parte absolutamente contienen: $\mathcal{H}_{ac}(H_0)$. Esto hace que el operador de colisiones $S(H,H_0)$ pueda ser expresado en una representación integral para H_0.

Para caracterizar los operadores autoadjuntos H_0 y H para los cuales la función de Krein está definida y puede ser relacionada a el operador de colisiones $S(H,H_0)$, necesitaremos de algunos conceptos de la teoría de C^* y W^* - álgebras, la teoría de multiplicidad y la de representaciones integrales.

Sea $M \subseteq L(\mathcal{H})$, con las siguientes propiedades:

(a) Si $A, B \in M$, entonces $A \cdot B$, $\alpha A + \beta B \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(b) Si $A \in M$, $A^* \in M$.

M es llamada una $*$-álgebra. Dos $*$-álgebras $M_1 \subseteq L(\mathcal{H}_1)$, $M_2 \subseteq L(\mathcal{H}_2)$ son isomorfas, $M_1 \cong M_2$ si V es un operador isométrico de $\mathcal{H}_1$ sobre $\mathcal{H}_2$ tal que $V A_1 V^* = A_2$ es una biyección de M_1 sobre M_2. Una C^*-álgebra es una $*$-álgebra la cual es cerrada en la topología de la norma en $L(\mathcal{H})$:

$$\|A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} \|A\varphi\|. \tag{0.28}$$

En $L(\mathcal{H})$ tenemos también la topología débil generada por las seminormas

$$P_{f,g}(A) : = |(g, Af)| \tag{0.29}$$

$$A \in L(\mathcal{H}), \quad f,\ g \in \mathcal{H}.$$

Una *-álgebra M, la cual es cerrada con respecto a la topología débil es llamada una W*-álgebra. Si $R \subset L(\mathcal{H})$ es un subconjunto cualquiera, $C^*(R)$ y $W^*(R)$ denotan la mínima C*-álgebra, respectivamente W*-álgebra generado por R. Denotaremos

$$\text{com } R : = \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid AT=TA,\ \forall\ T \in R\}. \tag{0.30}$$

Una W*-álgebra M conteniendo al operador I es llamada una álgebra de von Neumann. Dos proyectores P, Q de una álgebra de von Neumann M son equivalentes módulo M si existe una isometría parcial $U \in M$ tal que $U^*U = P$, $UU^* = Q$. Esto lo denotaremos por $P \sim Q$ (mod M).

Si $P \in \text{com } M$ es un proyector, se denota la parte de M con respecto al espacio de Hilbert $P\mathcal{H}$ por $M|_{P\mathcal{H}}$, donde $M|_{P\mathcal{H}}$ es el álgebra de von Neumann consistiendo de todos los operadores $A|_{P\mathcal{H}}$, $A \in M$.

Una álgebra de von Neumann M se dice que es simple si no existen proyectores $P, Q \in \text{com } M$ con $P, Q \neq 0$, $PQ = QP = 0$, tales que $P \sim Q$ (mod com M).

Un proyector $P \in \text{com } M$ es llamado simple si $M|_{P\mathcal{H}}$ es simple. Equivalentemente, P es simple si P no es la suma de dos proyectores Q_1, Q_2 ortogonales entre sí:
$Q_1Q_2 = Q_2Q_1 = 0$, $Q_1, Q_2 \in \text{com } M$ tales que $Q_1 \sim Q_2 (\text{mod com } M)$.

M se dice que tiene multiplicidad n, $n \geq 2$, si existen $P_1, \ldots, P_n \in \text{com } M$ proyectores simples mutuamente ortogonales con $I = \sum_{i=1}^{n} P_i$ tales que $P_i \sim P_j$ (mod com M) si $i \neq j$.

Si $f \in \mathcal{H}$, $f \neq 0$, entonces el proyector $Q = Q_f$ sobre la clausura (en $\mathcal{H}$) del subespacio $\{Af \mid A \in M\}$ pertenece a com M. Un proyector Q de este tipo es llamado un proyector cíclico y $\{Af \mid A \in M\}$ es llamado un subespacio cíclico. Un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ es llamado generador para $\mathcal{H}$ y M si la clausura de $\{Af \mid A \in M, f \in \mathcal{D}\}$ es todo $\mathcal{H}$.

Por consiguiente, si $Q \in \text{com } M$ es simple, entonces Q es cíclica. Solamente cuando M es abeliana, es decir, $M \subseteq \text{com } M$, el inverso es cierto.

Debido a un resultado de descomposición, para un álgebra de von Neumann abeliana M, existen proyectores $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ tales que $\{E_i\}_{i=1}^{+\infty}$ son mutuamente ortogonales con $\sum_i E_i = I$ y además $M|E_n\mathcal{H}$ es una álgebra con multiplicidad n. Estas álgebras son llamadas las partes de multiplicidad homogénea de M. Es decir, M puede ser representada como una suma directa de álgebras $M|E_n\mathcal{H}$ cuya multiplicidad es exactamente n.

$$M = \bigoplus_{n=1}^{N} M|E_n\mathcal{H}, \tag{0.32}$$

donde $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Ahora enunciamos sin demostración el teorema espectral[13] para un operador autoadjunto. A partir de este teorema podemos construir una representación integral para H_0.

Teorema 0.33 Sea H un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable con dominio $\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{H}$. Entonces existe una medida μ sobre un espacio E, μ una medida finita, un operador unitario $U: \mathcal{H} \to L^2(E, d\mu)$ y una función h sobre E tal que

a) $\psi \in \mathcal{D}(H)$ si y sólo si $h(\cdot)(U\psi)(\cdot) \in L^2(E, d\mu)$ (0.33)

b) Si $g \in U[D(H)]$, entonces $(UHU^{-1}g)(e) = h(e)g(e)$ (0.34)

Dado este teorema podemos definir operadores sobre $\mathcal{H}$ que son unitariamente equivalentes a multiplicación por una función en el espacio $L^2(E, d\mu)$. Nosotros tomaremos funciones características X_Ω de un conjunto Borel medible $\Omega \subset \mathbb{R}$. Podemos definir

$$P_\Omega(H) := U\, T_{X_{\Omega}\cdot h}\, U^{-1}, \qquad (0.35a)$$

donde $T_{X_{\Omega}\cdot h}$ es el operador actuando en $L^2(E,\ d\mu)$ por multiplicación con la función $(X_\Omega \circ h)(e)$.

Es fácil checar que las siguientes propiedades se cumplen para $P_\Omega(H)$:

a) Cada $P_\Omega(H)$ es un proyector

b) $P_\phi(H) = 0$, $P_{\mathbb{R}}(H) = \mathbf{1}$

c) Si $\Omega = \bigcup_{n=1} \Omega_n$ con $\Omega_n \cap \Omega_m = \phi$, $n \neq m$, entonces

$$P_\Omega(H) = s - \lim_{N \to +\infty} \sum_{n-1}^{N} P_{\Omega_n}(H), \qquad (0.35b)$$

d) $P_{\Omega_1\Omega_2}(H) = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}(H)$

Teniendo esto en cuenta, podemos hacer las siguientes definiciones

Definición 0.36 Un operador autoadjunto H es llamado simple si $W^*(P_\Omega(H);\ \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ es simple. Se dice que H tiene multiplicidad m si $W^*(P_\Omega(H);\ \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ tiene multiplicidad m.

Recordando (0.32) y esta última definición se sigue que existe una resolución de la identidad $\sum_n E_n = \mathbf{1}$, dado un operador autoadjunto

$$H, \text{ tal que } H|E_n \mathcal{H} \text{ tiene multiplicidad } n, \tag{0.37}$$

$$H = \oplus\, H|E_n \mathcal{H}. \tag{0.38}$$

Consideremos ahora el operador $H|E_n \mathcal{H}$. Deseamos hallar una representación unitaria equivalente a este operador, usando integrales directas[14].

Primero consideremos que H es un operador autoadjunto simple. Construiremos una medida μ finita tal que $\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, y donde H es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por la función λ en $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$.

Sea e un vector en $\mathcal{H}$ generador de $W^*(P_\Delta(H), \Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Es decir, la clausura en $\mathcal{H}$ del conjunto $\{P_\Delta(H)\, e | \Delta \subseteq \mathbb{R}$ Borel medible$\}$. Puesto que H es simple, la clausura es todo $\mathcal{H}$. Definamos para cada función característica X_Δ, $\Delta \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ el operador V como

$$V(X_\Delta) = P_\Delta\, e \tag{0.39}$$

y sea μ la medida definida por

$$\mu(\Delta) = (e, P_\Delta\, e). \tag{0.40}$$

V es un operador isométrico en un subconjunto denso de $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$

en $\mathcal{H}$. Además Ima V es denso en $\mathcal{H}$. Por lo que V puede ser extendido isométricamente a todo $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ sobre $\mathcal{H}$. Por cálculo funcional, vemos que H es unitariamente equivalente a multiplicación por la función λ.

Ahora consideremos el caso en que H tiene multiplicidad n. Por definición de multiplicidad, existen proyectores $P_1, \ldots, P_n$ mutuamente ortogonales con $\sum_{i=1}^{n} P_i = \mathbf{1}$ y tal que $H|P_i\mathcal{H}$ es simple. Por lo visto anteriormente, $H|P_i\mathcal{H}$ es unitariamente equivalente a multiplicación por λ en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_i)$. Por consiguiente, si H tiene multiplicidad n, H es unitariamente equivalente a multiplicación por λ sobre $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$, donde hay n términos en esta suma directa. Tomando

$$\mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \mu_i \tag{0.41}$$

se ve fácilmente que H es unitariamente equivalente a multiplicación por λ en el espacio $L^2(\mathbb{R}, d\mu; \mathbb{C}^n)$[15]. Nótese que $\mathrm{supp}\ \mu_i \cap \mathrm{supp}\ \mu_j = \phi$, $i \neq j$. En el caso general se tiene que:

Teorema 0.42 Sea H un operador autoadjunto en $\mathcal{H}$. Entonces existe una descomposición $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}_i$ tal que

a) $H|\mathcal{H}_m$ tiene multiplicidad m

b) $H\ \mathcal{H}_m \subseteq \mathcal{H}_m$

c) H es unitariamente equivalente a multiplicación por λ en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_m; \mathbb{C}^m)$ para cierta medida μ_m de Borel.

Para obtener una representación integral para la matriz de colisiones (0.27) en términos de una integral espectral para $H_0|P_{ac}(H_0)$ necesitamos ahora de integral de funciones a valores en los operadores o en los vectores, con respecto a una medida espectral P_Ω (satisfaciendo (0.35b)).

Definición 0.43

Sea P_Ω una medida espectral a valores en $L(\mathcal{H})$. Sea $A(\lambda)$ una función sobre $[a.b)$ en $L(\mathcal{H})$. Consideremos $-\infty < a < b < +\infty$ y particiones Π del intervalo $[a,b)$ de la forma $[a,\lambda_1) \cup [\lambda_1,\lambda_2) \cup \ldots \cup [\lambda_{n-1}, b)$. Pongamos $\Delta_m = [\lambda_{m-1}, \lambda_m)$, $m = 1,\ldots,n$. $|\Pi| = \max|\Delta_m|$. Definimos el operador $T_{\Pi;x_1,\ldots,x_n}(A)$ como

$$T_{\Pi,x_1,\ldots,x_n}(A) := \sum_{j=1}^{n} A(x_j)\, P_{\Delta_j}, \quad x_j \in \Delta_j. \tag{0.44}$$

Decimos que el operador $T \in L(\mathcal{H})$ es la integral espectral del operador $A(\cdot)$ con respecto a P_Ω si

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \|T_{\Pi;x_1,\ldots,x_n}(A) - T\| = 0, \quad \text{independientemente de } \Pi \text{ y } \{x_j\}. \tag{0.45}$$

En tal caso, escribimos

$$T = \int_a^b A(\lambda)\ P(d\lambda). \tag{0.46}$$

Si $f(\lambda)$ es una función de $[a,b)$ en $\mathcal{H}$, decimos que el vector $\eta \in \mathcal{H}$ es la integral espectral de la función vectorial $f(\lambda)$ con respecto a P_Ω si

$$\lim_{|\Pi|\to 0} \|\eta_{\Pi;x_1,\ldots,x_n}(f) - \eta\| = 0, \quad \text{independientemente de } \Pi \text{ y } \{x_j\}, \tag{0.47}$$

donde

$$\eta_{\Pi;x_1,\ldots,x_n}(f) = \sum_{j=1}^{n} P_{\Delta_j}\ f(x_j), \qquad x_j \in \Delta_j, \tag{0.48}$$

y escribimos

$$\eta = \int_a^b P(d\lambda)\ f(\lambda). \tag{0.49}$$

Si Δ es un conjunto de Borel, definimos

$$\int_\Delta A(\lambda)\ P(d\lambda)\ := \int_a^b x_\Delta(\lambda)\ A(\lambda)\ P(d\lambda), \qquad A \subset [a.b), \tag{0.50}$$

$$\int_\Delta P(d\lambda)\ f(\lambda)\ := \int_a^b P(d\lambda)\ x_\Delta(\lambda)\ f(\lambda), \qquad A \subset [a.b). \tag{0.51}$$

Si $\Delta = \mathbb{R}$, definimos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda)\ P(d\lambda) = s - \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} A(\lambda)\ P(d\lambda), \qquad (0.52)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(d\lambda)\ f(\lambda) = s - \lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} P(d\lambda)\ f(\lambda). \qquad (0.53)$$

Consideremos ahora la medida espectral P_Ω. Por cálculo funcional, sabemos que existe un operador autoadjunto H cuyas proyecciones espectrales son P_Ω, $\Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Es decir,

$$(\varphi,\ H\psi) = \int_{\mathbb{R}} \lambda(\varphi, P(d\lambda)\psi), \qquad (0.54)$$

y en general para una función Borel-medible $\alpha(\lambda)$, tenemos que

$$(\varphi,\ \alpha(H)\psi) = \int_{\mathbb{R}} \alpha(\lambda)(\varphi,\ P(d\lambda)\psi), \qquad (0.55)$$

donde $\alpha(H)$ está definido en forma similar a $P_\Omega(H)$ en la fórmula (0.35a). Tomemos $\alpha(\lambda)$ una función continua en $\mathbb{R}$. Si $[a,b]$ es compacto, es fácil ver que

$$\int_{a}^{b} \alpha(\lambda)\ P(d\lambda) \qquad (0.56)$$

existe.

Por otro lado, si $P_\Delta \varphi = \varphi$, $P_\Delta \psi = \psi$, $\Delta \subset [a,b)$

$$(\varphi,\ \alpha(H)\psi) = \int_a^b \alpha(\lambda)(\varphi,\ P(d\lambda)\psi). \tag{0.57}$$

Entonces, tomando particiones Π, $|\Pi| \to 0$, $x_j \in \Delta_j$,

$$(\varphi, \int_a^b \alpha(\lambda)\ P(d\lambda)\ \psi) = \lim_{|\Pi|\to 0} (\varphi, \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j)\ P_{\Delta_j} \psi) = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{j=1}^{n} \alpha(x_j)\ (\varphi, P_{\Delta_j} \psi)$$

$$= \int_a^b \alpha(\lambda)\ (\varphi,\ P(d\lambda)\ \psi) = (\varphi,\ \alpha(H)\ \psi). \tag{0.58}$$

Es decir, $$\alpha(H)\ P_{[a,b]}(H) = \int_a^b \alpha(\lambda)\ P(d\lambda). \tag{0.59}$$

Ahora supongamos que P_Ω denota una medida espectral absolutamente continua. Sean $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ una partición de $[a,b]$, de conjuntos de Borel. Para funciones escalón, tenemos que

$$\varphi(\lambda) = \sum_{\rho=1}^{m} x_{\Delta_\rho}(\lambda)\ \varphi_\rho \tag{0.60}$$

$$\int_a^b P(d\lambda)\ \varphi(\lambda) = \sum_{\rho=1}^{m} P_{\Delta_\rho}\ \varphi_\rho =: g \tag{0.61}$$

Puesto que $(\varphi_\rho,\ P_\Delta\ \varphi_\rho)$ es una medida absolutamente continua, entonces

$$(\varphi_\rho,\ P(d\lambda)\ \varphi_\rho)/d\lambda, \quad \rho = 1,\dots,m\ , \tag{0.62}$$

existe a.e. $d\lambda$ (i.e. exceptuando en conjuntos de medida-Lebesgue cero). Por lo tanto,

$$\|g\|^2 = \sum_{\rho=1}^{m} (\varphi_\rho,\ P_{\Delta_\rho}\ \varphi_\rho) = \sum_{\rho=1}^{m} \int_{\Delta_\rho} \frac{(\varphi_\rho,\ P(dx)\ \varphi_\rho)}{dx}\, dx =$$

$$\int_a^b \frac{(\varphi(\lambda),\ P(dx)\ \varphi(\lambda))}{dx}\bigg|_{x=\lambda} d\lambda. \tag{0.63}$$

Si Δ es un conjunto de Borel arbitrario, entonces,

$$\|P_\Delta\ g\|^2 = \int_\Delta \frac{(\varphi(\lambda),\ P(dx)\ \varphi(\lambda))}{dx}\bigg|_{x=\lambda} d\lambda = \int_\Delta \frac{(g,\ P(d\lambda)\ g)}{d\lambda}\, d\lambda, \tag{0.64}$$

esto es,

$$\frac{(g,\ P(d\lambda)\ g)}{d\lambda} = \frac{(\varphi(\lambda),\ P(dx)\ \varphi(\lambda))}{dx}\bigg|_{x=\lambda} \quad \text{a.e. } d\lambda. \tag{0.65}$$

Definición 0.66

Dado un vector $g \in \mathcal{H}$ y una medida espectral P_Ω abs. continua a valores en $L(\mathcal{H})$, ponemos

$$|g|_\lambda^2 := \frac{(g,\ P(d\lambda)\ g)}{d\lambda}. \tag{0.66}$$

En el párrafo anterior obtuvimos que si

$$P_{[a,b]}g = g = \int_a^b P(d\lambda)\ \varphi(\lambda), \quad g = \sum_{j=1}^{n} P_{\Delta_j}\ \varphi_j, \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \phi, \quad i \neq j \tag{0.67}$$

entonces

$$|g|_\lambda = |\varphi(\lambda)|_\lambda \quad \text{a.e.} \quad d\lambda\ , \tag{0.68}$$

y además

$$\int_a^b |\varphi(\lambda)|_\lambda^2\ d\lambda = \|g\|^2 = \left\|\int_a^b P(d\lambda)\ \varphi(\lambda)\right\|^2. \tag{0.69}$$

Tomemos ahora una función $f(\lambda)$ absolutamente continua en un intervalo compacto $[a,b]$ a valores en $\mathcal{H}$ y P_Ω una medida absolutamente continua, a valores en $L(\mathcal{H})$.

Debido a la estimación

$$\sum_{\rho=1}^{n} \left| \|P(\lambda_\rho)f_\rho\|^2 - \|P(\lambda_{\rho-1})f_{\rho-1}\|^2 \right| \leq (\|f(b)\| + \sup_{\lambda\in[a,b]} \|f(\lambda)\| +$$

$$\int_a^b \|f'(\lambda)\| \, d\lambda)^2 + 2 \sup \|f(\lambda)\| \int_a^b \|f'(\lambda)\| \, d\lambda, \qquad (0.70)$$

donde

$$P(\lambda_\rho) := P_{(-\infty,\lambda_\rho)}, \qquad \rho = 1,\dots,n \, ; \qquad (0.71)$$

$$[a,b] = \bigcup_{\rho=1}^{n} [\lambda_{\rho-1}, \lambda_\rho], \qquad (0.72)$$

se sigue que la variación total de $\|P(\lambda)\, f(\lambda)\|^2$ es finita en $[a,b]$.

Por consiguiente,

$$\frac{d}{d\lambda} (f(\lambda), P(\lambda)\, f(\lambda)) \quad \text{existe.} \qquad (0.73)$$

En consecuencia, tenemos también que

$$\left. \frac{(f(\lambda),\ P(dx)\ f(\lambda))}{dx} \right|_{x=\lambda} \qquad (0.74)$$

existe a.e. $d\lambda$ y es Borel medible

Para finalizar esta serie de resultados que usaremos más adelante, damos las siguientes 2 proposiciones

Proposición 0.75

Sea $A \in L_2(\mathcal{H})^{(10)}$ y P_Ω una medida absolutamente continua a valores en $L(\mathcal{H})$, entonces la medida $A^*P_\Omega A$ es $L_1(\mathcal{H})$ diferenciable a.e. $d\lambda$ en $\mathbb{R}$ y donde su derivada, $K(\lambda)$, es una función a valores en $L_1(\mathcal{H})$.

Demostración:

Puesto que P_Ω es una medida absolutamente continua a valores en $L(\mathcal{H})$, entonces para cada $\Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $\varphi,\ \psi \in \mathcal{H}$

$$\mu(\Omega) := (\varphi,\ P_\Omega\, \psi), \tag{0.76}$$

es una medida continua a valores en $L(\mathcal{H})$. Entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ \mu([\lambda,\ \lambda+h)) \tag{0.77}$$

existe a.e. $d\lambda$.

Por consiguiente, puesto que $\mathcal{H}$ es separable

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ (\varphi,\ P_{[\lambda,\lambda+h)}\ \psi) \text{ existe.} \tag{0.78}$$

Es decir,

$$w - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ P_{[\lambda,\lambda+h)} \tag{0.79}$$

existe a.e. $d\lambda$.

Por el principio de acotamiento uniforme, sabemos que existe un operador acotado $P'(\lambda)$ a.e. $d\lambda$. Además

$$\sup_{h} \frac{1}{h} \|P_{[\lambda,\lambda+h)}\| < +\infty, \tag{0.80}$$

a.e. $d\lambda$.

Entonces

$$w - \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} A^* P_{[\lambda,\lambda+h)} = A^* P'(\lambda) \tag{0.81}$$

a.e. $d\lambda$ con $A^*P'(\lambda)$ en $L_2(\mathcal{H})$.

Recordemos ahora que si $A \in L_2(\mathcal{H})$, A puede ser escrito de la forma

$$A = BC \tag{0.82}$$

donde C es un operador compacto y $B \in L_2(\mathcal{H})$.

Definamos para cada operador compacto F

$$T_{h,\lambda}(F) = (\frac{1}{h} A^* P_{[\lambda,\lambda+h)} - A^*P'(\lambda))F$$

$$= C^*(\frac{1}{h} B^* P_{[\lambda,\lambda+h)} - B^*P'(\lambda))F. \tag{0.83}$$

Notemos que

$$T_{h,\lambda}: L_\infty(\mathcal{H}) \longrightarrow L_2(\mathcal{H}), \tag{0.84}$$

$$\|T_{h,\lambda}\| \le \|C^*\| \|\tfrac{1}{h} B^* P_{[\lambda,\lambda+h)} - B^*P'(\lambda)\|_2 \le 2\ \alpha\|C\|, \tag{0.85}$$

donde

$$\alpha = \sup \|\tfrac{1}{h} P_{[\lambda,\lambda+h)}\| \le +\infty \quad \text{a.e. } d\lambda.$$

Si tomamos

$$F = (\varphi,\ \bullet)\ \psi, \tag{0.86}$$

$$\|T_{h,\lambda}(F)\|_2 = \|C^*(\tfrac{1}{h} B^* P_{[\lambda,\lambda+h)} - B^*P'(\lambda))(\varphi,\ \bullet)\ \psi\|_2$$

$$= \|(\varphi,\ \bullet)\ C^*(\tfrac{1}{h} B^*P_{[\lambda,\lambda+h)} - B\ P'(\lambda))\ \psi\|_2$$

$$= \|\varphi\| \|C^*(\tfrac{1}{h} B^*P_{[\lambda,\lambda+h)} - B^*P'(\lambda))\ \psi\| \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0 \quad \text{a.e. } d\lambda, \tag{0.87}$$

puesto que C^* es compacto y (0.81) se cumple con B^* en lugar de A^*. Usando (0.85) y el hecho que combinaciones lineales de operadores F de la forma (0.86) son densas en $L_\infty(\mathcal{H})$, podemos extender el resultado a todo $L_\infty(\mathcal{H})$:

$$\|T_{h,\lambda}(F)\|_2 \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0, \quad \text{a.e. } d\lambda, \quad F \in L_\infty(\mathcal{H}). \tag{0.88}$$

Por lo tanto, usando (0.82) en A^*, $A^* = B'^*\ C'^*$,

$$\|\tfrac{1}{h} A^*\ P_{[\lambda,\lambda+h]}A - A^*P'(\lambda)A\|_1 = \|C^*(\tfrac{1}{2} B^*\ P_{[\lambda,\lambda+h)} - B^*P'(\lambda))\ C'\ B'\ \|_1$$

$$= \|T_{h,\lambda}(C')(B')\|_1 \le \|T_{h,\lambda}(C')\|_2 \|B'\|_2 \longrightarrow 0, \quad h \longrightarrow 0, \quad \text{a.e. } d\lambda,$$

(0.89)

y donde se usa (0.88). Esto prueba la proposición.

Definimos a $\dfrac{A^*P(d\lambda)A}{d\lambda}$ por:

$$\frac{A^*P(d\lambda)A}{d\lambda} := A^*P'(\lambda)A \tag{0.90}$$

Proposición 0.91

Sean A y P_Ω como en la proposición anterior. Supongamos que

$$\sup \left\|\frac{A^*P(d\lambda)A}{dx}\right\| < +\infty \quad \text{a.e. } d\lambda \tag{0.92}$$

entonces

$$\int P(d\lambda)\ A\{\cdot\} \in \mathcal{L}\,(L^2(\mathbb{R},\ d\lambda;\ \mathcal{H}),\mathcal{H}) \tag{0.93}$$

Demostración:

Es suficiente con tomar un conjunto denso en $L^2(\mathbb{R},\ d\lambda;\ \mathcal{H})$. Por ejemplo, las funciones f absolutamente continuas por pedazos con soporte contenido en un compacto con $f \in L^2(\mathbb{R},d\lambda;\mathcal{H})$.

Usando (0.69), tenemos

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} P(d\lambda)\ A\ f(\lambda) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A\ f(\lambda),\ P(dx)\ A\ f(\lambda))}{dx} \Bigg|_{x=\lambda} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\lambda),\ \frac{A^*P(d\lambda)A}{d\lambda}\ f(\lambda) \right] d\lambda$$

$$\leq \operatorname*{ess\ sup}_{\lambda} \left\| \frac{A^*P(d\lambda)A}{d\lambda} \right\| \int_{-\infty}^{+\infty} \| f(\lambda) \|^2_{\mathcal{H}}\ d\lambda, \tag{0.94}$$

donde hemos usado la proposición anterior.

Como las funciones f son densas, podemos extender el operador (0.93) a todo $L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H})$. Esto prueba la proposición.

I Representaciones mediante integrales espectrales

Como en la demostración del teorema 0.5 se puede probar que si H y H_0 son operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $J \in L(\mathcal{H})$ con $JD(H_0) \subseteq D(H)$, tales que $\forall\ \varphi \in D(H_0)$ y $\forall\ \psi \in D(H)$

$$(H\psi,\ J\varphi) - (\psi,\ J\ H_0\ \varphi) = (\varphi,\ V\ \psi), \tag{1.1}$$

para algun $V \in L_1(\mathcal{H})$, entonces los operadores de onda generalizados

$$\Omega_{\pm}(H,\ H_0;\ J) :=s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH}\ J\ e^{-itH_0}\ P_{ac}(H_0) \tag{1.2}$$

$$\Omega_{\pm}(H_0, H; J^*) := s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_0} J^* e^{-itH} P_{ac}(H) \qquad (1.3)$$

existen.

Usando (1.2), es fácil ver que

$$s - \lim_{\epsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} e^{itH} J e^{-itH_0} dt\, P_{ac}(H_0) = \Omega_+(H, H_0; J), \qquad (1.4)$$

y similarmente para $\Omega_-(H, H_0; J)$.

Definamos

$A(t) = \varepsilon J e^{-\varepsilon t} e^{-itH_0}$, entonces

$$F(\lambda) := \int_0^{+\infty} e^{i\lambda t} A(t)dt = \int_0^{+\infty} \varepsilon J e^{i\lambda t-\varepsilon t} e^{-itH_0} dt = i\varepsilon J(\lambda+i\varepsilon-H_0)^{-1}. \qquad (1.5)$$

Usando Fubini y (0.59) obtenemos que

$$P_{[a,b)}(H)\Omega_+(H,H_0;J) = s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} P_{[a,b)}(H)\, \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} e^{itH} J e^{-itH_0} dt\, P_{ac}(H_0) =$$

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} \int_a^b e^{it\lambda} P(H,d\lambda)\, J\, e^{-itH_0} P_{ac}(H_0)$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \int_a^b P(H,d\lambda)\, F(\lambda) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \int_a^b P(H,d\lambda) J(\lambda+i\varepsilon-H_0)^{-1} P_{ac}(H_0)$$

(1.6)

Tomando $[a,b] \longrightarrow (-\infty, +\infty)$,

$$\Omega_+(H,\ H_0;\ J) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} P(H,d\lambda)\ J(\lambda+i\varepsilon-H_0)^{-1}\ P_{ac}(H_0). \qquad (1.7)$$

Por (0.25)

$$\operatorname{Ran} \Omega_\pm(H,\ H_0;\ J) \subseteq P_{ac}(H), \qquad (1.9)$$

y en consecuencia

$$\Omega_+^*(H,\ H_0;\ J)\ P_{ac}(H) = \Omega_+(H_0,\ H;\ J^*)$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} i\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} P(H_0,\ d\lambda)\ J^*(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1}\ P_{ac}(H). \qquad (1.10)$$

Supondremos que los operadores de onda (1.2) son completos:

$$\operatorname{Ran} \Omega_\pm(H,\ H_0;\ J) = P_{ac}(H), \qquad (1.11)$$

$$\operatorname{Ran} \Omega_\pm(H_0,\ H;\ J^*) = P_{ac}(H_0). \qquad (1.12)$$

El operador de colisiones

$$S(H, H_0; J) := \Omega_+^*(H, H_0; J)\, \Omega_-(H, H_0; J) \qquad (1.13)$$

puede ser expresado mediante integrales espectrales. Tenemos que

$$\Omega_+^*(H, H_0; J)\, \Omega_-(H, H_0; J) - \Omega_+^*(H, H_0; J)\, \Omega_+(H, H_0; J) = S - P_{ac}(H_0)$$

$$= \Omega_+^*(H, H_0; J)\, (\Omega_-(H, H_0; J) - \Omega_+(H, H_0; J)). \qquad (1.14)$$

Usando (1.7-13), tenemos que

$$S-P_{ac}(H_0) = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \left\{ i\, P_{ac}(H_0) \int_{-\infty}^{+\infty} P(H_0, d\lambda) J^* \varepsilon(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1} \right\} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to 0}$$

$$\left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} P(H, dx)\; J\; \delta[(x-i\delta-H_0)^{-1} + (x+i\delta-H_0)^{-1}] P_{ac}(H_0) \right.$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{\delta\to 0}\ \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} \left\{ P_{ac}(H_0) \int_{-\infty}^{+\infty} P(H_0, d\lambda) J^* \varepsilon(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} P(H, dx)\; J\; \delta \right.$$

$$[(x-i\delta-H_0)^{-1} + (x+i\delta-H_0)^{-1}]\; P_{ac}(H_0)$$

$$= \operatorname*{s\ lim}_{\delta\to 0}\ \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to 0} P_{ac}(H_0) \int_{-\infty}^{+\infty} P(H_0, d\lambda) J^* \varepsilon(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1} J \delta[(\lambda-i\delta-H_0)^{-1} +$$

$$(\lambda-i\delta-H_0)^{-1}]\ P_{ac}(H_0)$$

$$= s\lim_{\delta\to 0} s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} -i\ P_{ac}(H_0)\int_{-\infty}^{+\infty} P(H_0, d\lambda)(J^* + V^*(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1})$$

$$J[\delta(\lambda-i\delta-H_0)^{-1} + \delta(\lambda-i\delta-H_0)^{-1}]\ P_{ac}(H_0).$$

Aquí hemos usado

$$J^*\varepsilon(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1} = -\ i(J^* + (J^*H-\lambda J^*))(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1}, \qquad (1.15)$$

y la fórmula (0.59). Por lo tanto,

$$S-P_{ac}(H_0) = s\text{-}\lim_{\delta\to 0} s\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} P_{ac}\int_{-0}^{+\infty} P(H_0, d\lambda)(J^*V + V^*(\lambda+i\varepsilon-H)^{-1}V)$$

$$\times\ [(\lambda-i\delta-H_0)^{-1} - (\lambda+i\delta-H_0)^{-1}]\ P_{ac}(H_0) \qquad (1.16)$$

Con este resultado, podemos dar una primera expresión para la matriz de colisiones $S(H, H_0; J)$ en términos de integrales vectoriales.

Proposición 1.17

Sea $V := HJ-JH_0 \in L_1(\mathcal{H})$ y sea $V = B^*A$ con $A,B \in L_2(\mathcal{H})$.

Entonces existe una sucesión $\{\Delta_n\}_{n-1}^{+\infty}$, $\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \ldots$ con $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \Delta_n = \mathbb{R}$ mod($d\lambda$) tal que para todo $f \in M(H_0)$ (ver en 0.10)

$$(S-P_{ac}(H_0))\ f := -2\Pi i \ \text{s-lim} \int_{\Delta_n} P(H_0,d\lambda)\ \{J^*B^* + A^*B\ (\lambda+i0-H)^{-1} B^*(A\ P(H_0,d\lambda)f)/d\lambda \qquad (1.18)$$

Demostración:

Notemos que dada la medida $\phi(\Omega) = B\ P_\Omega(H)\ B^*$ la variación de ϕ está definida por

$$|\phi|(\Omega) := \sup_{\pi} \sum_{\Delta\in\pi} \|\phi(\Delta)\| \qquad (1.19)$$

donde π es una participación de Ω con $\Delta \cap \Delta' = \phi$ si $\Delta \neq \Delta'$, Δ', $\Delta \in \pi$.

ϕ es absolutamente continua con respecto a esta medida y por el teorema de Radon-Nikodin existe $K(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}, d|\phi|; L_1(\mathcal{H}))$ tal que

$$B\ P_\Omega(H)\ B^* = \int_\Omega K(\lambda)\ |\phi|(d\lambda) \qquad (1.20)$$

por lo tanto

$$B(z-H)^{-1} B^* = \int_{-\infty}^{+\infty} (z-\lambda)^{-1} K(\lambda) \; |\phi| \; (d\lambda). \qquad (1.21)$$

Sabemos que $B(\lambda+i\delta-H)^{-1} B^*$ converge en $L_2(\mathcal{H})$ conforme $\delta \to +0$ a.e. $d\lambda$.[14]

Por las fórmulas

$$A(\lambda+i\varepsilon-H_0)^{-1} = - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} X_{(-\infty,0]} \; e^{+\varepsilon x} \; A \; e^{ixH_0} \, dx, \quad \varepsilon > 0, \qquad (1.22)$$

$$A(\lambda-i\varepsilon-H_0)^{-1} = - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda x} X_{(-\infty,0]} \; e^{-\varepsilon x} \; A \; e^{ixH_0} \, dx, \quad \varepsilon > 0. \qquad (1.23)$$

vemos que

$$g_\eta(\lambda): = [A(\lambda-i\eta-H_0)^{-1} - A(\lambda-i\eta-H_0)^{-1}] \; f \in L^2(\mathbb{R}, d\lambda; \mathcal{H}), \qquad (1.24)$$

$\forall \; \eta > 0$. Sean

$$\beta(\lambda): = \sup_{0<\delta\leq 1} \|B(\lambda+i\delta-H)^{-1} B^*\|, \qquad (1.25)$$

$$\alpha(\lambda): = \|(A \; P(d\lambda) \; A^*) \; d\lambda\|. \qquad (1.26)$$

Por (1.21) y la nota [11], $\beta(\lambda) < + \infty$ a.e. $d\lambda$. Por (0.89) $\alpha(\lambda) < + \infty$ a.e. $d\lambda$.

Definamos conjuntos de Borel Δ_n tales que

$$\alpha(\lambda)\Big|_{\Delta_n} \leq n, \qquad \beta(\lambda)\Big|_{\Delta_n} \leq n, \tag{1.27}$$

$$P_{ac}(H_0)\, P_{\Delta_n}(H_0) = P_{\Delta_n}(H_0). \tag{1.28}$$

Entonces, $P_{\Delta_n}(H_0)\, P_{\Omega}(H_0) = P_{\Delta_n \cap \Omega}(H_0)$ es una medida absolutamente continua y por la proposición (0.91) sabemos que las integrales espectrales

$$\int_{\Delta_n} P(H_0, d\lambda)\; A^*B(\lambda+i0-H)^{-1}\; B^*\; g_n(\lambda) \tag{1.29}$$

existen, $\forall\; n \in \mathbb{N}$. Además,

$$\underset{\delta\to 0^+}{\text{s-lim}} \int_{\Delta_n} P(H_0, d\lambda)\;\; A^*B(\lambda+i\delta-H)^{-1}\;\; B^*g_n(\lambda) \;=\; \int_{\Delta_n} P(H_0, d\lambda)\;\; A^*B\;\; (\lambda+i0-H)^{-1}$$

$$\times\; B^*g_\eta(\lambda), \quad \forall \;\; n \in \mathbb{N} \;\; y \;\; \eta > 0\;. \tag{1.30}$$

Puesto que

$$\sup_{\varepsilon>0} \int_{-\infty}^{-\infty} \|A(\lambda\pm i\varepsilon-H)^{-1}\; f\|^2\; d\lambda \;\leq\; 2\pi\; \|A\|_2^2\; \|\,\|f\|\,\|_\infty^2\;, \tag{1.31}$$

con $f \in M(H_0)$ definida en (0.10), entonces $g_\eta(\lambda)$ converge fuertemente a $2\pi i\ (A\ P(H_0,d\lambda)f)/d\lambda$ a.e. $d\lambda$ y también con respecto a $L^2(\mathbb{R},d\lambda;\mathcal{H})$ si $\eta \to 0^+$. Esto implica la existencia de las integrales espectrales

$$\int_{\Delta_n} P(H_0,d\lambda)\ A^*B(\lambda+i0-H)^{-1}\ B^*\ A\ P(H_0,d\lambda)/_{d\lambda}\ f, \tag{1.32}$$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$, y obtenemos que

$$\underset{\eta\to 0^+}{\text{s-lim}}\ \underset{\delta\to 0^+}{\text{s-lim}} \int_{\Delta_n} P(H_0,d\lambda)\ \ A^*B(\lambda+i\delta-H)^{-1}\ \ B^*g_\eta(\lambda) = 2\pi i \int_{\Delta_n} P(H_0,d\lambda)$$

$$\times\ A^*(B(\lambda+i0-H)^{-1}B^*)\ \frac{A\ P(H_0,d\lambda)\ f}{d\lambda}. \tag{1.33}$$

Similarmente, para ciertos conjuntos Δ'_n tenemos ahora que

$$\underset{\eta\to 0^+}{\text{s-lim}} \int_{\Delta'_n} P(H_0,d\lambda)\ J^*B^*g_\eta(\lambda) = 2\Pi i \int P(H_0,d\lambda)\ J^*B^*\ \frac{(A\ P(H_0,d\lambda))f}{d\lambda} \tag{1.34}$$

Tomando ahora la sucesión $\Delta''_n = \Delta_n \cap \Delta'_n$ en (1.16)

$$(S-P_{ac}(H_0))\ f = \underset{n\to+\infty}{\text{s-lim}}\ P_{\Delta''_n}(H_0)\ (S-P_{ac}(H_0))\ f$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{n\to+\infty} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to0^+} \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to0^+} \left\{-\int_{\Delta''_n} P(H_0,d\lambda)\{J^*V+V^* R(\lambda+i\varepsilon)V\} \times [R_0(\lambda-i\delta) - R_0(\lambda+i\delta)]f\right\}$$

$$= \operatorname*{s-lim}_{n\to+\infty} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to0^+} \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\to0^+} - \int_{\Delta''_n} P(H_0,d\lambda)\ A^*BR(\lambda+i\varepsilon)\ B^*\ g_\delta(\lambda)$$

$$+ \operatorname*{s-lim}_{n\to+\infty} \operatorname*{s-lim}_{\delta\to0} - \int_{\Delta''_n} P(H_0,d\lambda)\ J^*B^*\ g_\delta(\lambda)$$

$$= -\ 2\Pi i \operatorname*{s-lim}_{n\to+\infty} \int_{\Delta''_n} P(H_0,d\lambda)\ \{J^*B^* + A^*\ BR(\lambda+io)B^*\}\ \frac{AP(H_0,d\lambda)f}{d\lambda} \tag{1.35}$$

Esto prueba la proposición.

I.1 LA FUNCION DE KREIN

Para empezar nuestro trabajo propiamente dicho, daremos una demostración ligeramente diferente de un resultado de Krein.

Recordemos que para A un operador a traza podemos definir para $|z| < \|A\|_1^{-1}$ l función determinante

$$\det(1-ZA) := \exp\{\operatorname{tr} \ln (1-zA)\}$$

como la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n Z^n \operatorname{tr} A^n$$

Por teoría general de variable compleja, podemos extender entonces det(1-ZA) a una función meromorfa en el plano complejo. Los polos de esta función son precisamente los puntos $Z = \lambda_j(A)^{-1}$, donde $\lambda_j(A)$, $j = 1,2,\ldots$ son los eigen valores de A. Teniendo esto en cuenta, consideremos dos operadores autoadjuntos H, H_0 acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con $V = H - H_0$ un operador a traza.

Sea $Z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} Z \neq 0$. Para $R_0(Z) := (Z - H_0)^{-1}$ definimos el determinante

$$\Delta(Z) := \det (1 - VR_0(Z)), \ \operatorname{Im} Z \neq 0. \tag{1.36}$$

La función espectral de desplazamiento $\xi(\lambda)$ está definida como

$$\xi(\lambda) := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (- \frac{1}{\pi}) \arg \Delta(\lambda + i\varepsilon) \tag{1.37}$$

Por el momento, supondremos que este límite existe casi donde quiera.

Ahora probamos un lema suponiendo la existencia de la función espectral.

Proposición 1.38

La siguiente ecuación es válida

$$\ln \Delta(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (Z-\lambda)^{-1}\ \xi(\lambda)\ d\lambda \qquad (1.39)$$

y además $\xi(\lambda)$ es una función en $L'(\mathbb{R},d\lambda)$

Demostración:

Sea $V = \sum_n v_n(\varphi_n,\cdot)\varphi_n$ donde $\{\varphi_n\}$ es un conjunto ortonormal de vectores en $\mathcal{H}$. Pongamos $V_n = v_n(\varphi_n,\cdot)\varphi_n$ y definamos

$$H_k = H_0 + \sum_{n=1}^{k} V_n, \qquad k \geq 1. \qquad (1.40)$$

Si $\Delta_n(z) := \det\left[1 - V_n R_{H_{n-1}}(Z)\right]$ se obtiene que

$$\log \Delta(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \Delta_n(Z). \qquad (1.41)$$

Notemos que

$$\Delta_n(Z) = 1 - v_n\left[\varphi_n,\ R_{H_{n-1}}(Z)\ \varphi_n\right]$$

$$= 1 - v_n \int (Z-\lambda)^{-1}\ \sigma_n(d\lambda)$$

donde $\sigma_n(\Delta)$ es la medida espectral del operador H_{n-1} asociada al vector φ_n. Por consiguiente,

$$\ln \Delta_n(Z) = \ln \left\{1 - v_n \int (Z-\lambda)^{-1}\ \sigma_n(d\lambda)\right\}$$

Puesto que $\operatorname{Im} \Delta_n(Z) = (\operatorname{Im} Z) \cdot v_n \int \dfrac{\sigma_n(d\lambda)}{(\lambda-R_e Z)^2+(\operatorname{Im} Z)^2}$ se deduce para $\operatorname{Im} Z > 0$ que

$$\operatorname{Im} \Delta_n(Z) > 0 \quad \text{si} \quad v_n > 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\operatorname{Im} \Delta_n(Z) < 0 \quad \text{si} \quad v_n < 0, \quad n = 1,2,\ldots$$

Es decir,

$$\arg \Delta_n(Z) \in (0,\pi) \quad \text{si} \quad v_n > 0 \tag{1.42}$$

o bien

$$\arg \Delta_n(Z) \in (-\pi,0) \quad \text{si} \quad v_n < 0. \tag{1.43}$$

Por otro lado, un teorema de representación para funciones holomorfas [Teorema 3, sección 69 del libro de Glasman y Ahiezer] nos asegura que

$$\ln \Delta_n(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw_n(t)}{Z-t} \tag{1.44}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{w_n(t-0) + w_n(t+0)}{2} &= \text{constante} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^t \operatorname{Im} \ln \Delta_n(x+i\varepsilon)dx \\ &= \text{constante} + \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_0^t \arg \Delta_n(x+i\varepsilon)dx \\ &= \text{constante} + \int_0^t \sim\xi_n(x)dx \end{aligned} \tag{1.45}$$

y donde

$$\xi_n(\lambda) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (-\frac{1}{\pi}) \arg \Delta_n(\lambda+i\varepsilon).$$

Además, por (1.42) y (1.43) se demuestra que

$$\xi_n(\lambda) \geq 0 \quad \text{si} \quad v_n < 0 \tag{1.46}$$

$$\xi_n(\lambda) \leq 0 \quad \text{si} \quad v_n > 0 \tag{1.47}$$

siempre que $\operatorname{Im} Z > 0$.

Puesto que $\sum_n \ln \Delta_n(Z)$ es absolutamente convergente se obtiene para

$x > \sup_{\lambda,n} \{\lambda \mid \lambda\in\sigma(H_n) \cap \sigma(H_0)\}$

$$\sum_n |\ln \Delta_n(Z)| = \sum_n \left| \int \frac{\xi_n(\lambda)}{x-\lambda} d\lambda \right| = \sum_n \int \frac{|\xi_n(\lambda)|}{x-\lambda} d\lambda$$

$$\geq c \sum_n \int |\xi_n(\lambda)| \, d\lambda, \tag{1.48}$$

para alguna constante $c > 0$. Aquí hemos usado que H y H_0 son operadores acotados. Ponemos,

$$\xi(\lambda) = \sum_n \xi_n(\lambda). \tag{1.49}$$

En consecuencia, $\xi(\lambda)$ es una función en $L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$.

Esto prueba la proposición.

Teorema 1.50 (Krein)

Sean H, H_0 operadores autoadjuntos acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tales que $V = H - H_0$ es un operador a traza. Para cada función ϕ continuamente diferenciable se tiene que $\Phi(H) - \Phi(H_0)$ es un operador a traza y se cumple la identidad

$$\operatorname{tr}[\Phi(H) - \Phi(H_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda \tag{1.51}$$

Demostración:

Denotemos por P_n polinomios en $(x\pm i)^{-2}$, $(x\pm i)^{-3}$, etc. El álgebra generada por los P_n separa puntos y por lo tanto combinaciones lineales de estos polinomios son densas en $C(K) = \{f\colon K \longrightarrow \mathbb{C} \mid f$ continua$\}$ para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$.

Tomemos $\{P_n\}$ una sucesión de polinomios convergiendo uniformemente a la función ψ que es igual a ϕ' en $K = \sigma(H) \cup \sigma(H_0)$ y cero fuera de una vecindad de K. Entonces,

$$\int_{t_0}^{t} P_n(x)dx \text{ converge uniformemente a } \psi(t).$$

para t en K.

Para polinomios, una derivación directa en (1.39) muestra que

$$\mathrm{tr}[\psi_n(H) - \psi_n(H_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\, P_n(\lambda)d\lambda \tag{1.52}$$

con

$$\psi_n(t) = \int_{t_0}^{t} P_n(x)dx \tag{1.53}$$

Por cálculo funcional, sabemos que

$$\psi_m(H) - \psi_m(H_0) = \int_C dz\, \psi_m(Z)[(Z-H)^{-1}-(Z-H_0)^{-1}]$$

donde C es un contorno cerrado conteniendo $K = \sigma(H) \cup \sigma(H_0)$ pero no conteniendo los puntos $\pm i$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\psi_m(H) - \psi_m(H_0)\|_1 &= \| \int_C dz\, \psi_m(Z)[(Z-H)^{-1}-(Z-H_0)^{-1}]\|_1 \\
&\le \int_C dz\, |\psi_m(Z)|\ \|(Z-H)^{-1}V(Z-H_0)^{-1}]\|_1 \\
&\le d(C,K)^{-2} \int_C dz\, |\psi_m(Z)| \cdot \|V\|_1 \\
&\le Md(C,K)^{-2} \int_C dz\, \|V\|_1 \\
&= M\ell(C)\ d(C,K)^{-2}\ \|V\|_1 .
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Aquí d(C,K) es la distancia de la curvatura C al compacto K y M es tal que $\|\psi_m\|_\infty \le M$.

Haciendo una estimación similar a la dada en (1.54) obtenemos que $\{\psi_m(H) - \psi_m(H_0)\}$ es una sucesión de Cauchy en la norma de traza. Por consiguiente, existe un operador a traza al cual esa sucesión converge. Pero además sabemos que la sucesión también converge en la norma de operadores a $\phi(H) - \phi(H_0)$. Como

$$\|A\| \le \|A\|_1 \tag{1.55}$$

para $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, se debe tener

$$\phi(H) - \phi(H_0) = \lim_{m\to+\infty} \psi_m(H) - \psi_m(H_0) \tag{1.56}$$

en la norma de traza. Entonces,

$$\mathrm{tr}[\phi(H)-\phi(H_0)] = \lim_{m\to+\infty} \mathrm{tr}[\psi_m(H)-\psi_m(H_0)] = \lim_{m\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda)\ P_m(\lambda)d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda)\ \phi'(\lambda)d\lambda \tag{1.57}$$

Aquí hemos usado $\xi(\lambda) \equiv 0$ para $\lambda \notin K$. Esto prueba el teorema.

CAPITULO II

1. Introducción

En este capítulo presentaremos las ideas principales del artículo de Jensen y Kato [2]. Sea $\Omega_e \subset \mathbb{R}^m$ un dominio exterior, es decir un conjunto abierto y conexo tal que $\Sigma = \mathbb{R}^m \setminus \Omega_e$ es no vacío y compacto, excepto cuando m = 1. Si m = 1, Ω_e es el complemento de un intervalo compacto Σ, que puede reducirse a un punto. Σ es llamado el obstáculo.

Sea H_e la realización autoadjunto de $-\Delta$ en $\underline{H}_e = L^2(\Omega_e)$ con la condición de frontera de Dirichlet. Resulta que $H_e \geq 0$ con $\underline{D}(H_e^{1/2}) = H'_1(\Omega_e)$ (el espacio de Sobolev). Sea H_0 la realización autoadjunta canónica de $-\Delta$ en $\underline{H} = L^2(\mathbb{R}^m)$, de forma que $H_0 \geq 0$ con $\underline{D}(H_0^{1/2}) = H^1(\mathbb{R}^m)$.

Se construirá la matriz S

$$S(\lambda) = S(\lambda; H_e, H_0), \quad 0 < \lambda < \infty \qquad (2.1.1.)$$

para el par $\{H_0, H_e\}$ y la fase de dispersión (total) $\theta(\lambda)$ dada por

$$\exp[2i\,\theta(\lambda)] = \det S(\lambda) \qquad (2.1.2.)$$

Como resulta que det $S(\lambda)$ existe y es continua, incluso analítica para $\lambda > 0$ y $|\det S(\lambda)| = 1$, (2.1.2) definirá a $\theta(\lambda)$ como una función continua a valores reales excepto por una constante $\nu\pi$ donde ν es un entero.

Los resultados principales del artículo son:

Teorema 2.1.

Suponga que $\sum$ es estrictamente de tipo estrella en el sentido de que $\partial\sum$ esta representado por una ecuación $|x| = f(\omega) > 0$, $\omega \in S^{m-1}$, con f continua. Entonces

$$-\lambda^{m/2}\theta(\lambda) = \Pi\, C_m|\textstyle\sum| + o(1) \quad \text{cuando } \lambda \longrightarrow \infty \qquad (2.1.3.)$$

donde $C_m^{-1} = (4\pi)^{m/2}\,\Gamma(m/2 + 1)$ y $|\sum|$ es la medida de Lebesgue de $\sum$.

Si además f es suave de clase C^2, entonces o(1) en (1.4) se puede escribir como $o((\log \lambda)^{-1})$.

Para obstáculos $\sum$ que no son de tipo estrella se tiene el resultado siguiente

Teorema 2.2.

Suponga que $\partial\sum$ es suave de clase C^2. Entonces

$$\int_0^\lambda |\theta(\mu) + \pi\, N(\mu)|d\mu = o\,(\lambda^{(m+1)/2}) \text{ cuando } \lambda \longrightarrow \infty$$

donde $N(\lambda)$ es el número de los eigenvalores que no exceden λ del problema de Dirichlet para el interior de $\sum$.

2. Estimaciones básicas y construcción de la matriz S.

En lo que sigue no se asumirá nada sobre la suavidad de $\partial\Omega_e = \partial\sum$ a menos que se explicite.

Para evitar la inconveniencia de que los operadores autoadjuntos H_0

y H_e actúan en espacios de Hilbert diferentes introducimos los siguientes operadores acotados en $\underline{H}$:

$$G_{0t} = e^{-tH_0} \ , \quad G_t = e^{-tH_e} \oplus 0 \ , \quad t > 0 \qquad (2.2.1)$$

donde $\oplus$ corresponde a la descomposición en suma directa

$$\underline{H} = H_e \oplus H_i \ , \quad \underline{H}_e = L^2(\Omega_e) \ , \quad H_i = L^2(\Sigma) \qquad (2.2.2)$$

Lema 2.2.1.

Sea $A = e^{-|x|}$ (operador de multiplicación). Entonces tenemos para $t > 0$ suficientemente pequeña

$$G_{ot} - G_t = A\, D_t A \quad \text{con} \quad D_t \in B_1(\underline{H}) \qquad (2.2.3)$$

donde $B_1(\underline{H})$ es la clase de operadores a traza. En particular $G_{0t} - G_t \in B_1(\underline{H})$.

Lema 2.2.2.

Si $\partial\Sigma$ es de clase C^2, entonces

$$0 \le \mathrm{tr}(G_{0t} - G_t) = (4\Pi t)^{-m/2}|\Sigma| + o(t^{-(m-1)/2}) \qquad t \downarrow 0$$

La prueba de estos lemas es puramente técnica y viene dada en el apéndice de [2]

Como $G_{0t} - G_t \in B_1(\underline{H})$ por el lema 2.2.1., los operadores de onda generalizados $W'_\pm = W_\pm(G_t, G_{0t})$ existen y son completos (ver capítulo 0). Como G_{0t} es espectralmente absolutamente continuo, $W'_\pm$ son isométricos en $\underline{H}$ con rangos idénticos al subespacio de continuidad absoluta $\underline{H}_{ac}$ de G_t. Como $G_t = 0$ en $\underline{H}_i = \underline{H} \ominus \underline{H}_e$, tenemos $\underline{H}_{ac} \subset \underline{H}_{e}$. Si notamos que el mapeo $e^{-\lambda t} \longrightarrow \lambda$ es monótono decreciente podemos concluir del principio de invariaciones que los operadores de onda $W_{\pm} = W_{\pm}(H_e, H_0; J)$ existen y son igual a $W'_{\pm}$ donde J es la proyección de $\underline{H}$ sobre $\underline{H}_{e}$. El operador de dispersión $S = W_{+}^{*} W_{-}$ existe y es un operador unitario en $\underline{H}$. La matriz $S(\lambda) = S(\lambda; H_e, H_0)$ es dada entonces como una descomposición en integral directa de S (el operador de dispersión). Ver capítulo 1 Prop. (1.17).

Más propiedades de $S(\lambda)$ serán deducidas del estudio de la función de Krein.

3. La función espectral de Krein.

Para un resumen de la teoría de Krein sobre la función espectral de defasajes referimos al capítulo 1.

Como $G_t - G_{0t} \in B_1(\underline{H})$ por el lema 2.2.1., la función espectral de defasajes

$$\xi_t(\mu) = \xi(\mu; G_t, G_{0t}), \qquad -\infty < \mu < \infty \tag{2.3.1}$$

está definida.

La función ξ_t toma valores reales y pertenece a $L^1(-\infty, \infty)$, además

$$\xi_t(\mu) = 0 \quad \text{para} \quad \mu \notin [0,1] \tag{2.3.2}$$

ya que los espectros de G_{ot} y G_t son subconjuntos de $[0,1]$.

Lema 2.3.1.

Existe una única ξ real valuada con las siguientes propiedades (Llamamos a ξ la función espectral de defasajes para $\mathfrak{D}$).

a) $\xi \in L^1_{loc}(-\infty,\infty)$, $\xi(\lambda) = 0$ para $\lambda < 0$.

b) Para cualquier $\phi \in C^\infty_0(-\infty,\infty)$, $(\phi(H_e)\oplus 0) - \phi(H_0)$ pertenece a $B_1(\underline{H})$ y tiene traza igual a $\int_0^\infty \phi'(\lambda)\xi(\lambda)d\lambda$.

c) $\xi(\lambda) = -\xi_t(e^{-\lambda t})$ para $\lambda > 0$, $t > 0$.

Demostración:

Primero notemos que (a) y (b) determinan a ξ de manera única. De hecho la diferencia η de cualesquiera dos ξ's con estas propiedades satisfará $\int_{-\infty}^\infty \phi'(\lambda)\eta(\lambda)d\lambda = 0$ para toda $\phi \in C^\infty_0(-\infty,\infty)$. Por lo tanto η resulta ser constante. Además como $\eta(\lambda) = 0$ para $\lambda < 0$ por (a) resulta ser la constante cero.

Para probar la existencia de ξ, es suficiente con fijar $t > 0$ y poner $\xi(\lambda) = -\xi(e^{-\lambda t})$ de manera que se satisface (c). Entonces (a) se sigue de (2.3.2). Para verificar (b) pongamos

$$\phi_1(\mu) = \phi(-t^{-1}\log\mu) \quad \text{para} \quad \mu > 0$$

$$\phi_1(\mu) = 0 \quad \text{para} \quad \mu \leq 0.$$

Entonces $\phi_1 \in C^\infty_0(-\infty,\infty)$ con el soporte de ϕ_1 contenido en $(0,\infty)$. Aplicación de (A.1.5) en el apéndice de [2] nos da

$$\operatorname{tr}[\phi_1(G_t) - \phi_1(G_{0t})] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1'(\mu)\ \xi_t(\mu)d\mu$$

Como $\phi_1(G_{0t}) = \phi(H_0)$ y $\phi_1(G_t) = \phi(H_e) \oplus 0$ obtenemos

$$tr[\phi(H_e) \oplus 0 - \phi(H_0)] = \int_0^1 \phi'(-t^{-1}\log \mu)\ (-t\mu)^{-1}\ \xi_t(\lambda)d\mu$$

$$= \int_0^{\infty} \phi'(\lambda)\ \xi(\lambda)d\lambda$$

donde se ha efectuado el cambio de variables $\mu = e^{-\lambda t}$. Con esto queda verificado (b).

Como consecuencia de la unicidad probada arriba se tiene que la ξ no depende de t.

Lema 2.3.2

La función $\xi(\lambda)$ es real-analítica en $\lambda > 0$.

Demostración:

En vista del Lema 2.3.1. (c) es suficiente mostrar que $\xi_t(\mu)$ es real-analítica en μ para $0 < \mu < 1$. Por (A.1.2) en el apéndice de [2] se tiene que $\xi_t(\mu)$ esta dada por

$$\xi_t(\mu) = \Pi^{-1} \lim_{z\to\mu+io} \arg \det[1 + (G_t-G_{0t})(G_{0t}-z)^{-1}] \qquad (2.3.3)$$

Debido a la factorización (2.2.3) podemos escribir

$$\xi_t(\mu) = \Pi^{-1} \lim_{z\to\mu+io} \arg \det[1 -D_tA(G_{0t}-z)^{-1}A] \qquad (2.3.4)$$

Pero

$$A(G_{0t}-z)^{-1}A = \int_0^{\infty} (e^{-\lambda t}-z)^{-1}\ M_0(\lambda)d\lambda,$$

donde $M_0(\lambda) = (d/d\lambda)\ A\ E_0(\lambda)A$, con $E_0(\lambda)$ la familia espectral para H_0. Como $M_0(\lambda)$ tiene una continuación analítica en una vecindad del eje real positivo se sigue que $A(G_{0t}-z)^{-1}A$ puede ser continuado analiticamente en z desde el semiplano superior a través del intervalo real (0,1). Denotamos la función analítica resultante por $Q^+_{0t}(z)$.

Como $D_t \in B_1(\underline{H})$ por Lema 2.2.1, $D_t Q^+_{0t}(z)$ es una función analítica con valores en $B_1(\underline{H})$ y $[1-D_t Q^+_{0t}(z)]^{-1}$ es meromorfa. En vista de 2.3.4 el lema estará probado si se muestra que esta función meromorfa no tiene polos en el intervalo $0 < \mu < 1$.

Como

$$[1 - D_t Q^+_{0t}(z)]^{-1} = 1 + D_t A(G_t - z)^{-1} \quad , \quad \mathrm{Im}\, z > 0 \qquad (2.3.6)$$

por la segunda ecuación para el resolvente, es suficiente con mostrar que

$$s - \lim_{z \to \mu + io} (z-\mu)[1 + D_t A(G_t - z)^{-1} A] = 0 \quad , \quad 0 < \mu < 1$$

pero esto es obvio porque $G_t = e^{-tH_e} \oplus 0$ no tiene eigenvalores positivos.

Incidentalmente hemos mostrado que

$$\xi_t(\mu) = \Pi^{-1} \arg \det[1 - D_t Q^+_{0t}(\mu)] \quad , \quad 0 < \mu < 1 \qquad (2.3.7)$$

donde el determinante nunca se anula.

Lema 3.3. (Ley de similitud)

Sea ξ^a la función espectral de defasajes para $a\Sigma$ (la dilatación de Σ por un factor $a > 0$). Entonces $\xi^a(\lambda) = \xi(a^2\lambda)$, $\lambda > 0$.

Demostración:

Sea U_a el operador unitario de dilatación:

$$U_a f(x) = a^{-m/2} f(a^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad f \in \underline{H}$$

Se puede ver que $U_a H_0 U_a^{-1} = a^2 H_0$ y $U_a H_e U_a^{-1} = a^2 H_e^a$, donde H_e^a es el operador exterior para el obstáculo a Σ. Nótese que H_e^a actúa en el subespacio $L^2(a\,\Omega_e) = U_a \underline{H}_e \subset \underline{H}$.

Así pues transformar por U_a manda $G_{0t} = e^{-tH_0}$ en G_{0s} con $s = a^2 t$ y $G_{0t} = e^{-tH_e} \oplus 0$ en G_s^a, de manera que

$$\det[1 - (G_{0t} - G_t)(G_{0t} - z)^{-1}] = \det[1 - (G_{0s} - G_s^a)(G_{0s} - z)^{-1}]$$

Se sigue de (2.3.3) que $\xi(\mu) = \xi_s^a(\mu)$, $0 < \mu < 1$. En vista del lema 2.3.1 (c) se obtiene

$$\xi^a(\lambda) = - \xi_s^a(e^{-\lambda s}) = - \xi_t(e^{-\lambda s}) = - \xi_t(e^{-\lambda a^2 t}) = \xi(a^2\lambda)$$

Q.E.D.

Lema 2.3.4

Si $m \geq 2$, $\xi(\lambda) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \downarrow 0$. Si $m = 1$ $\xi(\lambda) \longrightarrow 1/2$.

Demostración

Si $m = 1$, Σ es un intervalo con longitud $a > 0$.

Un cómputo directo muestra que

$$\xi(\lambda) = 1/2 + \pi^{-1} a \lambda^{1/2} \qquad (3.8)$$

y de aquí $\xi(\lambda) \longrightarrow 1/2$ si $\lambda \downarrow 0$.

Supongamos ahora que $m \geq 2$. En vista del lema 2.3.3 es suficiente mostrar que $\lim_{a\downarrow 0} \xi^a(\lambda) = 0$ para $\lambda > 0$ fijo. Lema A7.1 del apéndice de [2] muestra que $\|D_t^a\|_1 \longrightarrow 0$ cuando $a \downarrow 0$ para $t > 0$ fijo, donde D_t^a es el D_t para el obstáculo a Σ. Como $\xi^a(\lambda) = - \xi_t^a(e^{-\lambda t})$, el resultado deseado se sigue de (2.3.7).

Lema 2.3.5

Si $\partial\sum$ es suave (de clase C^2), entonces

$$t\int_0^\infty \xi(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda = (4\Pi t)^{-m/2}|\Sigma| + o(t^{-(m-1)/2}),\ t\downarrow 0 \qquad (2.3.9)$$

Demostración

El miembro izquierdo de (2.3.9) es igual a $-\int_0^1 \xi_t(\lambda)d\lambda = tr(G_{0t}-G_t)$

por (A1.3) del apéndice de [2]. Entonces (2.3.9) se sigue del Lema 2.2.2.

Q.E.D.

4. Prueba del Teorema 2.1.

De acuerdo con la teoría de Krein se tiene $\det S(\mu;G_t,G_{0t}) = \exp[-2\Pi i\xi_t(\mu)]$ para casi toda $\mu\in[0,1]$; donde $[0,1]$ es el espectro de G_{0t}, que es absolutamente continuo. Como

$$\det S(\mu;G_t,G_{0t}) = \det(\lambda;H_e,H_0)^{-1} \text{ para } \mu\in e^{-\lambda t}$$

por el principio de invariancia para el operador de dispersión obtenemos por (2.1.2) y lema 2.3.1 (c)

$$\exp[-2\Pi i\xi(\lambda)] = \exp[2i\Theta(\lambda)] \qquad (2.4.2)$$

para casi toda $\lambda\in(0,\infty)$

Como $\xi(\lambda)$ es continua (incluso analítica) en $\lambda\in(0,\infty)$ por lema 2.3.2. podemos poner

$$-\Theta(\lambda) = \Pi\xi(\lambda) \qquad 0<\lambda<\infty \qquad (2.4.3)$$

De hecho esta es una definición de Θ excepto por una constante indefinida inherente en Θ (vea sección 1). (2.4.3) implica, por

ejemplo, que $\Theta(\lambda) \longrightarrow 0$ cuando $\lambda \downarrow 0$ si $m \geq 2$ (véase lema 2.3.4).
Supongamos ahora que Σ es estrictamente de tipo estrella con $\partial\Sigma$ suave.

Por un teorema de monotonicidad (véase [17],[18]), $-\Theta(\lambda)$ es monótona creciente en λ de forma que lo mismo es cierto para $\xi(\lambda)$.
Por lo tanto $\xi'(\lambda) \geq 0$ y

$$\int_0^\infty \xi'(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda = t\int_0^\infty \xi(\lambda)e^{-\lambda t}d\lambda - \xi(+0)$$

$$= (4\Pi t)^{-m/2}|\Sigma| + o(t^{-(m-1)/2}), \quad t\downarrow 0$$

por lemas 2.3.4 y 2.3.5.

Se sigue de un teorema tauberiano de Freud [19] que

$$\xi(\lambda) = \xi(+0) + \int_0^\lambda \xi'(\lambda)d\lambda = C_m\,|\Sigma|\,\lambda^{m/2}[1 + o((\log\lambda)^{-1})]$$

con C_m como en el enunciado del teorema 2.1. En vista de (2.4.3), esto prueba la segunda parte del teorema 2.1.

La primera parte es probada aproximando Σ por obstáculos Σ_1, Σ_2 con frontera suave tal que $\Sigma_1 \subset \Sigma \subset \Sigma_2$ y $|\Sigma_1|$, $|\Sigma_2|$ arbitrariamente cerca de $|\Sigma|$; esto es posible porque Σ es estrictamente de tipo estrella. Como $-\Theta_1 \leq -\Theta \leq -\Theta_2$ por el teorema de monotonicidad mencionado arriba, el resultado deseado se sigue fácilmente de la segunda parte del teorema probado arriba.

5. Prueba del Teorema 2.2.

En lo sucesivo supondremos que Σ tiene frontera C^2, pero no necesariamente del tipo estrella; en particular Σ puede consistir en un número finito de partes separadas. El interior de $\sum$ es denotado por Ω_i.

Introducimos el operador autoadjunto

$$H_1 = H_e \oplus H_i \ , \qquad (2.5.1)$$

donde H_e es como antes y H_i es la realización autoadjunta de $-\Delta$ en $\underline{H}_i = L^2(\sum) = L^2(\Omega_i)$ con la condición de fontera de Dirichlet. Ponemos

$$G_{1t} = e^{-tH_1} = e^{-tH_e} \oplus e^{-tH_i} \qquad (2.5.2)$$

Lema 5.1.

Con $A = e^{-|x|}$ como en lema 2.2.1, tenemos

$$G_{0t} - G_{1t} = AD_{1t}A \quad \text{con} \quad D_{1t} \in B_1(H) \qquad (2.5.3)$$

$$\|D_{1t}\|_1 = o\ (t^{-(m-1)/2})\ , \quad t \downarrow 0$$

Para la prueba de este lema técnico ver A5.2. del apéndice de [2].

Ahora repetimos el argumento en la sección 3 con G_{1t} en lugar de G_t. Poniendo $\xi_{1t}(\mu) = \xi(\mu;\ G_{1t},\ G_{0t})$ y entonces $\xi_1(\lambda) = -\ \xi_{1t}(e^{-\lambda t})$, vemos que el lema 2.3.1 es cierto para $\xi_1(\lambda)$ con $\phi(H_e) \oplus 0$ en (b) reemplazado por $\phi(H_1)$. Sin embargo el lema 2.3.2 ya no resulta ser verdadero, ya que la función meromorfa $[1 - D_{1t}Q^+_{0t}(z)]^{-1}$ tiene polos en el eje real.

La relación entre ξ y ξ_1 puede ser deducida del lema 2.3.1. (b) y su análogo para ξ_1. Tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(\lambda)(\xi(\lambda)-\xi_1(\lambda))d\lambda = tr\{[(\phi(H_e)\oplus 0)-\phi(H_0)]-[\phi(H_1)-\phi(H_0)]\}$$

$$= tr[(\phi(H_e)\oplus 0)-\phi(H_1)]$$

y como $\phi(H_i \oplus H_e) = \phi(H_i) \oplus \phi(H_e)$ se tiene

$$= -\, tr(0 \oplus \phi(H_i)) = -\, tr\ \phi(H_i)$$

Como H_i tiene solo aspecto discreto acotado por abajo y como $\phi \in C_0^{\infty}(-\infty,\infty)$ es arbitraria, se sigue que $\xi(\lambda) - \xi_1(\lambda) = N(\lambda)$ es el número de eigenvalores de H_i que no exceden λ. Así tenemos por (2.4.3)

$$\xi_1(\lambda) = -\,N(\lambda) + \xi(\lambda) = -\,N(\lambda) - \Pi^{-1}\,\Theta(\lambda) \qquad (2.5.4)$$

Para completar la prueba del teorema 2.2, es suficiente con mostrar que

$$\int_0^{\lambda} |\xi_1(\mu)|d\mu = O(\lambda^{(m+1)/2}),\quad \lambda \longrightarrow \infty \qquad (2.5.5)$$

Para esto usamos la estimación

$$\int_0^{\infty} |\xi_{1t}(\mu)|d\mu \le \|G_{0t}-G_{1t}\|_1 = o(t^{-(m-1)/2})\ t \downarrow 0 \qquad (2.5.6)$$

que se sigue de (2.5.3) y de A1.3 en el apéndice de [2]

Como $\xi_1(\lambda) = -\ \xi_{1t}(e^{-\lambda t})$ obtenemos

$$\int_0^{\infty} |\xi_1(\mu)|\ e^{-\lambda t}\ d\lambda = o(t^{-(m+1)/2}) \qquad (2.5.7)$$

Pero el miembro izquierdo de (2.5.7) es más grande que

$$e^{-1}\int_0^{t^{-1}} |\xi_1(\lambda)|\ d\lambda$$

Así el resultado deseado (2.5.5) se sigue poniendo $t = \lambda^{-1}$.

6. Conclusión

En teoremas 2.1 y 2.2 se han demostrado formulas que nos dan el comportamiento asintótico de la fase de dispersión (total) $\Theta(\lambda)$ para el caso de obstáculos Σ estrictamente de tipo estrella y para obstáculos tales que su fontera es de clase C^2 respectivamente.

La prueba de muchos de los lemas usados para demostrar los teoremas es muy técnica ya que se trata de estimar los núcleos o kerneles de la ecuación del calor. Para el lector interesado en ver todos los detalles le sugerimos leer con cuidado el apéndice de Jensen y Kato [2].

Notas al pie de página

(1) A. Majda; J. Ralston, "An analogue of Weyl's Theorem for Unbounded Domains I", Duke Mathematical Journal, Vol. 45 No. 1 (1978), 183-196.

(2) A. Jensen; T. Kato, "Asymptotic Behavior of the Scattering Phase for Exterior Domains", Comm. In Partial Differential Equations, 3(12), (1978), 1165-1195.

(3) R. Weder, "Scattering Theory for High Order Operators in Domains with Infinite Boundary", J. Funct. Anal. 57, (1984), 207-231.

(4) R.B. Melrose, "Forward Scattering by a Convex Obstacle", Preprint, 1979, M.I.T.

(5) Lax, P.; Phillips, R., "Scattering theory". Academic Press, New York - London 1967.

(6) $S(\lambda^{1/2})$ es llamada la función de Krein en la teoría desarrollada por Birman y Krein.

(7) L.A. Sakanovich, "The invariance principle for generalized wave operators", Functional Anal. Appl. 5 (1971), 49-55.

(8) M.G. Krein, "Perturbation determinants and a formula for the traces of unitary and self-adjoint operators", Dokl. Akad. Nauk SSSR 144(1962), 268 Soviet Math. Dokl. 3(1962), 707.

(9) R. Weder, "Scattering Theory for High Order Operators in Domains with Infinite Boundary", Journal of Functional Analysis 57, (1984), 207-231.

(10) Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y T un operador lineal acotado. Sea $|T| = (T^*T)^{1/2}$. Decimos que T es a traza,

$T \in L_1(\mathcal{H})$, si dada una base ortonormal $\{e_j\}_{i=1}^{+\infty}$ de $\mathcal{H}$, tenemos que $\sum_{j=1}^{+\infty} (e_j, |T| e_j) < +\infty$. T es llamado de Hibert-Schmidt, si T^*T es a traza. $L_2(\mathcal{H})$ denota el espacio de estos operadores.

(11) W.O. Amrein; Non-relativistic quantum dynamics. Dordrecht, Netherlands: Reidel, 1981.

(12) Un operador $T \in L(\mathcal{H})$ (T acotado) es llamado compacto si y sólo si para cada sucesión acotada $\{x_n\}$, $\{Tx_n\}$ tiene una subsucesión convergente. $L_\infty(\mathcal{H})$ denota el conjunto de operadores compactos.

(13) W. Thirring; Quantum Mechanics of Atoms and Molecules. Springer-Verlag, New-York Wien. 1981.

(14) H. Baumgärtel, M. Wollenberg; Mathematical Scattering Theory. Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, 1983.

(15) Se dice que una función f de un espacio X con medida μ a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable $f: X \to \mathcal{H}$ es medible si $(y, f(x))_{\mathcal{H}}$ es medible para cada $y \in \mathcal{H}$. Puesto que

$$\sup_{y \in \mathcal{H}} (y, f(x))_{\mathcal{H}} = \|f(x)\|^2_{\mathcal{H}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (e_n, f(x))_{\mathcal{H}} (e_n, g(x))_{\mathcal{H}} = (f(x), g(x))_{\mathcal{H}},$$

donde $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}$, esto implica que $\|f(x)\|^2$ y $(f(x), g(x))_{\mathcal{H}}$ son entonces también medibles. $L^2(x, d\mu; \mathcal{H})$ se define como el conjunto de todas las funciones medibles sobre X a valores en $\mathcal{H}$ que satisfacen $\int_x \|f(x)\|^2_{\mathcal{H}} \, d\mu(x) < +\infty$.

(16) K. Asano, "Notes on Hilbert transforms of vector valued functions in the complex plane and their boundary values". Proc. Japan Acad., Ser. A. Math. Sci. 43, (1967), 572-577.

(17) Helton J.W. y J.V. Ralston "The first variation of the Scattering Matrix" Journal of Differentail Equations 21, 378-394 (1976).

(18) Kato T. "Monotonicity theorems in scattering theory", Hadronic J. 1 (1978) 134-154.

(19) G. Freud, "Resglied eines taubersochen Stazes" I, Acta Math. Acad. Sci. Hungar 2 (1951), 299-308.