APORTACIONES MATEMATICAS 5

COMUNICACIONES

PROGRAMA DEL XX CONGRESO NACIONAL DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

MEMORIAS □ XALAPA, MEXICO □ 1987

EDITADAS POR M.A. AGUILAR, L. SALMERON Y C. VARGAS

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA
1988

Aportaciones Mátemáticas
Comunicaciones 5 (1988) 351-360

Inestabilidad del espectro singularmente continuo de operadores diferenciales ordinarios

Rafael René del Río Castillo

Abstract Se enuncia un resultado que muestra que existe un potencial q tal que una realización autoadjunta de $lu = -u'' + q(x)u$ tiene espectro singularmente continuo en un intervalo I mientras que todas las realizaciones autoadjuntas de $\tilde{l}u = -u'' + \{q(x) + v(x)\}u$ tienen solo espectro absolutamente continuo en I, donde v es una función continua con soporte compacto.

1. Introducción

Consideremos la expresión diferencial

$$(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\ u(x) \quad x \in [0, \infty) \tag{1}$$

donde q es una función a valores reales.

Esta expresión genera un operador autoadjunto L_α para cada $\alpha \in [0, 2\pi)$ así:

$$L_\alpha u = lu$$

Cada operador está definido en

$$D(L_\alpha) = \{u \in L_2(0,\infty) | u, u' \text{ absolutamente continuas, } lu \in L_2(0,\infty) \text{ y}$$
$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0\}.$$

El operador L_α es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por la variable en $L_2(\mathrm{R}, d\rho)$, donde R es el conjunto de números reales y ρ es una medida generada por una función no decreciente que denoto igual $\rho : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ y que se llama función espectral. Las integrales en $L_2(\mathrm{R}, d\rho)$ son integrales de Lebesgue-Stieltjes.

El conjunto $\{z \in C | (L_\alpha - z)^{-1}$ existe y es continuo$\}$ se llama el resolvente de L_α, donde C denota el conjunto de los numeros complejos. Al complemento en C del resolvente se le llama el espectro de L_α y se denota $\sigma(L_\alpha)$. Resulta que el espectro de L_α es subconjunto de R y consiste de aquellos puntos donde la función espectral ρ es estrictamente creciente. Los eigenvalores de L_α son los puntos del espectro donde ρ es discontinua.

Uno de los problemas básicos en la teoría de los operadores diferenciales lineales es la investigación del comportamiento del espectro en relación con el comportamiento de los coeficientes de la expresión diferencial. Así pues interesa ver como se altera la medida ρ cuando modificamos el coeficiente $q(x)$ y viceversa. (Problema directo e inverso).

Dado que la interpretación física del problema cuando la medida ρ es singularmente continua no es clara, se ha buscado ver bajo que condiciones sobre el potencial $q(x)$ la medida ρ resulta ser absolutamente continua.

2. Una conjetura

En [5] J. Weidmann probó que si el coeficiente $q(x)$ de (1) satisface ciertas condiciones en el intervalo (c,∞), con $c \in (0,\infty)$, entonces L_α tiene solamente espectro absolutamente continuo en $(0,\infty)$, es decir la función espectral asociada con L_α es absolutamente continua en $(0,\infty)$, para toda $\alpha \in [0,2\pi]$.

Este resultado parece indicar que la continuidad absoluta de la función espectral sólo depende del comportamiento del potencial $q(x)$ para $x > c$. Esto sugiere la siguiente conjetura (debida esencialmente a J. Weidmann [4]): Sea l una expresión diferencial formalmente autoadjunta en (a,b) y A una realización autoadjunta de l. Para $c \in (a,b)$ supongamos que cada realización autoadjunta A_b de l en (c,b) tenga solamente espectro absolutamente continuo en $(\overline{\lambda},\underline{\lambda})$. Entonces A tiene también solamente espectro absolutamente continuo en $(\overline{\lambda},\underline{\lambda})$. Sin embargo se probó en [1] que esta conjetura es falsa.

La conjetura puede ser reescrita como sigue si suponemos que $a = 0$ es un punto regular (ver [3] la para definición de este último).

Si el operador $\tilde{L}_\beta$ generado por

$$\tilde{l}u = -u'' + \tilde{q}(x)u \quad x \in [0,\infty)$$

donde $\tilde{q}(x) := q(x+c)$, y la condición de frontera

$$u(0)\cos\beta + u'(0)\sin\beta = 0$$

tiene solamente espectro absolutamente continuo en un intervalo I para toda $\beta \in [0,2\pi)$, entonces el operador L_α generado por

$$lu = -u'' + q(x)u \quad x \in [0,\infty)$$

y

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$$

tiene también solamente espectro absolutamente continuo en I.

Aquí $\tilde{q}$ puede ser considerado como una perturbación de q y en general no existirá $p \in (0, \infty)$ tal que $\tilde{q}(x) = q(x)$ para $x > p$. Es decir, la perturbación $\tilde{q}$ afecta a q hasta el infinito.

Hagamos ahora la misma conjetura, pero para perturbaciones realmente locales, es decir, tales que $\tilde{q}(x) = q(x)$ para $x > p$ donde p es algún punto en $(0, \infty)$. Para esto supongamos que

$$\tilde{q}(x) := q(x) + v(x) \qquad \text{donde}$$

$v(x)$ es una función continua con soporte S compacto, $S \subset (0, p)$. ¿Será cierta la conjetura?

En [4] D. B. Pearson construye un potencial $q(x)$ que da origen a espectro singularmente continuo. El potencial $q(x)$ consiste de un número infinito de chipotes o "bumps" que se separan más entre más se alejan del origen. El comportamiento de estos chipotes al infinito es decisivo para la prueba en [4] de que el espectro es singularmente continuo. Esto parecería sugerir que la conjetura es cierta.

3. Enunciado del resultado principal

Construyamos primero un operador L con espectro singularmente continuo de la siguiente forma:

Sean $\rho_i : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ $\quad i = 1, 2$, funciones no decrecientes tales que

a) ρ_1 es absolutamente continua en el intervalo $I \subset \mathrm{R}$,

$$\left.\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right|_{\lambda \in I} \geq N > 0,$$

y ρ_2 singularmente continua en I.

b) La función $\rho := \rho_1 + \rho_2$ satisface las hipótesis del teorema de Gelfand-Levitan.

(véase [3]).

El inciso b) implica la existencia de un operador diferencial L con función espectral ρ, definido a través de la expresión diferencial

$$(lu)(x) = -u''(x) + q_o(x)u(x) \quad 0 \leq x < \infty$$

donde $q_0 : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ es continua, y la condición de frontera

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$$

El operador L es exactamente el operador L_0 utilizado en la sección 3 de [1].

Sea $v : \mathrm{R}^+ \to \mathrm{R}$ una función continua con soporte compacto $S \subset \mathrm{R}^+$.

Definamos el operador autoadjunto $\tilde{L}$ como el generado por la expresión diferencial

$$\tilde{l}u = -u'' + \{q_o(x) + v(x)\}u \qquad x \in [0, \infty)$$

y la condición de frontera

$$u(0)\cos\beta + u'(0)\sin\beta = 0 \qquad \beta \in [0, 2\pi)$$

Escojamos $p \in \mathrm{R}$ tal que $S \subset [0, p)$.

Definamos el operador L_α como el operador generado a través de la expresión diferencial

$$lu = u'' + q_o(x)u \qquad x \in [0, p]$$

y las condiciones de frontera

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$$

$$u(p) = 0$$

Análogamente definamos el operador L_β como el operador generado por la expresión diferencial

$$\tilde{l}u = -u'' + \{q_o(x) + v(x)\}u \qquad x \in [0,p]$$

y las condiciones de frontera

$$u(0)\cos\beta + u'(0)\sin\beta = 0$$

$$u(p) = 0 \qquad \beta \in [0, 2\pi)$$

Los operadores L_α y L_β son operadores autoadjuntos generados por expresiones diferenciales que son regulares en $[0,p]$ lo cual implica que su espectro consiste únicamente de eigenvalores aislados.

Nuestro resultado principal es el siguiente

Teorema Si L_α y L_β no tienen exactamente el mismo espectro, entonces el operador $\tilde{L}$ tiene solamente espectro absolutamente continuo en I.

Si recordamos que el operador L tiene por construcción espectro singularmente continuo en I, el teorema nos dice que si la perturbación local $v(x)$ satisface cierta condición, entonces el espectro singularmente continuo desaparece y tenemos solamente espectro absolutamente continuo.

La idea de la prueba es la siguiente. Sea $\tilde{\rho}$ la función espectral del operador $\tilde{L}$. A la medida generada por esta función también la denotamos por $\tilde{\rho}$. Se quiere demostrar que $\tilde{\rho}$ es absolutamente continua. Primero se prueba que $\tilde{\rho}$ es continua lo cual se sigue de que $\tilde{l}u = \lambda u$ no tiene soluciones en L_2.

Ahora sea $E_\infty \subset I$ el conjunto de puntos $\lambda \in I$ donde $\tilde{\rho}\prime(\lambda) = \infty$, (la tilde denota derivada). Se demuestra que E_∞ es un conjunto finito y aquí reside la dificultad principal del teorema.

Una vez que se sabe que $\tilde{\rho}$ es continua y E_∞ finito, usando un teorema de de la Vallée Poussin que dice que para cualquier conjunto $X \subset I$ medible se tiene

$$\tilde{\rho}(X) = \tilde{\rho}(X \cap E_\infty) + \int_X \tilde{\rho}\prime(x)dx$$

se concluye que $\tilde{\rho}$ es absolutamente continua.

También se prueba que existen perturbaciones $v(x)$ que satisfacen las condiciones del teorema y por consiguiente la conjetura es falsa.

4. Observación

Si L es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert H, (en nuestro caso $H = L_2(0,\infty)$), sabemos por el teorema espectral (ver [2] pag. 360) que existe una familia de proyecciones $\{E(\lambda)\}$, llamada familia espectral, tal que

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda)$$

Dado $u \in H$ fijo, la familia espectral determina una medida $m_u(.)$ así:

$$m_u(S) = < E(S)u, u > = \|E(S)u\|^2$$

donde S es un conjunto de Borel y $< .,. >$ denota el producto interno de H.

Sean

$$H_c = \{u \in H | m_u(\cdot)\text{es continua}\}$$

$$H_{ac} = \{u \in H | m_u(\cdot)\text{es absolutamente continua}\}$$

$$H_{sc} = H_c \cap H_{ac}^{\perp}$$

En la definición clásica de Kato (ver [2]) se define el espectro absolutamente continuo

$$\sigma_{ac}(L) = \sigma(L|_{H_{ac}})$$

y análogamente el espectro singularmente continuo

$$\sigma_{sc}(L) = \sigma(L|_{H_{sc}})$$

Si $H_{ac} = H$ se dice que L es absolutamente continuo.

En este trabajo cuando hemos hablado de que un operador L tiene solamente espectro absolutamente continuo en I nos referimos a que la función espectral ρ asociada a L es absolutamente continua. Esto es equivalente a decir que $m_u(\cdot)$ es absolutamente continua en I para para toda $u \in H$ y también equivalente a la afirmación $I \subset \sigma_{ac}(L)$ y $I \cap \sigma_{sc}(L) = \emptyset$.

Así pues, el teorema enunciado arriba afirma que $\sigma_{sc}(L) \cap I \neq \emptyset$ y $\sigma_{sc}(\tilde{L}) \cap I = \emptyset$, esto es el espectro singularmente continuo es inestable. Sin embargo es fácil probar que $I \subset \sigma_{ac}(L)$ y $I \subset \sigma_{ac}(\tilde{L})$, es decir el espectro absolutamente continuo no se perturba. De hecho resulta que σ_{ac} es estable bajo una clase amplia de perturbaciones.

Conclusión. Sólo el comportamiento del potencial $q(x)$ al infinito no determina la continuidad absoluta de los operadores autoadjuntos generados por (1).

Referencias

[1] R. R. del Río Castillo. Ein Gegenbeispiel zur Stabilität des absolut stetigen Spektrum genvöhnlicher Differential operatoren. Math. Z. 197 (1988), 61-68, Springer Verlag.

[2] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer-verlag. New York Inc. 1966.

[3] M. A. Naimark. "Linear Differential Operators" Part II. Frederick Ungar Publishing Co. New York, 1967.

[4] D. B. Pearson. Singular Continuous Measures in Scattering Theory. Commun. Math. Phys. 60 (1978) 13,36.

[5] J. Weidmann. Absolut stetiges Spektrum bei Sturm Liouville Operatoren und Dirac-Systemen. Math. Z. 180 (1982), 423-427, Springer Verlag.

Rafael del Río Castillo

IIMAS-UNAM

Apdo. Postal 20-726

01000 México, D. F.