33.

SERIE MONOGRAFÍAS

SEÑALAMIENTOS METODOLÓGICOS Y DIDÁCTICOS AL TEMA: PROBLEMAS INVERSOS DE LA TEORÍA ESPECTRAL DE OPERADORES DE DIMENSIÓN FINITA

VLADIMIR A. MARCHENKO Y TATIANA V. MISYURA
(TRADUCCIÓN HECHA POR: MIKHAIL KUDRYAVTSEV)

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS

Serie Monografías

Los trabajos publicados en esta serie son estudios específicos de las distintas disciplinas que se cultivan en el IIMAS. Incluye, también, material desarrollado para impartir algunas cátedras, que tenga la intención de convertirse en libro de texto.

Responsable de la edición: Lic. María Ochoa
Apoyo editorial: Sara Garduño Antonio
Primera edición: octubre de 2004
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM
Circuito Escolar, Ciudad Universitaria
Serie Monografías. Volumen 12, No. 28, octubre de 2004
ISBN Obra Completa: 968-36-2035-3
ISBN: 970-32-1916-0

Impreso y hecho en México

Índice

Presentación

Esta monografía presenta la traducción de las notas del curso impartido por el Prof. Vladimir A. Marchenko durante 1987 en la Universidad Estatal de Jarkov, Ukrania. A estas notas se agrega un apéndice que forma parte de otro curso dictado por el mismo profesor en 1995. La traducción fue hecha por el Dr. Mikhail Kudryavtsev, quien fue alumno del Prof. Marchenko, y se contó con la colaboración del Prof. Guillermo Gómez de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

El Dr. Kudryavtsev escribió su tesis doctoral con el título: "Problemas inversos para operadores en diferencias en física matemática" bajo la dirección del Prof. Marchenko, en la citada universidad y el Instituto B.I. Verkin de Física de Bajas Temperaturas e Ingeniería también en Jarkov. El Dr. Kudryavtsev llegó a México en noviembre de 2001 para llevar a cabo una estancia posdoctoral en el Departamento de Métodos Matemáticos y Numéricos del IIMAS.

En cuanto se incorporó a este Instituto, el Dr. Kudryavtsev impartió un curso de posgrado sobre aspectos básicos de las ecuaciones en diferencias, basado en las notas del curso que había llevado con el Prof. Marchenko en 1987. Yo fui uno de los alumnos del Dr. Kudryavtsev. Me llamó la atención la sencillez con la cual se introdujeron las matrices finitas de Jacobi, los polinomios ortogonales asociados y la función espectral, además de la pertinente motivación física y la casi inexistente necesidad de prerrequisitos. El curso podía ser entendido casi en su totalidad por estudiantes con sólo conocimientos básicos de álgebra lineal y cálculo.

La teoría espectral de operadores de Jacobi ha sido tratada en textos clásicos como [2], [6], [9], y recientemente en [8] y [10]. El texto que ahora se presenta está dedicado al estudio de matrices finitas de Jacobi con especial énfasis en problemas inversos. Para referencias sobre este tipo de matrices véanse los artículos citados en [7], particularmente los escritos por H. Hochstadt. Existe el proyecto por parte de los autores de publicar un libro sobre estos temas que posiblemente incluirá varios de los asuntos tratados aquí.

Quiero agradecer a los profesores Guillermo Gómez y a Luis Silva del IIMAS-UNAM por haber revisado estas notas y ayudado en su redacción, a María Ochoa de la Unidad de Publicaciones y Difusión del IIMAS por su valiosa cooperación, a Mikhail Kudryavtsev por haber efectuado la traducción y a los autores Vladimir A. Marchenko y a Tatyana V. Misyura por haber permitido la publicación de esta obra a través del IIMAS. Estoy convencido que la presente monografía es una aportación valiosa a la literatura matemática en español.

Rafael del Río.

Breve semblanza del Prof. Vladimir A. Marchenko

El Prof. Vladimir A. Marchenko (nacido en 1922, Jarkov, URSS) es un notable matemático ruso, que trabaja en problemas de la física matemática, análisis matemático y ecuaciones diferenciales. Se conocen muy bien sus trabajos en el análisis espectral de los operadores diferenciales, sobre todo los resultados relacionados con los problemas inversos para los operadores diferenciales unidimensionales. Caracterizó los datos de dispersión del operador de Schrödinger con el potencial decreciente y resolvió completamente el problema inverso de dispersión utilizando una ecuación lineal integral (ecuación de Marchenko). También resolvió los problemas directo e inverso para el operador de Schrödinger con potencial periódico en todo el eje, así como el problema correspondiente a la ecuación de Korteveg de Vries. Propuso un nuevo método para construir las soluciones de ecuaciones no-lineales de evolución, basado en las ideas de álgebras de operadores lineales. Los trabajos de Marchenko (junto con L. Pastur) iniciaron una nueva rama de las matemáticas al estudiar conjuntos de matrices aleatorias. También planteó y resolvió problemas de frontera con frontera de grano fino (junto con Ye. Khruslov).

Señalamientos metodológicos y didácticos al tema: "Problemas inversos de la teoría espectral de operadores de dimensión finita"

MARCHENKO Vladimir Aleksandrovich *

MISYURA Tatyana Vladimirovna **

Señalamientos generales

La mayoría de los problemas matemáticos pueden clasificarse en dos grupos: los problemas directos y los inversos.

En los problemas directos hay que determinar el desarrollo del proceso, si se conocen las leyes (ecuaciones) que lo regulan y los parámetros que caracterizan el sistema considerado. Frecuentemente, tales problemas se reducen a la resolución de ciertas ecuaciones (por regla general diferenciales) y la dificultad básica consiste en resolver dichas ecuaciones.

Los problemas inversos (en sentido restringido) surgen cuando los parámetros del sistema no son conocidos y se plantea determinarlos con base en tales o cuales características del proceso en desarrollo. Bajo este planteamiento hay ocasiones que estas características se encuentran del experimento y otras veces a partir de razonamientos constructivistas.

Por ejemplo, en los problemas inversos de la geofísica con base en las observaciones de la dispersión de oscilaciones en la corteza terrestre, se plantea el problema del reestablecimiento de sus propiedades (los parámetros del sistema). Durante la construcción de mecanismos reiteradamente se necesitan escoger sus parámetros de manera que las frecuencias de las oscilaciones propias pertenezcan a ciertos intervalos dados.

En los ejemplos presentados se ve cómo los problemas inversos no son menos importantes que los problemas directos. Sin embargo, un algoritmo general para resolver problemas inversos no existe. Por ello, es muy común que para resolver un problema inverso se tenga que resolver múltiples veces el problema directo bajo diferentes valores de los parámetros y del gran número de soluciones obtenidas se escoge la que sea más cercana a los datos experimentales (o deseables).

Un papel singular juegan los problemas inversos de la teoría espectral de operadores. En ellos se plantea, para una clase dada de operadores, hallar aquellas de sus propiedades

---

*Universidad Estatal de Jarkov, Ciudad de Jarkov.

**Departamento de Matemáticas, Universidad de Toronto.

espectrales, las cuales unívocamente determinan al operador y dar un método para su construcción. Estos problemas son importantes, tanto desde el punto de vista de las aplicaciones (a la mecánica cuántica, geofísica, teoría de oscilaciones), como desde el punto de vista de la matemática pura. Para una serie de tales problemas ha sido posible elaborar métodos generales de solución y ha resultado que el aparato matemático desarrollado, con dicho fin, encuentra inesperadas aplicaciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales no lineales de evolución.

Estos señalamientos metodológicos están dedicados a los problemas inversos de la teoría espectral de operadores que actuan en espacio de dimensión finita. En ellos se exponen, detalladamente, el planteamiento y la solución de los problemas inversos básicos para matrices simétricas tridiagonales finitas (matrices de Jacobi). Esto permite exponer todas las ideas básicas y los métodos de resolución de los problemas inversos de la teoría espectral de la manera más transparente, es decir, sin las dificultades analíticas.

La exposición se lleva, en la medida de lo posible, en un plano elemental y contiene un número suficientemente grande de problemas y ejercicios que permiten una mejor comprensión y complementan el material básico.

1. Ecuaciones de las oscilaciones libres de un sistema de masas puntuales

Considérese el sistema formado por N masas puntuales $m_0, m_1, \ldots, m_{N-1}$ (Figura 1.1) unidas por resortes ideales sin peso, con coeficientes de elasticidad $k_0, k_1, \ldots, k_N$, cuyas longitudes en estado de equilibrio son $l_0, l_1, \ldots, l_N$. La suma de las longitudes de los resortes se denota por $\sum_{i=0}^{N} l_i = L_0$

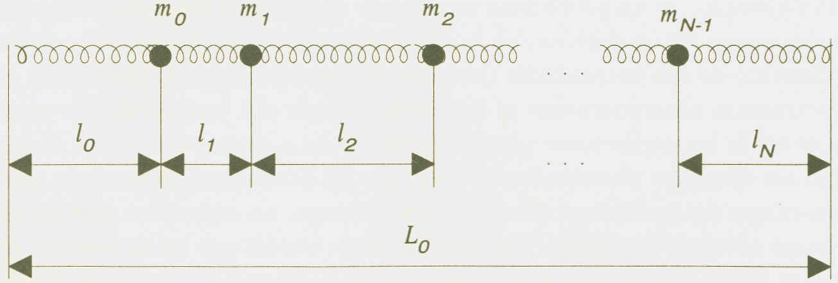

Figura 1.1

Estírese este sistema hasta una longitud L_1 y fíjese el extremo izquierdo de dicho sistema, esto es del resorte de longitud l_0 y también el extremo derecho del resorte l_N.

Para describir la posición del sistema se introduce un sistema de coordenadas. Diríjase el eje horizontal x a lo largo de los puntos de fijación del sistema y tómese como origen

de coordenadas al extremo izquierdo del resorte de longitud l_0 (Figura 1.2). Entonces el punto de fijación del extremo derecho será el correspondiente a la longitud L_1 desde el origen.

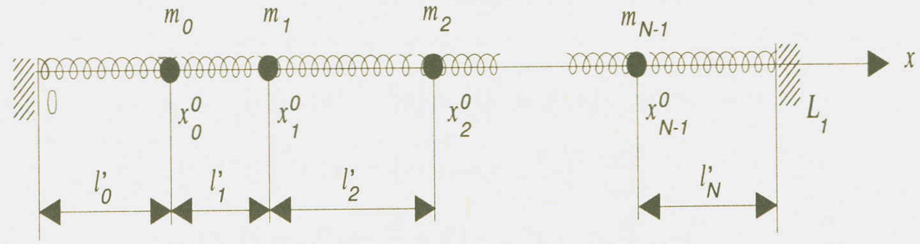

Figura 1.2

Para hallar las coordenadas $x_0^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{N-1}^0$ de las masas en estado de equilibrio, considérese el i-ésimo resorte. Su longitud, una vez estirado, es igual a $x_i^0 - x_{i-1}^0$, es decir su elongación relativa es: $\dfrac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i}$. Por la ley de Hooke el i-ésimo resorte actúa sobre la masa m_i con una fuerza igual a:

$$-k_i \frac{x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i}{l_i},$$

mientras que el $(i+1)$-ésimo con la fuerza:

$$k_{i+1} \frac{x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Dado que el sistema lo estamos suponiendo en equilibrio, entonces la suma resultante de las fuerzas que actúan sobre las masas m_i tendrán que ser 0, es decir, la suma

$$-\frac{k_i}{l_i}(x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(x_{i+1}^0 - x_i - l_{i+1}) = 0 \quad (\text{con } i = \overline{0, N-1}), \tag{1.1}$$

donde $x_{-1}^0 = 0$ (el punto de amarre del extremo izquierdo) y $x_N^0 = L_1$ (el punto de fijación del extremo derecho).

Es así que hemos obtenido un sistema de N ecuaciones lineales respecto de $x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{N-1}^0$, el cual al ser resuelto determina las coordenadas de las masas m_i en estado de equilibrio (véase el ejercio uno de esta sección).

Considérese ahora el movimiento de este sistema, bajo la hipótesis de que dos puntos de fijación del sistema permanecen fijos, y las masas pueden desplazarse a lo largo del eje x. Denotemos mediante $u_i(t)$ el desplazamiento de la masa m_i de su posición de equilibrio x_i^0 al tiempo t. (Así, las coordenadas de las masas m_i al momento t son iguales a $x_i^0 + u_i(t)$).

Dado que las $x_i^0 (i = \overline{0, N-1})$ son conocidas, entonces para describir la posición del sistema es suficiente con saber la perturbación $u_i(t)$. Nótese que en la posición de equilibrio $u_i(t) = 0 \quad i = \overline{0, N-1}$.

Al sacar al sistema de su posición de equilibrio la fuerza que actúa sobre la masa m_i será igual (considerando las igualdades de (1.1))

$$\begin{aligned} F_i = & - \frac{k_i}{l_i}\Big[\big(x_i^0 + u_i(t)\big) - \big(x_{i-1}^0 + u_{i-1}(t)\big) - l_i\Big] + \\ & + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\Big[\big(x_{i+1}^0 + u_{i+1}(t)\big) - \big(x_i^0 + u_i(t)\big) - l_{i+1}\Big] = \\ & - \frac{k_i}{l_i}(x_i^0 - x_{i-1}^0 - l_i) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}(x_{i+1}^0 - x_i^0 - l_{i+1}) - \\ & - \frac{k_i}{l_i}\big(u_i(t) - u_{i-1}(t)\big) + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\big(u_{i+1}(t) - u_i(t)\big) = \\ & = \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} u_{i+1}(t) - \left(\frac{k_i}{l_i} + \frac{k_{i+1}}{l_{i+1}}\right) u_i(t) + \frac{k_i}{l_i} u_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Y por la segunda ley de Newton:

$$F_i = m_i w_i = m_i \frac{d^2}{dt^2}\big(x_i^0 + u_i(t)\big) = m_i \ddot{u}_i.(t).$$

y sustituyendo a F_i por la expresión (1.2) se obtiene el sistema de ecuaciones respecto a $u_i(t)$:

$$\alpha_{i+1} u_{i+1}(t) - (\alpha_{i+1} + \alpha_i) u_i(t) + \alpha_i u_{i-1}(t) = m_i \ddot{u}_i(t), \tag{1.3}$$

donde $\alpha_i = \frac{k_i}{l_i} = \text{const.}, i = \overline{0, N-1}, u_{-1}(t) = u_N(t) = 0$.

Introduciendo la notación adicional:

$$\vec{u}(t) = \big(u_0(t), u_1(t), \ldots, u_{N-1}(t)\big),$$

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & m_i & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & m_{N-1} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\alpha_1 & \alpha_2 + \alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_N + \alpha_{N-1} \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

el sistema puede reescribirse como:

$$\frac{d^2}{dt^2} M\vec{u}(t) = -A\vec{u}(t). \tag{1.5}$$

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Hallar las coordenadas de las masas del sistema, descrito en esta sección, en su estado de equilibrio $(x_0^0, x_1^0, \ldots, x_{N-1}^0)$.
2. Comprobar que la forma cuadrática (Au, u) es positiva (A tiene forma (1.4)).
3. Deducir la ecuación de las oscilaciones del sistema de masas, representado en la Figura 1.3. Las masas pueden deslizarse sin fricción a lo largo del anillo de alambre.
4. Deducir el sistema de ecuaciones que describe las oscilaciones del sistema, análoga a la de la Figura 1.2, pero:

   a) no acotado por la derecha; y

   b) no acotada (infinita) en ambos sentidos.

   El conjunto de los resortes y las masas son infinitamente grandes.

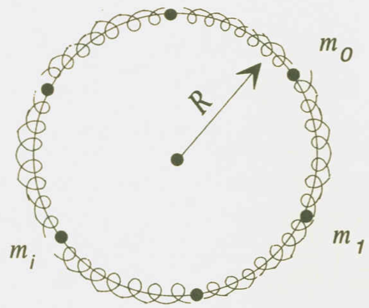

Figura 1.3

2. Las oscilaciones pequeñas de un sistema con número finito de grados de libertad

El problema analizado, en la sección anterior, resulta ser un caso particular en un problema más general sobre el movimiento de un sistema mecánico arbitrario cerca de la posición de equilibrio. Considérese un sistema mecánico con N grados de libertad, cuya posición se determina mediante las coordenadas generalizadas $q_0, q_1, \ldots, q_{N-1}$ [1]. La función de Lagrange L de un sistema se le llama a la diferencia entre su energía cinética T y la potencial U:

$$L = T - U,$$

y la ecuación del movimiento de tal sistema en la forma de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = \overline{0, N-1}). \tag{2.1}$$

Exactamente de la misma forma como se hizo antes (la transición de x_i a las perturbaciones $u_i(t)$) se pueden registrar y calcular las coordenadas generalizadas respecto de la posición de equilibrio, es decir se puede considerar que en su posición de equilibrio las $q_i = 0$ $(i = \overline{0, N-1})$. Se considerarán movimientos cerca de la posición de equilibrio con energía cinética pequeña, es decir, q_i y $\dot{q}_i$ van a ser tan pequeñas que los sumandos con el orden de pequeñez q_i^2 y $\dot{q}_i^2$ podrán ser suprimidos.

Se considerará el sistema formado por masas puntuales, cuya energía cinética es:

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}\nu_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2}(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2) \tag{2.2}$$

que resulta ser positiva.

Las coordenadas cartesianas de las masas se expresan a través de sus coordinadas generalizadas

$$\begin{aligned} x_k &= x_k, (q_o, q_1, \ldots, q_{N-1}) \\ y_k &= y_k, (q_o, q_1, \ldots, q_{N-1}) \\ z_k &= z_k, (q_o, q_1, \ldots, q_{N-1}) \end{aligned}$$

de donde se deduce:

$$\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{z}_k^2 = \sum_{i,j=0}^{N-1} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \frac{\partial x_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \frac{\partial y_k}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\dot{q}_i \frac{\partial z_k}{\partial q_j}\dot{q}_j \right),$$

y sustituyendo esto en (2.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \right\} \dot{q}_i \dot{q}_j = \\ &= \sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij}(q_0, q_1, \ldots, q_{N-1})\dot{q}_i\dot{q}_j, \end{aligned}$$

[1] Recuérdese que el número de grados de libertad de un sistema mecánico es la mínima cantidad de números que determinan completamente la posición de todas las partes del sistema que resultan ser sus coordenadas generalizadas.

donde

$$\alpha_{ij}(q_0, q_1, \ldots q_{N-1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i}\frac{\partial x_k}{\partial q_j} + \frac{\partial y_k}{\partial q_i}\frac{\partial y_k}{\partial q_j} + \frac{\partial z_k}{\partial q_i}\frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right).$$

Puesto que sólo serán consideradas las pequeñas oscilaciones, entonces la expresión exacta para la energía cinética (y también para la potencial) puede ser sustituida por la aproximada $\tilde{T}(\tilde{U})$. Desarrollando las funciones $\alpha_{ij}(q_0, q_1, \ldots, q_{N-1})$ en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio ($q_i = 0$) y dejando en esta expansión sólo hasta el término de primer orden:

$$\alpha_{ij}(q_0, q_1, \ldots q_{N-1}) = \alpha_{ij}\Big|_{q=0} + \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial q_l}\Big|_{q=0} q_l + \ldots \simeq \alpha_{ij}(0, \ldots, 0) = \alpha_{ij}$$

(esto es admisible ya que en la fórmula para la energía cinética las $\alpha_{ij}(q_0 \ldots q_{N-1})$ se multiplican por $\dot{q}_i\dot{q}_j$ y así todos los sumandos resultan del orden de $\dot{q}_i\dot{q}_j q_l$ y superiores).

Sustituyéndolas en la expresión para T, se determina la siguiente igualdad aproximada:

$$\tilde{T} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij}\dot{q}_i, \dot{q}_j, \quad \text{con } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.$$

Dado que la energía cinética es siempre positiva y como se ha dejado su parte principal, entonces

$$\tilde{T} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j > 0$$

(donde los restantes sumandos han sido despreciados por ser términos infinitamente pequeños de orden superior y por lo tanto no pueden cambiar el signo de T).

La energía potencial del sistema también depende sólo de las coordenadas q_i:

$$U = U(q_0, q_1, \ldots, q_{N-1}).$$

Desarrollando esta expresión en su serie de Taylor alrededor de la posición de equilibrio y considerando que a dicha posición de equilibrio le corresponde el mínimo U, esto es la igualdad a 0 de las primeras derivadas $\frac{\partial U}{\partial q_i}\Big|_{q=0} = 0$ $(i = \overline{0, 1, \ldots, N-1})$ y la positividad de la forma cuadrática $\sum \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q=0} q_i q_j$ se obtiene la expresión aproximada para U:

$$\tilde{U} = U(0, 0, \ldots, 0) + \sum_{i,j=0}^{N-1} \beta_{ij} q_i q_j,$$

donde $\beta_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{q=0}$. (Aquí también han sido despreciados los sumandos con orden de pequeñez superior a q_i^2).

Vale señalar que

$$\sum_{i,j=0}^{N-1} \beta_{ij} q_i q_j > 0.$$

Con todo esto, se puede obtener una expresión aproximada para L.

$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i,j=0}^{N-1} \beta_{ij} q_i q_j - U(0)$, que sustituida en la ecuación de Lagrange (2.1):

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\left(-\sum_{i,j=0}^{N-1} \beta_{ij} q_i q_j\right) = -\sum_{i=0}^{N-1} \beta_{ki} q_i - \sum_{k=0}^{N-1} \beta_{jk} q_j = -2\sum_{i=0}^{N-1} \beta_{ki} q_i \qquad (\beta_{ij} = \beta_{ji})$$

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_{kj} \dot{q}_j + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{ik} \dot{q}_i = 2\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{ki} \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_k} = 2\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_{ki} \ddot{q}_i + 2\sum_{i=0}^{N-1} \beta_{ki} q_i = 0 \quad (k = \overline{0, \ldots, N-1})$$

$$(\dot{\alpha}_{ki} = 0).$$

Este último sistema puede ser escrito en forma compacta como:

$$\frac{d^2}{dt^2} A\vec{q} + B\vec{q} = 0, \tag{2.3}$$

donde $\vec{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_{N-1})$, mientras que las matrices A y B son de la forma: $A = (\alpha_{ij})_{ij}, B = (\beta_{ij})_{ij}$ (con $i, j = \overline{0, N-1}$) teniéndose además que $\begin{cases} \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \\ \beta_{ij} = \beta_{ji} \end{cases}$, o sea $\begin{cases} A = A^* \\ B = B^* \end{cases}$ y como se señaló anteriormente A y B son matrices positivas definidas.

Esto permite transformar la ecuación (2.3). Debido a que la matriz A es positiva puede representarse como $A = a^2$, donde a es una matriz real ($a = a^*$) y existe su inversa a^{-1}.

Entonces (2.3) es equivalente a la ecuación: $a^2\ddot{\vec{q}} + B\vec{q} = 0$, la cual a su vez es equivalente a:

$$a\ddot{\vec{q}} + a^{-1}B(a^{-1}a)\vec{q} = 0$$

o bien a

$$\ddot{\vec{\nu}} + \tilde{B}\vec{\nu} = 0$$

donde $\vec{\nu} = a\vec{q}, a = \sqrt{A}, \tilde{B} = a^{-1}B\,a^{-1}$, teniéndose además que la matriz $\tilde{B}$ es positiva definida.

En efecto,

$$(\tilde{B}\vec{x}, \vec{x}) = (a^{-1}Ba^{-1}\vec{x}, \vec{x}) = (B(a^{-1}\vec{x}), a^{-1}x) = B(\vec{y}, \vec{y}) > 0,$$

donde a su vez: $(a^{-1})^* = a^{-1}$ (dado que A es una matriz autoconjugada) y $\vec{y} = a^{-1}\vec{x}$.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Deducir las ecuaciones de los ejercicios tres y cuatro de la primera sección, mediante la función de Lagrange.

2. Demostrar que una matriz positiva autoconjugada tiene valores propios positivos y que toda matriz con valores propios es positiva autoconjugada.

3. Demostrar que si la matriz A tiene sólo valores propios positivos, entonces puede representarse como $A = a^2$, donde a es una matriz autoconjugada.

3. Solución general de la ecuación de onda de un sistema de masas puntuales

Hallaremos la solución general de la ecuación (1.5). Para ello primero hay que transformarla. Lo más directo y simple es hacerlo con la ecuación (1.3). Tal ecuación es equivalente a:

$$\sqrt{m_i}\ddot{u}_i(t) = \frac{\alpha_{i+1}}{\sqrt{m_i m_{i+1}}}\sqrt{m_{i+1}}u_{i+1}(t) - \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{m_i}\sqrt{m_i}u_i(t) + \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}}\sqrt{m_{i-1}}u_{i-1}(t).$$

Si ahora se introduce la siguiente notación

$$\sqrt{m_i}u_i(t) = \nu_i(t), \qquad \frac{\alpha_i}{\sqrt{m_i m_{i-1}}} = -b_{i-1}, \quad \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{m_i} = a_i,$$

la ecuación toma la forma

$$\ddot{\nu}_i(t) = -b_i\nu_{i+1}(t) - a_i\nu_i(t) - b_{i-1}\nu_{i-1}(t),$$

o sea, que el sistema (1.5) será equivalente a:

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\nu}(t) = -J\vec{\nu}(t) \tag{3.1}$$

donde

$$a_i = \frac{1}{m_i}\left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i}\right), \; b_i = -\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}\sqrt{m_i m_{i+1}}},$$

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & b_1 & a_2 & b_2 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & a_{N-1} \end{pmatrix}. = M^{-1/2} A M^{-1/2} \quad (\text{pag. } 4) \tag{3.2}$$

(a una matriz de este tipo se le llama de Jacobi).

La solución general se buscará en la forma:

$$\vec{\nu}(t) = e^{wt}\vec{c}, \tag{3.3}$$

donde $w = \text{const}$ y $\vec{c}$ un vector constante, que se propone determinar.

Sustituyendo (3.3) en (3.1) se obtiene:

$$w^2 e^{wt}\vec{c} = -e^{wt}J\vec{c} \Leftrightarrow -w^2\vec{c} = J\vec{c}.$$

Por consiguiente, $\vec{c}$ es un vector propio y $-w^2$ es valor propio de la matriz de Jacobi J.

Dado que todos los números propios λ_k^2 de la matriz de Jacobi J son positivos (véase el ejercicio uno de esta sección), entonces w^2 deberá ser negativo y por ende a cada valor propio de la matriz de Jacobi J le corresponden dos soluciones del sistema (3.1) de la forma (3.3), a saber:

$$\vec{\nu}_{1k}(t) = e^{i\lambda_k t}\vec{c}_k, \quad \vec{\nu}_{2k}(t) = e^{-i\lambda_k t}\vec{c}_k$$

(aquí $i = \sqrt{-1}$ y $\vec{c}_k$ el vector propio de la matriz J que corresponde al número propio λ_k^2).

Por la homogeneidad del sistema (3.1) su solución general resulta ser:

$$\vec{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{N-1}(A_k e^{i\lambda_k t} + B_k e^{-i\lambda_k t})\vec{c}_k = \sum_{k=0}^{N-1}(f_k\cos\lambda_k t + d_k \text{sen}\lambda_k t)\vec{c}_k,$$

de donde se ve que el movimiento de cada una de las masas m_i resulta ser una superposición de oscilaciones armónicas con frecuencias iguales a $\lambda_k (k = \overline{0, N-1})$ que dependen de las características mecánicas del sistema $\big(\lambda_k = \lambda_k(k_0, k_1, \dots, k_N;\, l_0, l_1, \dots, l_N;\, m_0, m_1, \dots, m_N)\big)$.

Si en el tiempo inicial ($t = 0$) la posición y la velocidad de las masa fuera

$$\vec{\nu}(0) = (h_0, h_1, \dots, h_{N-1}), \quad \dot{\vec{\nu}}(0) = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1}),$$

entonces en lo sucesivo sus movimientos se dan por las fórmulas

$$\vec{\nu}(t) = \sum_{k=0}^{N-1}(f_k\cos\lambda_k t + d_k\,\text{sen}\,\lambda_k t)\vec{c}_k, \tag{3.4}$$

en las cuales los coeficientes f_k y d_k se determinan de las ecuaciones:

$$\sum_{k=0}^{N-1} f_k\vec{c}_k = \vec{\nu}(0), \quad \sum_{k=0}^{N-1}\lambda_k d_k\vec{c}_k = \dot{\vec{\nu}}(0), \tag{3.5}$$

cuyo despeje unívoco se sigue de que los vectores propios $\vec{c}_k$ forman una base.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Demostrar que para la matriz de Jacobi de la forma

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

la condición $a_i a_{i+1} > 4b_i^2$ es la condición suficiente para que la matriz J sea positiva. Comprobar que la condición no es necesaria.

2. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\nu}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\vec{\nu}(t), \qquad \vec{\nu}(t) = \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix}$$

con la condición $\vec{\nu}(0) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{\nu}}(0) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

3. Resolver la ecuación

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{\nu}(t) + \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\vec{\nu}(t) = 0$$

con las condiciones $\vec{\nu}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\dot{\vec{\nu}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Hallar la solución general de la ecuación[2]

$$\ddot{\vec{\nu}}(t) = J\vec{\nu}(t),$$

[2]Este problema se debe resolver durante la segunda lectura, una vez resueltos los ejercicios tres y cuatro de la Sección 4.

donde

$$a)\ J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad b)\ J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

son matrices semi-infinitas.

4. Valores propios y vectores propios de la matriz de Jacobi

Como se vio en la Sección 3, para resolver el problema propuesto acerca de las oscilaciones es necesario hallar los valores y los vectores propios de cierta matriz. En el caso más general (para una matriz arbitraria) no podemos decir casi nada acerca de dichos números y vectores si de alguna manera no se pueden determinar directamente. Sin embargo, en el caso indicado de la matriz de Jacobi, sus valores y vectores propios que ahora debemos encontrar, toman una forma especial.

Gracias a esto es que se pueden investigar ciertas propiedades cualitativas de los valores y vectores propios, sin necesidad de encontrarlos directamente.

Así pues sea λ_0 un cierto valor propio de la matriz de Jacobi J y sea $\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_N - 1)$ el correspondiente vector propio. Por la definición de valor y vector propios esto significa que se cumple la igualdad:

$$J\vec{c} = \lambda_0 \vec{c} \quad (\vec{c} \neq 0),$$

equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} a_0c_0 + b_0c_1 = \lambda_0 c_0 \\ b_0c_0 + a_1c_1 + b_1c_2 = \lambda_0 c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{i-1}c_{i-1} + a_ic_i + b_ic_{i+1} = \lambda_0 c_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{N-3}c_{N-3} + a_{N-2}c_{N-2} + b_{N-2}c_{N-1} = \lambda_0 c_{N-2} \\ b_{N-2}c_{N-2} + a_{N-1}c_{N-1} = \lambda_0 c_{N-1} \end{cases} \tag{4.1}$$

Evidentemente, c_0 no puede ser 0. En caso contrario, de la primera ecuación de (4.1) se obtendría que $c_1 = 0$ y de la segunda ecuación $c_2 = 0$ y así sucesivamente de manera que se obtendría $c_i = c_2 = \dots = c_{N-1} = 0$, lo que contradiría la definición misma de vector propio, el cual debe ser distinto de 0.

También, si se multiplica (o divide) el vector $\vec{c}$ por algún número α (distinto de 0), entonces la igualdad (4.1) se cumplirá también para el vector $\vec{c}' = \alpha\vec{c} = (\alpha c_0, \alpha c_1, \dots, \alpha c_{N-1})$. Por esto es que se puede considerar $c_0 = 1$ (ya que si $c_0 \neq 1$ se puede pasar al vector $\frac{1}{c_0}\vec{c}$). Así es que el sistema (4.1) toma la forma:

$$\begin{cases} a_0 + b_0c_1 = \lambda_0 \\ b_0 + a_1c_1 + b_1c_2 = \lambda_0 c_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{N-3}c_{N-3} + a_{N-2}c_{N-2} + b_{N-2}c_{N-1} = \lambda_0 c_{N-2} \\ b_{N-2}c_{N-2} + a_{N-1}c_{N-1} = \lambda_0 c_{N-1} \end{cases} \tag{4.2}$$

De la primera ecuación se obtendrá:

$$c_1 = \frac{1}{b_0}\lambda_0 - \frac{a_0}{b_0},$$

de la segunda:

$$c_2 = \frac{1}{b_0b_1}\lambda_0^2 - \frac{a_1 + a_0}{b_0b_1}\lambda_0 + \left(\frac{a_0a_1}{b_0b_1} - \frac{b_0}{b_1}\right),$$

etcétera.

Es así que de las primeras $N-1$ ecuaciones de (4.2) se deduce que el vector $\vec{c}$ tiene la forma (véase el ejercicio uno de esta sección):

$$\vec{c} = \big(1, P_1(\lambda_0), P_2(\lambda_0), \dots, P_{N-1}(\lambda_0)\big), \tag{4.3}$$

con componentes que resultan ser números que se expresan mediante el valor propio λ_0 de la matriz J en forma polinomial, siendo la componente c_j el polinomio $P_j(\lambda_0)$ de grado j respecto de λ, evaluado en λ_0. Recuerde que el coeficiente de la máxima potencia λ del polinomio $P_j(\lambda)$ es igual a $(b_0b_1 \dots b_{j-1})^{-1} \neq 0$ (véase el ejercicio dos de esta sección).

La última de las ecuaciones de (4.2) entonces puede escribirse como:

$$b_{N-2}P_{N-2}(\lambda_0) + a_{N-1}P_{N-1}(\lambda_0) - \lambda_0 P_{N-1}(\lambda_0) = 0. \tag{4.4}$$

En la parte izquierda de esta ecuación aparece un polinomio de grado N (cuyo término de máxima potencia se obtiene del sumando $\lambda_0 P_{N-1}(\lambda_0)$) respecto de λ, evaluado en λ_0, lo que quiere decir que λ_0 es raíz del polinomio:

$$Q_N(\lambda) = \lambda P_{N-1}(\lambda) - a_{N-1}P_{N-1}(\lambda) - b_{N-2}P_{N-2}(\lambda) \tag{4.5}$$

de grado N, con todos sus coeficientes expresables mediante $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}, b_0, b_1, \dots, b_{N-2}$, es decir, son conocidos.

El polinomio Q_N tiene N raíces, cada una de las cuales es un valor propio de la matriz J. Puesto que dos polinomios que tienen las mismas raíces pueden diferir a lo más en un factor constante, entonces Q_N (salvo un factor constante) es igual al polinomio característico, cuyas raíces por definición son valores propios de la matriz J.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Encontrar los vectores propios de la matriz J_3 (matriz de Jacobi 3×3). Demostrar que los vectores propios de la matriz J_N tienen forma (4.3).

2. Demostrar que los coeficientes α_j^j de la potencia λ_0^j en la solución del sistema (4.2) son $\alpha_j^j = (b_0 b_1 \dots b_{j-1})^{-1}$.

3. Hallar los vectores propios de la matriz $(n \times n)$:

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

y los valores propios correspondientes.

Sugerencia. Buscar el vector propio $\vec{c}_0$ del sistema (4.2) en la forma $(1, t, \dots, t^{n-1})$. Mostrar que $\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$, esto es, λ_0 pude ser presentada en la forma $\lambda_0 = \cos\varphi$, donde $t = e^{i\varphi}$. Obtener de todo esto:

$$\begin{aligned} \vec{c}_k &= \alpha\vec{c}_0 + \beta\vec{c}_1 = \left(0, 1, \dots, \frac{\operatorname{sen}(j \arccos\lambda_k)}{\operatorname{sen}(\arccos\lambda_k)}, \dots, \frac{\operatorname{sen}\big((n-1)\arccos\lambda_k\big)}{\operatorname{sen}(\arccos\lambda_k)}\right) \\ \vec{c}_1 &= \left(1, \frac{1}{t}, \dots, \frac{1}{t_{n-1}}\right), \quad \lambda_k = \cos\frac{\pi k}{n+1} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

4. Encontrar los valores propios y los vectores propios de la matriz

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Observación. Véase la sugerencia del ejercicio anterior.

Respuesta:

$$\begin{aligned} \vec{c}_k &= \left(1, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{2}\cos(j \arccos\lambda_k), \dots, \sqrt{2}\cos\big((n-1)\arccos\lambda_k\big)\right) \\ \lambda_k &= \cos\frac{\pi k}{n+1}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

5. Las propiedades de los polinomios generados por la matriz de Jacobi

Como mostramos en la Sección 3, cada matriz de Jacobi J de la forma (3.2) genera un sistema de N polinomios $P_0 \equiv 1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$, tal que el j-ésimo polinomio tiene grado j, y el coeficiente bajo la mayor potencia en λ^j, antes λ^j en dicho polinomio, es $(b_0 b_1 \dots b_{j-1})^{-1} \neq 0$.

Mostraremos que cada polinomio de grado no mayor que $N-1$ tiene una representación unívoca en la forma de una combinación lineal de los polinomios $1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$. En efecto, para ello es suficiente mostrar que cada monomio $\lambda^n (n \leq N-1)$ es representable en forma única, lo cual es casi evidente (véase el ejercicio uno de esta sección).

Es así que podemos hablar del espacio $\mathbb{P}_N$ de los polinomios de grado no mayor que $N-1$, con la base $1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$. En efecto, la suma de polinomios y su multiplicación por números no nos saca del espacio considerado y, como cada polinomio del espacio se representa en forma única como la combinación lineal de los polinomios $1, P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$, entonces estos forman una base del espacio $\mathbb{P}_N$, que tiene, por lo tanto, dimensión N.

Consideramos, ahora, el espacio $\mathbb{H}_N = \mathbb{C}^N$ de los vectores $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ de dimensión N. Probaremos que los vectores propios normalizados de la matriz J forman una base en este espacio. Para eso mostraremos primero que todos los valores propios de la matriz J son diferentes, para lo cual demostraremos, a su vez, el siguiente:

Lema 1 *Para los polinomios $P_0 \equiv 1, P_1(\lambda), \dots, P_{N-1}(\lambda)$, generados por la matriz de Jacobi J, esto es, que satisfacen para cualquier λ el sistema*

$$\begin{cases} a_0 + b_0 P_1(\lambda) = \lambda \\ b_0 + a_1 P_1(\lambda) + b_1 P_2(\lambda) = \lambda P_1(\lambda) \\ b_1 P_1(\lambda) + a_2 P_2(\lambda) + b_2 P_3(\lambda) = \lambda P_2(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{N-3} P_{N-3}(\lambda) + a_{N-2} P_{N-2}(\lambda) + b_{N-2} P_{N-1}(\lambda) = \lambda P_{N-2}(\lambda) \end{cases} \tag{5.1}$$

(que son las primeras $N-1$ ecuaciones del sistema (4.2)) la siguiente igualdad es cierta:

$$(\lambda - \mu) \sum_{j=0}^{N-2} P_j(\lambda) P_j(\mu) = b_{N-2}\big[P_{N-1}(\lambda) P_{N-2}(\mu) - P_{N-1}(\mu) P_{N-2}(\lambda)\big]. \tag{5.2}$$

Demostración. Consideramos el sistema (5.1) poniendo en cada ecuación primero λ y después μ:

$$
\begin{aligned}
a_0P_0(\lambda) + b_0P_1(\lambda) &= \lambda P_0(\lambda)\\
a_0P_0(\mu) + b_0P_1(\mu) &= \mu P_0(\mu)\\
b_0P_0(\lambda) + a_1P_1(\lambda) + b_1P_2(\lambda) &= \lambda P_1(\lambda)\\
b_0P_0(\mu) + a_1P_1(\mu) + b_1P_2(\mu) &= \mu P_1(\mu)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
b_{N-3}P_{N-3}(\lambda) + a_{N-2}P_{N-2}(\lambda) + b_{N-2}P_{N-1}(\lambda) &= \lambda P_{N-2}(\lambda)\\
b_{N-3}P_{N-3}(\mu) + a_{N-2}P_{N-2}(\mu) + b_{N-2}P_{N-1}(\mu) &= \mu P_{N-2}(\mu).
\end{aligned}
$$

Multiplicamos la primera igualdad de cada par por $P_j(\mu)$, y la segunda por $P_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots, N-2)$ y sustraemos la segunda de la primera. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
&b_0\big(P_1(\lambda)P_0(\mu) - P_1(\mu)P_0(\lambda)\big) = (\lambda-\mu)P_0(\lambda)P_0(\mu)\\
&b_0\big(P_0(\lambda)P_1(\mu) - P_0(\mu)P_1(\lambda)\big) + b_1\big(P_2(\lambda)P_1(\mu) - P_2(\mu)P_1(\lambda)\big) =\\
&= (\lambda-\mu)P_1(\lambda)P_1(\mu)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&b_{N-3}\big(P_{N-3}(\lambda)P_{N-2}(\mu) - P_{N-3}(\mu)P_{N-2}(\lambda)\big) +\\
&b_{N-2}\big(P_{N-1}(\lambda)P_{N-2}(\mu) - P_{N-1}(\mu)P_{N-2}(\lambda)\big) =\\
&= (\lambda-\mu)P_{N-2}(\lambda)P_{N-2}(\mu).
\end{aligned}
$$

Sumamos todas las igualdades. Obtenemos (5.2).

□

CONCLUSIÓN DEL LEMA 1. Para los polinomios, generados por la matriz J, tenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k(\lambda)P_k(\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}\big(Q_N(\lambda)P_{N-1}(\mu) - Q_N(\mu)P_{N-1}(\lambda)\big), \tag{5.3}$$

donde $Q_N(\lambda)$ es determinado por la fórmula (4.5).

DEMOSTRACIÓN. De (4.5) obtenemos

$$
\begin{aligned}
b_{N-2}P_{N-2}(\mu) + a_{N-1}P_{N-1}(\mu) &= \mu P_{N-1}(\mu) - Q_N(\mu)\\
b_{N-2}P_{N-2}(\lambda) + a_{N-1}P_{N-1}(\lambda) &= \lambda P_{N-1}(\lambda) - Q_N(\lambda).
\end{aligned}
$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por $P_{N-1}(\lambda)$ y la segunda por $P_{N-1}(\mu)$, y sustrayendo la segunda de la primera, obtenemos

$$
\begin{aligned}
b_{N-2}(P_{N-2}(\mu)P_{N-1}(\lambda) - P_{N-2}(\lambda)P_{N-1}(\mu)) &= -(\lambda-\mu)P_{N-1}(\lambda)P_{N-1}(\mu)\\
&-Q_N(\mu)P_{N-1}(\lambda) + Q_N(\lambda)P_{N-1}(\mu)
\end{aligned}
$$

Sustituyendo esta expresión a la parte derecha de (5.2) obtenemos

$$(\lambda-\mu)\sum_{k=0}^{N-1} P_k(\lambda)P_k(\mu) = Q_N(\lambda)P_{N-1}(\mu) - Q_N(\mu)P_{N-1}(\lambda),$$

lo que implica (5.3).

□

Mostramos, ahora, que los valores propios de la matriz de Jacobi J son distintos. (Recordamos que los eigenvalores de la matriz J son raíces del polinomio $Q_N(\lambda)$).

Hagamos tender en (5.3) $\lambda \to \mu$. La parte izquierda de la igualdad tiende a $\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\mu) \geq 1$ (porque $P_0 \equiv 1$). La parte derecha, según la regla de L'Hopital, tiende a $Q'_N(\mu)P_{N-1}(\mu) - Q_N(\mu)P'_{N-1}(\mu)$.

Así pues,

$$Q'_N(\mu)P_{N-1}(\mu) - Q_N(\mu)P'_{N-1}(\mu) = \sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\mu) \geq 1, \tag{5.4}$$

de donde vemos que $Q_N(\mu)$ y $Q'_N(\mu)$ no pueden anularse en el mismo punto, esto es, $Q_N(\lambda)$ no tiene raíces múltiples (todas sus N raíces $\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-1}$ son distintas), lo que significa que los eigenvalores de la matriz J son distintos.

Esto implica, según los teoremas correspondientes del álgebra lineal, que la matriz J tiene N vectores propios que son ortogonales y forman en el espacio $\mathbb{H}_N$ una base ortogonal:

$$\vec{c}_j = \big(1, P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j), \ldots, P_{N-1}(\lambda_j)\big) \quad (j = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Normalizando esta base obtenemos una base ortonormal:

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{c}_j}{\parallel \vec{c}_j \parallel} = \frac{1}{\Big(\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)\Big)^{1/2}}\big(1, P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j), \ldots, P_{N-1}(\lambda_j)\big). \tag{5.5}$$

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Mostrar que el monomio λ^n se representa únicamente en la forma

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k R_k(\lambda),$$

donde $\{R_k(\lambda)\}$ es un sistema de polinomios arbitrarios tales que $R_k(\lambda)$ es un polinomio de grado k (el coeficiente mayor con λ^k no es 0).

Escribir representación explícita para λ^3 en forma de la combinación lineal de los polinomios

$$\begin{aligned} R_0 &= a_0^0 \\ R_1 &= a_0^1 + a_1^1\lambda \\ R_2 &= a_0^2 + a_1^2\lambda + a_2^2\lambda^2 \\ R_3 &= a_0^3 + a_1^3\lambda + a_2^3\lambda^2 + a_3^3\lambda^3 \\ & (a_0^0 a_1^1 a_2^2 a_3^3 \neq 0). \end{aligned}$$

Sugerencia. La demostración de la unicidad se tiene que hacer por reducción al absurdo. Suponga que la representación de λ^n no es única

$$\lambda^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k R_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k R_k(\lambda) \qquad (\exists\, k : \alpha_k \neq \beta_k)$$

y considerar la diferencia

$$0 = \lambda^n - \lambda^n = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k - \beta_k) R_k(\lambda).$$

2. Demostar que el sistema de vectores N-dimensionales

$$\begin{aligned} \vec{e}_0 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \vec{e}_1 &= (1, 1, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_{N-1} &= (1, 1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

forma una base en el espacio $\mathbb{H}_N$.

Encontrar la expansión de un vector $\vec{x}$ por esa base. ¿Esta base es ortogonal?

6. La función espectral

Consideremos el espacio $\mathbb{P}_N$ de todos los polinomios de grado menor o igual que $N-1$. Los polinomios $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_{N-1}(\lambda)$, que pertenecen a este espacio, forman una base en él, porque tienen grado $\deg P_k(\lambda) = k, k \leq N-1$ (no es difícil demostrar

que cada sistema de N polinomios que tienen tales grados es una base en el espacio $\mathbb{P}_N$). Consideramos un mapeo lineal del espacio $\mathbb{H}_N$ al espacio $\mathbb{P}_N$ que transforma la base canónica $(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,1)$ del espacio $\mathbb{H}_N$ en la base $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_{N-1}(\lambda)$ del espacio $\mathbb{P}_N$. Así que, si el vector $\vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{H}_N$ tiene coordenadas $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ en la base canónica $(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,1)$, su imágen tiene las mismas coordenadas en la base $P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_{N-1}(\lambda)$:

$$f(\vec{x}) \equiv \tilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k P_k(\lambda), \quad \vec{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}) \in \mathbb{H}_N$$

Así pues, si $R(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} r_k P_k(\lambda)$, entonces $f^{-1}(R(\lambda)) \equiv \vec{r} = (r_0, r_1, \ldots, r_{N-1})$.

Observamos, ahora, en qué se transforma el producto escalar del espacio $\mathbb{H}_N$ en el espacio $\mathbb{P}^N$. Pasando a la base de los vectores propios $\vec{e}_j$ de la matriz J_N (ver (5.5)) en el espacio $\mathbb{H}_N$, tenemos:

$$\begin{aligned} (\vec{x}, \vec{e}_j) &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k P_k(\lambda_j) = \frac{\tilde{x}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}}, \\ (\vec{y}, \vec{e}_j) &= \frac{\tilde{y}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}}, \end{aligned}$$

donde $\{x_k\}_{k=0}^{N-1}, \{y_k\}_{k=0}^{N-1}$ son las coordenadas de los vectores $\vec{x}, \vec{y}$ respectivamente en la base canónica $(1,0,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), (0,0,1,\ldots,0), \ldots, (0,0,0,\ldots,1)$.

Como el sistema $\{\vec{e}_j\}_{j=0}^{N-1}$ es ortonormal, podemos escribir

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{j=0}^{N-1} (\vec{x}, \vec{e}_j)\overline{(\vec{y}, \vec{e}_j)} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\tilde{x}(\lambda_j)\overline{\tilde{y}(\lambda_j)}}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}.$$

La última igualdad puede ser escrita en forma

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \int_{\infty}^{\infty} \tilde{x}(\lambda)\overline{\tilde{y}(\lambda)} d\rho(\lambda),$$

donde $\rho(\lambda)$ es una función escalón no–decreciente, que es constante en todas partes, a excepción de los puntos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_N$, e igual a cero para $\lambda < \lambda_1$, y cuyos saltos en estos puntos se determinan como (ver la Figura 6.1)

$$\Delta\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}. \tag{6.1}$$

Así pues, si ahora determinanos en el espacio $\mathbb{P}_N$ el producto escalar

$$\langle R(\lambda), S(\lambda) \rangle_\rho = \int_{\infty}^{\infty} R(\lambda)\overline{S(\lambda)} d\rho(\lambda), \tag{6.2}$$

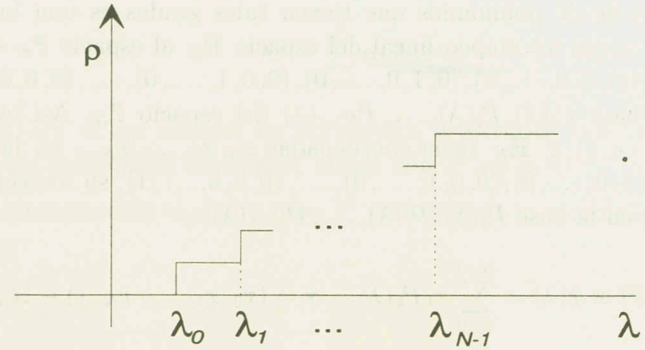

Figura 6.1

tenemos la siguiente igualdad:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left\langle \tilde{x}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \right\rangle_\rho . \tag{6.3}$$

De esta manera, si ahora determinamos en el espacio $\mathbb{P}_N$ un producto escalar con la igualdad (6.2) entonces f es una isometría del espacio $\mathbb{H}_N$ al espacio $\mathbb{P}_N$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ (denotamos este espacio como $\mathbb{P}_N(\rho)$), esto es, conserva el producto escalar.

Observemos las siguientes propiedades de la función espectral:

1. La suma de los saltos de la función $\rho(\lambda)$ es igual a 1:

$$\sum_{j=0}^{N-1} \Delta\rho(\lambda_j) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)} = 1. \tag{6.4}$$

En efecto, considerando (6.3) con $\vec{x} = \vec{y} = (1, 0, \ldots, 0)$, obtenemos

$$1 = (\vec{y}, \vec{y}) = \langle \tilde{y}(\lambda), \tilde{y}(\lambda) \rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} P_0^2(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta\rho(\lambda_j)$$

2. En los puntos de los saltos de la función $\rho(\lambda)\left(\{\lambda_j\}_{j=1}^N\right)$ se cumple

$$\frac{1}{\Delta\rho(\lambda_j)} = Q'_N(\lambda_j) P_{N-1}(\lambda_j), \tag{6.5}$$

lo que se deduce inmediatamente de (5.4), tomando en cuenta que λ_j es una raíz del polinomio $Q(\lambda)$.

Nota: Consideremos, más detalladamente, la medida generada por la función $\rho(\lambda)$. La función $\rho(\lambda)$ es tal que sólo los conjuntos que contienen los puntos de los saltos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ tendrán medida diferente de cero. Entonces, las funciones que coinciden en los puntos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$ son iguales (coinciden "casi en todas partes") en el espacio $L^2(\mathbb{R}, d\rho)$:

$$f(\lambda) \underset{\text{a.e.}}{=} g(\lambda) \Leftrightarrow \{f(\lambda_0) = g(\lambda_0), \ldots, f(\lambda_{N-1}) = g(\lambda_{N-1})\} .$$

Se sabe que el polinomio del grado $\leq N-1$ se reconstruye únicamente por sus valores en N puntos. Así pues, tomando valores de una función en los puntos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$, podemos construir el polinomio (del grado menor o igual que $N-1$), que es igual a esta función "casi en todas partes". Así, todo el conjunto de las funciones se divide en clases (según sus valores en los puntos $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}$), y hay un polinomio que es el representante de cada clase.

Teorema 1 *Los polinomios $P_0 \equiv 1, P_1(\lambda), \ldots, P_{N-1}(\lambda)$, generados por la matriz de Jacobi J, forman una base ortonormal en el espacio de los polinomios (las funciones) con el producto escalar, determinado por la fórmula (6.2).*

DEMOSTRACIÓN. Para la transformada $f\colon \mathbb{H}_N \to \mathbb{P}_N$ los polinomios $\{P_k(\lambda)\}_{k=0}^{N-1}$ son las imágenes de la base ortonormal $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0) \ldots, (0, 0, \ldots, 1)$. Entonces, según la igualdad de Parseval (6.3), los vectores $\{P_k(\lambda)\}$ del espacio de funciones con el producto escalar (6.2) son también ortonormales. Por lo que ellos forman una base (ver ejercicio uno de la Sección 5).

□

Así, cada matriz de Jacobi (3.2) genera una función escalón $\rho(\lambda)$ denominada la función espectral de la matriz de Jacobi, y tiene las siguientes propiedades:

1. La función $\rho(\lambda)$ tiene exactamente N saltos, situados en el semieje positivo[3] en los puntos que corresponden a los valores propios de la matriz de Jacobi.

2. La suma de los saltos de la función $\rho(\lambda)$ es igual a 1.

3. La transformación $f(\vec{x}) = \sum x_k P_k(\lambda)$ es un isomorfismo entre los espacios $\mathbb{H}_N$ y $\mathbb{P}_N$, en los que el producto escalar es determinado por la fórmula (6.2). Destacamos que para este producto escalar $P_0, P_1, \ldots, P_{N-1}$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_N$.

[3] En estas notas se trata sólo de las matrices Jacobi positivas, que corresponden al sistema mecánico, pero, como se puede ver, los resultados principales de la teoría espectral de las matrices de Jacobi se conservan cuando J no es positiva.

Resulta que es cierta la afirmación inversa: cada función que satisface a las condiciones uno y dos es la función espectral para cierta matriz de Jacobi, que es únivocamente determinada por ella.

Así pues, entre el conjunto de las matrices de Jacobi y el conjunto de las funciones que satisfacen las condiciones uno y dos existe una correspondencia biunívoca. La demostración de este hecho básico se presenta en las secciones siguientes.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Verificar que la fórmula (6.2) ciertamente da en el espacio $\mathbb{P}_N$ un producto escalar (esto es, la operación (6.2) satisface las condiciones necesarias del producto escalar).

2. Encontrar $\left\langle R(\lambda), Q(\lambda)\right\rangle_\rho$, donde el producto escalar es dado por la fórmula (6.2), para los casos:

$$a)\quad \begin{array}{rcl} R(\lambda) &=& \lambda^2, \\ Q(\lambda) &=& \lambda, \end{array} \qquad \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ 1/2, & 0 < \lambda < 1, \\ 1, & 1 < \lambda; \end{cases}$$

$$b)\quad \begin{array}{rcl} R(\lambda) &=& a\lambda^2 + b\lambda + c, \\ Q(\lambda) &=& R(\lambda), \end{array} \qquad \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ 1/3, & 1 < \lambda < 2, \\ 2/3, & 2 < \lambda < 3, \\ 1, & 3 < \lambda. \end{cases}$$

3. Para las funciones $\rho(\lambda)$, descritas en el ejercicio dos, encontrar un polinomio del tercer grado, que es ortogonal al polinomio

$$R(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c,$$

¿Tal polinomio es único? Si no, mostrar (indicar, caracterizar) la forma general de tales polinomios.

7. El proceso de ortogonalización de Schmidt

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert con un producto escalar dado, y sea $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ una sucesión (posiblemente infinita) de vectores linealmente independientes (recordemos que los vectores son linealmente independientes si ninguna de sus combinaciones lineales se anula, a excepción de la combinación trivial donde todos los coeficientes son ceros).

Consideremos la sucesión de los subespacios anidados $H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \ldots \subset H_n \subset \ldots$, donde H_i es el subespacio, generado por los primeros i vectores de la sucesión $\{fi\}_{i=1}^{\infty}$. La inclusión de los subespacios va a ser estricta (i.e. $H_i \neq H_j \Leftrightarrow i \neq j$), ya

que cada vector consecutivo de la sucesión no se puede representar en la forma de una combinación lineal de los vectores precedentes. Aquí podemos plantearnos el siguiente problema: ¿Es posible construir una sucesión de vectores $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ tal que los primeros i vectores formen una base ortogonal en el subespacio $H_i (i = 1, 2, \ldots)$? El proceso de Schmidt da respuesta positiva a este problema, y también el método de la construcción de la sucesión.

El proceso de la ortogonalización de Schmidt consiste en lo siguiente. Como el subespacio H_1 está formado por vectores del tipo αf_1, tenemos que tomar como el vector e_1 un vector que es proporcional a f_1. Ponemos $e_1 = f_1$. El vector $e_2 \in H_2$, excepto por multiplicación de una constante, debe ser igual a $f_2 + \lambda_1^{(2)} e_1 = f_2 + \lambda_1^{(2)} f_1 \neq 0$ (porque f_1 y f_2 son linealmente independientes). La constante $\lambda_1^{(2)}$ puede ser encontrada de la condición $e_2 \perp e_1$:

$$0 = (e_2, e_1) = (f_2 + \lambda_1^{(2)} f_1, f_1) = (f_2, f_1) + \lambda_1^{(2)} (f_1, f_1),$$

i.e. $\lambda_1^{(2)} = -(f_2, f_1)(f_1, f_1)^{-1}$.

De nuevo podemos tomar el factor constante para $f_2 + \lambda_1^{(2)} f_1$ de una manera arbitraria; le ponemos 1. De esa manera

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2, f_1)}{(f_1, f_1)} \cdot f_1.$$

Analógamente, construimos $e_3, e_4, \ldots$ etcétera. Es decir, buscamos e_i en la forma

$$e_i = f_i + \sum_{k=1}^{i-1} \lambda_k^{(i)} e_k \neq 0.$$

Encontramos los coeficientes $\lambda_k^{(i)}$ de la condición de la ortogonalidad de los vectores e_i y $e_k \quad (k = 1, 2, \ldots, i-1)$:

$$0 = (e_i, e_k) = (f_i, e_k) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j^{(i)} (e_j, e_k) = (f_i, e_k) + \lambda_k^{(i)} (e_k, e_k)$$

(ya que $(e_j, e_k) = 0, j \neq k$), de donde obtenemos que

$$\lambda_k^{(i)} = -\frac{(f_i, e_k)}{(e_k, e_k)}.$$

De esta forma, construimos la sucesión de los vectores ortogonales $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. El espacio, generado por los primeros i vectores $e_1, e_2, \ldots, e_i$, coincide con H_i y, consiguientemente, estos vectores forman en H_i una base ortogonal. Así resolvemos el problema planteado.

Nota. Es evidente que cualquier sucesión $\{\alpha_i e_i\}$ va a tener las mismas propiedades básicas, donde $\{\alpha_i\}$ es una sucesión de números arbitrarios, que no sean cero.

En particular, si tomamos $\alpha_i = \pm\|e_i\|^{-1}$, entonces vamos a obtener una sucesión de los vectores $\{e_i^*\}$, donde los primeros n vectores forman una base ortonormal en $H_n (n = 1, 2, \ldots)$. Aquí, construyendo una base ortonormal por el método de Schmidt, todavía tenemos libertad para escoger el signo " + " o " − " del coeficiente α_i.

Consideremos, ahora, el espacio $\mathbb{P}_N$ de los polinomios de grado $\leq N - 1$ con el producto escalar (6.2). Según el teorema de la Sección 6, la sucesión de los polinomios $\{P_i(\lambda)\}_{i=0}^{N-1}$, generados por la matriz de Jacobi J, es una base ortonormal, construida por el proceso de la ortogonalización de Schmidt de la base, formada en el espacio $\mathbb{P}_N$ por los polinomios $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{N-1}$. El método de la reconstrucción de la matriz de Jacobi, que vamos a ver en la Sección 8, se basa en esta propiedad de los polinomios generados por la matriz de Jacobi.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Ortonormalizar con el método de Schmidt el sistema de los vectores

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ \vec{e}_2 &= (1, 1, 0, \ldots, 0) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n &= (1, 1, 1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

con el producto escalar ordinario.

2. Con ayuda de la ortogonalización de Schmidt construir una base del sistema de los vectores

$$P_j = \lambda^j, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

si el producto escalar es dado en forma (6.2), donde

a) $\rho(\lambda) = \lambda, \qquad \lambda \in (0, 1);$

b) $$\rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ 1, & 0 < \lambda < 1, \\ 2, & 1 < \lambda < 2, \\ 3, & 2 < \lambda; \end{cases}$$

c) $\rho(\lambda)$ tiene la forma como en el ejercicio cuatro de la Sección 5,

d) $\rho(\lambda) = \lambda, \qquad \lambda \in [-1, 1].$

3. En el espacio de los polinomios con el producto escalar

$$a) \quad (P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\overline{Q(x)}dx;$$

$$b) \quad (P, Q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)\overline{Q(x)}}{\sqrt{1 - x^2}}dx,$$

ortogonalizando la base $1, x, x^2, \ldots$ encontrar los primeros cuatro elementos.

4. **Definición**. El determinante de Gram de los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ es el determinante:

$$G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = \begin{pmatrix} (\vec{a}_1, \vec{a}_1) & (\vec{a}_1, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_1, \vec{a}_k) \\ (\vec{a}_2, \vec{a}_1) & (\vec{a}_2, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_2, \vec{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{a}_k, \vec{a}_1) & (\vec{a}_k, \vec{a}_2) & \ldots & (\vec{a}_k, \vec{a}_k) \end{pmatrix}$$

Demostrar que el determinante de Gram no cambia cuando aplicamos a los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ el proceso de ortogonalización.

5. Demostrar que el determinante de Gram $G(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k) = 0$ si los vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ son linealmente dependientes, y es positivo si ellos son linealmente independientes.

Sugerencia. Mostrar que el determinante de Gram es igual al cuadrado del módulo del determinante, formado de las coordenadas de los vectores en cualquier base ortonormal del subespacio k-dimensional, que contiene estos vectores.

6. Sea $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ un sistema de los vectores linealmente independientes. Demostrar que los vectores ortonormales $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$, obtenidos de $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_n$ por el proceso de ortonormalización, tienen la forma:

$$\vec{e}_k = \frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}} \begin{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_1) & \cdots & (\vec{g}_k, \vec{g}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\vec{g}_1, \vec{g}_1) & (\vec{g}_2, \vec{g}_{k-1}) & \cdots & (\vec{g}_k, \vec{g}_{k-1}) \\ \vec{g}_1 & \vec{g}_2 & \cdots & \vec{g}_k \end{vmatrix},$$

donde $G_0 = 1, G_k = G(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k)$ – el determinante de Gram de los vectores $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_k$, $\|\vec{e}_k\|^2 = G(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_k)\,[G(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{k-1})]^{-1}$.

7. Demostrar que el sistema de polinomios $\{P_j(\lambda)\}$, ortonormalizado según el producto escalar (6.2), tiene forma

$$P_j(\lambda) = \frac{D_j(\lambda)}{\sqrt{D_j D_{j-1}}}, \tag{7.1}$$

donde

$$D_j(\lambda) = -\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{j-1} & s_j & s_{j+1} & \cdots & s_{2j-1} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^j \end{vmatrix}, \tag{7.2}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_j & s_{j+1} & s_{j+2} & \cdots & s_{2j} \end{vmatrix}, \tag{7.3}$$

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} \lambda^j d\rho(\lambda) \tag{7.4}$$

Sugerencia. Considerar primeramente los polinomios ortogonales (pero no normalizados)

$$\tilde{P}_h(\lambda) = \lambda^h + c_{h-1}^{(h)}\lambda^{h-1} + \ldots + c_0^{(h)}. \tag{7.5}$$

La condición de la ortogonalidad de $\tilde{P}_h(\lambda)$ a $\lambda^k (k = 0, 1, \ldots, h-1)$, junto con la igualdad (7.5), da un sistema de h ecuaciones para $c_i^{(h)} (i = 0, 1, \ldots, h-1)$ y $c_h^{(h)} = 1$:

$$\begin{gathered} c_0^{(h)} s_0 + c_1^{(h)} s_1 + \ldots + 1 \cdot s_h = 0 \\ c_0^{(h)} s_1 + c_1^{(h)^1} s_2 + \ldots + 1 \cdot s_{h+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0^{(h)} \cdot 1 + c_1^{(h)} \lambda + \ldots + 1(\lambda^h - \tilde{P}_h(\lambda)) = 0 \end{gathered}$$

(para las anotaciones ver (7.4)).

Como el sistema tiene una solución no-trivial $(c_h^{(h)} = 1)$, entonces

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots\cdots & s_j \\ s_1 & s_2 & \cdots\cdots & s_{j+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ s_{h-1} & s_h & \cdots\cdots & s_{2h-1} \\ 1 & \lambda & \cdots\cdots & \left(\lambda^h - \tilde{P}_h(\lambda)\right) \end{vmatrix} = 0$$

Representar este determinante en forma de la suma de dos determinantes (dividiendo la última línea por $1, \lambda, \ldots, \lambda_h$ y $0, 0, \ldots, \tilde{P}_h(\lambda)$, obtenemos la expresión para $\tilde{P}_h(\lambda)$).

Más adelante, calculando la norma del polinomio $P_h^*(\lambda) = D_{h-1}\tilde{P}_h(\lambda)$ encontraremos $\|P_h^*(\lambda)\|^2 = D_h D_{h-1}$, de donde obtendremos (7.1).

8. La construcción de una matriz de Jacobi a partir de su función espectral

Consideramos una función escalón arbitraria no–decreciente $\rho(\lambda)$, con saltos en puntos $\lambda_k (0 \le k \le N-1, 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1} < \infty)$ normalizada por las condiciones $\rho(\lambda) = 0$ para $\lambda < \lambda_0$ y $\rho(\lambda) = 1$ para $\lambda > \lambda_{N-1}$.

Denotamos por $\mathbb{P}_N(\rho)$ un espacio de Hilbert, cuyos elementos son los polinomios del grado $\le N-1$, y el producto escalar es determinado por la igualdad

$$\left(Q(\lambda), R(\lambda)\right)_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}d\rho(\lambda).$$

Los monomios $1, \lambda, \ldots, \lambda^{N-1}$ forman una base en este espacio, de la cual por el proceso de ortogonalización de Schmidt obtenemos una base ortogonal:

$$\hat{P}_0(\lambda) \equiv 1, \quad \hat{P}_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} \lambda^j \quad (1 \le k \le N-1).$$

Por consecuencia, los polinomios

$$P_k(\lambda) = (-1)^k \hat{P}_k(\lambda)\left(\hat{P}_k(\lambda), \hat{P}_k(\lambda)\right)_\rho^{-1/2} \quad (0 \le k \le N-1) \tag{8.1}$$

forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_N(\rho)$:

$$\left(P_k(\lambda), P_i(\lambda)\right)_\rho = \delta_{ki} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \ne j \end{cases}.$$

Como los polinomios $\lambda P_k(\lambda)$ tienen grado $k+1$, ellos pertenecen al espacio $\mathbb{P}_N(\rho)$ para $k \le N-2$. Por eso

$$\lambda P_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{(k)} P_i(\lambda) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-2), \tag{8.2}$$

donde $\alpha_i^{(k)} = \left(\lambda P_k(\lambda), P_i(\lambda)\right)_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_k(\lambda)\overline{P_i(\lambda)}d\rho(\lambda) = \left(\overline{\lambda P_i(\lambda), P_k(\lambda)}\right)_\rho = \overline{\alpha}_k^{(i)}$.

Como los polinomios $P_j(\lambda)$ son ortogonales a todos los polinomios del grado menor que j, tenemos $\alpha_i^{(k)} = 0$, si $i > k+1$ ó $k > i+1$, de donde vemos que la expansión (8.2) tiene la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{\lambda(-1)^k \hat{P}_k(\lambda)}{\|\hat{P}_k(\lambda)\|}, \frac{(-1)^{k+1}\hat{P}_{k+1}(\lambda)}{\|\hat{P}_{k+1}(\lambda)\|} \right\rangle = \frac{-\langle \lambda \hat{P}_k, \hat{P}_{k+1} \rangle}{\|\hat{P}_k(\lambda)\|\|\hat{P}_{k+1}(\lambda)\|}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda P_0(\lambda) &= \alpha_0^{(0)} P_0(\lambda) + \alpha_1^{(0)} P_1(\lambda)\\
\lambda P_k(\lambda) &= \alpha_{k-1}^{(k)} P_{k-1}(\lambda) + \alpha_k^{(k)} P_k(\lambda) + \alpha_{k+1}^{(k)} P_{k+1}(\lambda) \qquad (1 \le k \le N-2).
\end{aligned}
$$

Denotando

$$
\begin{aligned}
a_k &= \big(\lambda P_k(\lambda), P_k(\lambda)\big)_\rho &&= \alpha_k^{(k)}\\
b_k &= \big(\lambda P_k(\lambda), P_{k+1}(\lambda)\big)_\rho &&= \alpha_{k+1}^{(k)} = \overline{\alpha}_k^{(k+1)},
\end{aligned}
$$

obtenemos que los polinomios satisfacen las igualdades de recurrencia

$$
b_{k-1} P_{k-1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_k P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda) \quad (0 \le k \le N-2),
$$

donde $P_0(\lambda) \equiv 1$ y $b_{-1} = 0$. Los coeficientes a_k y b_k en estas igualdades son reales y $a_k > 0, b_k < 0$ $(0 \le k \le N-2)$. De hecho la positividad de los números a_k se ve de la fórmula

$$
a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_k(\lambda) \overline{P_k(\lambda)} d\rho(\lambda),
$$

dándose cuenta de que los saltos de la función no–decreciente $\rho(\lambda)$ se sitúan en el semieje positivo. Además, comparando los coeficientes con λ_{k+1} de los polinomios $\lambda P_k(\lambda)$ y $P_{k+1}(\lambda)$, encontramos, según (8.2), que

$$
\lambda P_k(\lambda) = -\frac{\|\hat{P}_{k+1}(\lambda)\|_\rho}{\|\hat{P}_k(\lambda)\|_\rho} P_{k+1}(\lambda) + R_k(\lambda),
$$

donde $R_k(\lambda)$ es un polinomio de grado $\le k$. Por eso $\big(R_k(\lambda), P_{k+1}(\lambda)\big)_\rho = 0$, y

$$
b_k = \big(\lambda P_k(\lambda), P_{k+1}(\lambda)\big)_\rho = -\frac{\|\hat{P}_{k+1}(\lambda)\|_\rho}{\|\hat{P}_k(\lambda)\|_\rho} < 0.
$$

De esta manera, los polinomios $P_k(\lambda)$ son generados por la siguiente matriz de Jacobi

$$
J = \begin{pmatrix}
a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0\\
b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1}
\end{pmatrix} \qquad (a_k > 0, b_k < 0),
$$

donde, por definición[4]

[4]No se puede expresar a_{N-1} por el producto escalar $\big(\lambda P_{N-1}(\lambda), \lambda P_{N-1}(\lambda)\big)_\rho$, porque está determinado en el espacio $\mathbb{P}_N(\rho)$, y el polinomio $\lambda P_{N-1}(\lambda)$ no pertenece a este espacio. Sin embargo, la expresión $a_{N-1} = \int \lambda P_{N-1}(\lambda)\overline{P_{N-1}(\lambda)} d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j |P_{N-1}(\lambda_j)|^2 \cdot \delta_j$ donde $\delta_j = \Delta\rho(\lambda_j)$ son saltos de la función $\rho(\lambda)$ en los puntos λ_j, naturalmente tiene sentido, y al mismo tiempo $a_{N-1} > 0$.

$$
a_{N-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_{N-1}(\lambda) \overline{P_{N-1}(\lambda)} d\rho(\lambda). \tag{8.3}
$$

Mostremos, ahora, que la función espectral $\rho_J(\lambda)$ de esta matriz coincide con la función $\rho(\lambda)$. En la sección anterior fue establecido que la función $\rho_J(\lambda)$ es escalón, no–decreciente; sus saltos se sitúan en las raíces del polinomio

$$
Q_N(\lambda) = \lambda P_{N-1}(\lambda) - a_{N-1} P_{N-1}(\lambda) - b_{N-2} P_{N-2}(\lambda) \tag{8.4}
$$

y los polinomios $P_k(\lambda)(0 \le k \le N-1)$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_N(\rho_J)$. Pero según la construcción los mismos polinomios forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_N(\rho)$. Por consecuencia, las funciones $\rho_J(\lambda)$ y $\rho(\lambda)$ generan en el espacio $\mathbb{P}_N$ el mismo producto escalar, esto es,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)} d\rho_J(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)} d\rho(\lambda) \tag{8.5}
$$

para todos los polinomios $Q(\lambda), R(\lambda)$ del grado $\le N-1$.

Multiplicando las dos partes de la igualdad (8.4) por $\overline{P_j(\lambda)}$ e integrando por la medida $d\rho(\lambda)$, encontramos que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} Q_N(\lambda)\overline{P_j(\lambda)} d\rho(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_{N-1}(\lambda)\overline{P_j(\lambda)} d\rho(\lambda) -\\
-a_{N-1}\big(P_{N-1}(\lambda), P_j(\lambda)\big)_\rho &- b_{N-2}\big(P_{N-2}(\lambda), P_j(\lambda)\big)_\rho.
\end{aligned}
$$

Si $j < N-2$, todos los tres sumandos en la parte derecha de esta igualdad se anulan. Si $j = N-2$,

$$
\big(P_{N-1}(\lambda), P_{N-2}(\lambda)\big)_\rho = 0, \ \big(P_{N-2}(\lambda), P_{N-2}(\lambda)\big)_\rho = 1, \ \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_{N-1}(\lambda)\overline{P_{N-2}(\lambda)} d\rho(\lambda) = b_{N-2},
$$

y la parte derecha de nuevo se anula. Finalmente, si $j = N-1$, $\big(P_{N-2}(\lambda), P_{N-1}(\lambda)\big)_\rho = 0$, así que en este caso también la parte derecha se anula. Por consecuencia,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} Q_N(\lambda)\overline{P_j(\lambda)} d\rho(\lambda) = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \dots, N-1,
$$

y, como los polinomios $P_j(\lambda)$ forman base en el espacio $\mathbb{P}_N$,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} Q_N(\lambda)\overline{R(\lambda)} d\rho(\lambda) = 0
$$

para todos $R(\lambda) \in \mathbb{P}_N$. En particular, tomando $R(\lambda) = \prod_{j \neq j_0} (\lambda - \lambda_j)$, donde $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-1}$ son los puntos de los saltos de la función $\rho(\lambda)$, encontramos que

$$Q_N(\lambda_{j_0}) \prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j) \Delta_{j_0} = 0,$$

donde $\Delta_{j_0} = \Delta\rho(\lambda_{j_0})$ es el valor del salto de la función en el punto λ_{j_0}. Como $\prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)\Delta_{j_0} \neq 0$ tenemos $Q_N(\lambda_{j_0}) = 0$, lo que implica que los puntos λ_i son las raíces del polinomio $Q_N(\lambda)$. Consiguientemente, los saltos de la función espectral $\rho_J(\lambda)$ se encuentran en los mismos puntos, donde se encuentran los saltos de la función $\rho(\lambda)$ (esto es, en los puntos $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1}$).

Por eso, poniendo en la igualdad (8.5) $Q(\lambda) = R(\lambda) = \prod_{i \neq j_0} (\lambda - \lambda_i)$, encontramos que

$$\prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0}(J) = \prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0},$$

lo que quiere decir que $\Delta_{j_0}(J) = \Delta_{j_0}$, donde $\Delta_{j_0}(J), \Delta_{j_0}$, son los saltos de las funciones $\rho_J(\lambda)$ y $\rho(\lambda)$, respectivamente, en el punto λ_{j_0}.

Así pues, las funciones escalones no–decrecientes $\rho(\lambda)$ y $\rho_J(\lambda)$ tienen los mismos puntos de ruptura y los mismos saltos en estos puntos, de donde, tomando en cuenta la normalización, vemos que $\rho(\lambda) \equiv \rho_J(\lambda)$.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Demostrar que si $\rho(\lambda)$ es una función escalón no–decreciente con saltos en los puntos $\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-1}$ ($\rho(\lambda) = 0$ para $\lambda < \lambda_0$ y $\rho(\lambda) = 1$ para $\lambda > \lambda_{N-1}$), y $\{P_j(\lambda)\}$ es un sistema de polinomios, ortonormal por la medida $d\rho(\lambda)$, obtenida por medio de ortonormalización del sistema $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{N-1}$, entonces

$$d\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}$$

2. Reconstruir la matriz de Jacobi por su función espectral

$$a)\ \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 0, \\ 1/2, & 0 < \lambda < 1, \\ 1, & 1 < \lambda; \end{cases}$$

$$b)\ \rho(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < 1, \\ \rho_1, & 1 < \lambda < 2, \\ \rho_2, & 2 < \lambda < 3, \\ 1, & 3 < \lambda. \end{cases}$$

9. La reconstrucción de la matriz de Jacobi por dos espectros

Antes de formular el problema matemático, que vamos a resolver en esta sección, consideremos la situación física que lleva a él.

Supongamos que tenemos un sistema de masas y resortes del tipo considerado en la Sección 1, pero tal que no podemos medir directamente sus parámetros (las masas, las longitudes y las rigideces de los resortes). Supongamos que sólo podemos medir las frecuencias de vibraciones propias del sistema, enganchando a la derecha del sistema diferentes resortes de parámetros también desconocidos. En la Figura 9.1 la situación está esquemáticamente representada de la siguiente manera:

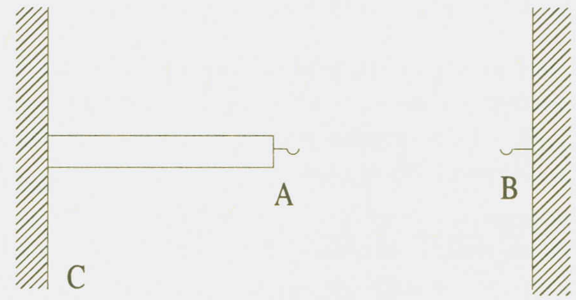

Figura 9.1

entre los puntos C y A se encuentran las masas y los resortes, inaccesibles para nosotros; podemos enganchar resortes diferentes entre los puntos A y B y, sacando el sistema del equilibrio, medir las frecuencias de sus vibraciones propias. Se requiere reconstuir los parámetros del sistema.

Resulta que esto se puede hacer por los resultados de dos experimentos: enganchando dos resortes diferentes entre los puntos A y B y midiendo las frecuencias.

Pasamos al planteamiento matemático del problema. La presencia del sistema mecánico del tipo representado en la Figura 9.1 significa que tenemos una cierta matriz de Jacobi J del tipo (3.2) con los elementos $\{a_i\}_{i=0}^{N-1}$ y $\{b_i\}_{i=0}^{N-2}$ desconocidos. La dimensión de la matriz es igual a la cantidad de las masas. Por consecuencia, esta dimensión es conocida. Ponemos que es igual a N. Enganchando resortes diferentes entre los puntos A y B, sólo cambiamos en la matriz un elemento a_{N-1} (ver (3.2)). Consiguientemente, los resultados de los experimentos consisten en que conocemos los espectros $\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-1}$ y $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=0}^{N-1}$ de dos matrices del tipo (3.2), cuyos elementos, a excepción de a_{N-1} y $\tilde{a}_{N-1}$, son iguales. Se necesita reconstruir las matrices.

Consideramos, primeramente, el problema directo de la dependencia del espectro del último elemento a_{N-1}.

Lema 2 *Si tenemos dos matrices J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2), cuyos elementos son los mismos a excepción de $a_{N-1} \neq \tilde{a}_{N-1}$, entonces sus espectros $\{\lambda_i\}_{i=0}^{N-1}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=0}^{N-1}$ se intercalan. Aquí, si $\tilde{a}_{N-1} > a_{N-1}$, entonces*

$$\lambda_0 < \tilde{\lambda}_0 < \lambda_1 < \tilde{\lambda}_1 < \ldots < \lambda_{N-1} < \tilde{\lambda}_{N-1},$$

DEMOSTRACIÓN. Los vectores propios de las matrices J y $\tilde{J}$ son las raíces de los polinomios característicos

$$Q_N(\lambda) = \lambda P_{N-1}(\lambda) - a_{N-1}P_{N-1}(\lambda) - b_{N-2}P_{N-2}(\lambda), \tag{9.1}$$

$$\tilde{Q}_N(\lambda) = \lambda P_{N-1}(\lambda) - \tilde{a}_{N-1}P_{N-1}(\lambda) - b_{N-2}P_{N-2}(\lambda) \tag{9.2}$$

(ver la Sección 4, la fórmula (4.5)), y al mismo tiempo, como todos los elementos de las dos matrices, a excepción de a_{N-1} y $\tilde{a}_{N-1}$, son los mismos, entonces los polinomios $\{P_j(\lambda)\}$ $(j = 0, \ldots, N-1)$, generados por las matrices, también son los mismos. Para estos polinomios la fórmula (5.4) es cierta:

$$\begin{aligned} 1 \le \sum_{j=0}^{N-1} P_k^2(\lambda) &= Q'_N(\lambda)P_{N-1}(\lambda) - Q_N(\lambda)P'_{N-1}(\lambda) = \\ &= \tilde{Q}'_N(\lambda)P_{N-1}(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda)P'_{N-1}(\lambda). \end{aligned} \tag{9.3}$$

Sustrayendo (9.2) de (9.1) obtenemos

$$Q_N(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda) = (\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1})P_{N-1}(\lambda),$$

de donde

$$P_{N-1}(\lambda) = \frac{Q_N(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda)}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}. \tag{9.4}$$

Sustituyendo esta expresión en (9.3) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 < \sum_{j=0}^{N-1} P_k^2(\lambda) &= \frac{1}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}\Big[Q'_N(\lambda)\big(Q_N(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda)\big) - Q_N(\lambda)\big(Q'_N(\lambda) - \tilde{Q}'_N(\lambda)\big)\Big] \\ &= \frac{Q_N(\lambda)\tilde{Q}'_N(\lambda) - Q'_N(\lambda)\tilde{Q}_N(\lambda)}{Q_N^2(\lambda)} \cdot \frac{Q_N^2(\lambda)}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}} = \left(\frac{\tilde{Q}_N(\lambda)}{Q_N(\lambda)}\right)' \frac{Q_N^2(\lambda)}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}. \end{aligned}$$

De esta manera, la derivada del quebrado $\tilde{Q}_N(\lambda)Q_N^{-1}(\lambda)$ conserva su signo (además, si $\tilde{a}_{N-1} > a_{N-1}$, esta derivada es positiva). Como el coeficiente mayor de los polinomios $\tilde{Q}_N(\lambda)$ y $Q_N(\lambda)$ es el mismo, para $\lambda \to -\infty, \tilde{Q}_N(\lambda)Q_N^{-1}(\lambda) \to 1$ y, por consecuencia, la función $\psi(\lambda) = \tilde{Q}_N(\lambda)Q_N^{-1}(\lambda)$ puede ser esquemáticamente representada por la gráfica

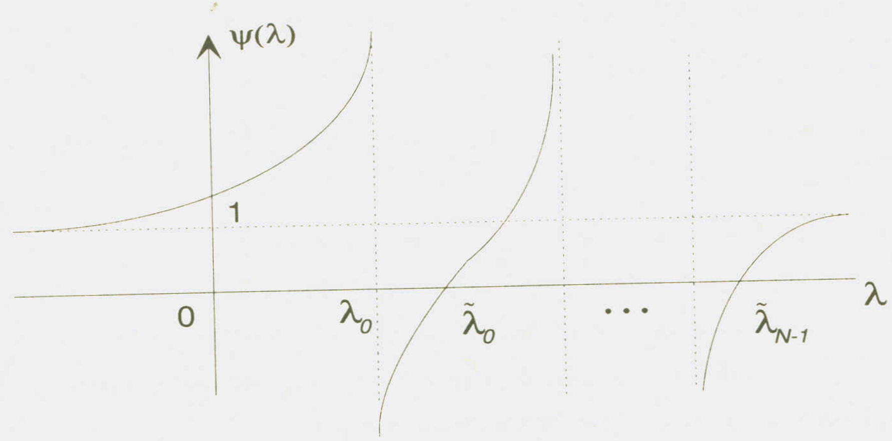

Figura 9.2

de la Figura 9.2, donde $\{\tilde{\lambda}_j\}_{j=0}^{N-1}$ son sus ceros, y $\{\lambda_j\}_{j=0}^{N-1}$ son sus puntos de ruptura (los ceros del denominador).

Vemos que entre dos ceros vecinos de la función $\psi(\lambda)$ necesariamente hay un punto de ruptura, y entre dos puntos de ruptura hay un cero. El primero en el eje λ de estos puntos es el punto λ_0 (porque del valor $+1$ para $\lambda = -\infty$ la función crece monótonamente hasta el punto de ruptura).

□

En conclusión escribimos la fórmula siguiente, obtenida durante la demostración, porque la necesitaremos después:

$$\sum_{j=0}^{N-1} P_j^2(\lambda) = \frac{1}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}\left[Q_N(\lambda)\tilde{Q}'_N(\lambda) - Q'_N(\lambda)\tilde{Q}_N(\lambda)\right]. \tag{9.5}$$

Pasamos, ahora, a la consideración del problema principal de la sección. Supongamos que tenemos dos conjuntos de números $\{\lambda_i\}_{i=0}^{N-1}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=0}^{N-1}$, tales que

$$0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda}_0 < \lambda_1 < \tilde{\lambda}_1 < \ldots < \lambda_{N-1} < \tilde{\lambda}_{N-1} < \infty.$$

Se requiere establecer:

1. ¿Existen las matrices de Jacobi J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2), que se distinguen sólo por el elemento $\tilde{a}_{N-1} \neq a_{N-1}$, para las cuales $\{\lambda_i\}_{i=0}^{N-1}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}_{i=0}^{N-1}$ son valores propios?;
2. Si tales matrices existen, ¿se determinan ellas por sus conjuntos de valores propios unívocamente? y

3. Mostrar el método de la reconstrucción de las matrices.

La respuesta positiva para las dos primeras preguntas se da por el siguiente teorema:

Teorema 2 *Para cualesquiera de los dos conjuntos* $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ *que satisfacen la condición*

$$0 < \lambda_0 < \tilde{\lambda}_0 < \lambda_1 < \tilde{\lambda}_1 < \ldots < \lambda_{N-1} < \tilde{\lambda}_{N-1} < \infty.$$

existen dos matrices J *y* $\tilde{J}$ *de la forma (3.2), cuyos elementos* $a_i = \tilde{a}_i, b_i = \tilde{b}_i \cdot (i = 0, 1, \ldots, N-2), \tilde{a}_{N-1} > a_{N-1}$ *son tales que* $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ *son valores propios de la matriz* J*, y* $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ *son valores propios de la matriz* $\tilde{J}$*. Aquí a cada par de valores propios* $\left\{\lambda_i\right\}, \left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ *corresponde sólo un par de las matrices* J *y* $\tilde{J}$*.*

Demostración. Según los resultados de la Sección 8, para demostrar el teorema es suficiente demostrar que los conjuntos $\left\{\lambda_i\right\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ determinan unívocamente las funciones espectrales $\rho(\lambda)$ y $\tilde{\rho}(\lambda)$ de las matrices J y $\tilde{J}$.

Haremos la demostración en dos etapas. Primero suponemos que los conjuntos $\left\{\lambda_i\right\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ son los espectros de ciertas matrices J y $\tilde{J}$ de la forma necesaria y demostramos que las matrices se reconstruyen por los espectros unívocamente. Luego vamos a considerar conjuntos arbitrarios, que satisfacen el teorema, y demostraremos que son los espectros de las matrices J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2).

Así, sean $\left\{\lambda_i\right\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ los espectros de ciertas matrices J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2) y $\tilde{a}_{N-1} \neq a_{N-1}$. Las funciones espectrales $\rho(\lambda)$ y $\tilde{\rho}(\lambda)$ de estas matrices tienen saltos en los puntos $\left\{\lambda_i\right\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$, respectivamente, y, por consecuencia, sólo tenemos que demostrar que los valores de los saltos $\rho(\lambda_i + 0) - \rho(\lambda_i - 0)$ y $\tilde{\rho}(\lambda_i + 0) - \tilde{\rho}(\lambda_i - 0)$ se determinan unívocamente por el par de los espectros.

Para eso, según (6.1) tenemos que demostrar que se determinan unívocamente los valores

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_i), \qquad \sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\tilde{\lambda}_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-1).$$

(Como ya se notó durante la demostración del lema de la Sección 8, los sistemas de los polinomios, generados por las matrices J y $\tilde{J}$, coinciden).

Sabiendo los valores propios de las matrices J y $\tilde{J}$ podemos escribir los polinomios característicos $Q(\lambda)$ y $\tilde{Q}(\lambda)$, excepto por la multiplicación con un valor constante (también, como se ve de (9.1) y (9.2), este valor constante es el mismo para los dos polinomios):

$$Q(\lambda) = \alpha \prod_{i=0}^{N-1} (\lambda - \lambda_i), \quad \tilde{Q}(\lambda) = \alpha \prod_{i=0}^{N-1} (\lambda - \tilde{\lambda}_i)$$

Ahora, de la fórmula (9.5) obtenemos

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda) = \beta\phi(\lambda),$$

donde $\beta = \alpha^2(\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1})^{-1}$ es una constante desconocida y

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= \frac{1}{\alpha^2}\left\{\tilde{Q}'_N(\lambda)Q_N(\lambda) - Q'_N(\lambda)\tilde{Q}_N(\lambda)\right\} = \\ &= \left\{\Big(\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)\Big)' \cdot \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \Big(\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)\Big)' \cdot \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)\right\} \end{aligned} \tag{9.6}$$

es una función conocida.

De esta manera

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_i) = \beta\phi(\lambda_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Tomando en cuenta (6.4) obtenemos

$$1 = \sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\beta\phi(\lambda_j)} = \frac{1}{\beta}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\phi(\lambda_j)},$$

de donde $\beta = \sum\limits_{j=0}^{N-1} \frac{1}{\phi(\lambda_j)}$, esto es,

$$\rho(\lambda_i + 0) - \rho(\lambda_i - 0) = \left\{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_i)\right\}^{-1} = \frac{1}{\phi(\lambda_i)}\left\{\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{\phi(\lambda_j)}\right\}^{-1}. \tag{9.7}$$

De esta forma, la función espectral $\rho(\lambda)$ se reconstruye unívocamente por un par de espectros (la función $\tilde{\rho}(\lambda)$ se reconstruye análogamente). La primera parte del teorema está demostrada.

Suponemos, ahora, que tenemos un par arbitrario de conjuntos $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$, que satisfacen las condiciones del teorema. Construimos una función escalón $\rho(\lambda)$, que tiene en los puntos $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ saltos, determinados por la fórmula (9.7) (y $\rho(\lambda) = 0$ para $\lambda < \lambda_0$). Entonces, de acuerdo con los resultados de la Sección 8, a partir de esta función espectral se reconstruye unívocamente la matriz J, para la cual $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ son los valores propios. Consiguientemente, ahora, conocemos a_{N-1} y α - el coeficiente del término λ^N del polinomio $Q_N(\lambda)$. Construimos la matriz $\tilde{J}$ reemplazando en la matriz J el elemento a_{N-1} por $\tilde{a}_{N-1} = a_{N-1} + \alpha^2 \cdot \beta^{-1}$ y demostramos que $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ son los valores propios de la matriz $\tilde{J}$ y, por consecuencia, $\left\{\lambda_i\right\}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}$ ciertamente son los espectros de las matrices J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2).

Sea $Q^*(\lambda)$ la función característica de la matriz $\tilde{J}$. Entonces

$$Q^*(\lambda) = \lambda P_{N-1}(\lambda) - \tilde{a}_{N-1}P_{N-1}(\lambda) - b_{N-2}P_{N-2}(\lambda).$$

(Los polinomios, generados por las matrices J y $\tilde{J}$, son los mismos). Vamos a demostrar que el polinomio $Q^*(\lambda)$ tiene raíces $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$, esto es

$$Q^*(\lambda) = \tilde{Q}(\lambda) = \alpha \prod_{i=0}^{N-1} (\lambda - \tilde{\lambda}_i).$$

De (9.6) tenemos (según la construcción de la matriz J):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta\rho(\lambda_j)} = \sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j) &= \beta\left\{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda_j - \lambda_i)\Big(\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda_j - \tilde{\lambda}_i)\Big)' - \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda_j - \tilde{\lambda}_i)\Big(\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda_j - \lambda_i)\Big)'\right\} = \\
&= \frac{\beta}{\alpha^2}\left\{Q_N(\lambda_j)\tilde{Q}'_N(\lambda_j) - \tilde{Q}_N(\lambda_j)Q'_N(\lambda_j)\right\} \\
&= \frac{\beta}{\alpha^2}\tilde{Q}_N(\lambda_j)Q'_N(\lambda_j),
\end{aligned}$$

por otro lado, de (9.5) vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j) &= \frac{1}{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}\Big[Q_N(\lambda)Q_N^{*\prime}(\lambda) - Q'_N(\lambda)Q_N^*(\lambda)\Big] = \\
&= \frac{1}{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}\Big[Q_N(\lambda)Q_N^{*\prime}(\lambda) - Q'_N(\lambda)Q_N^*(\lambda)\Big],
\end{aligned}$$

y si $\lambda = \lambda_j$,

$$\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j) = \frac{\beta^2}{\alpha}Q'_N(\lambda_j)Q_N^*(\lambda_j),$$

esto es, en N puntos $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{N-1}$

$$\frac{\beta}{\alpha^2}\tilde{Q}_N(\lambda_j)Q'_N(\lambda_j) = \frac{\beta^2}{\alpha}Q'_N(\lambda_j)Q_N^*(\lambda_j).$$

Como $Q'_N(\lambda_j) \neq 0$ (Sección 5),

$$\tilde{Q}_N(\lambda_j) - Q_N^*(\lambda_j) = 0, \qquad (j = 0, 1, \ldots, N-1)$$

Los coeficientes del término de mayor grado de los polinomios $\tilde{Q}_N(\lambda)$ y $Q_N^*(\lambda)$ son los mismos. Por eso el grado $\deg(\tilde{Q}_N(\lambda) - Q_N^*(\lambda)) \leq N-1$, esto es, tenemos un polinomio de grado $\leq N-1$ que se anula en N puntos $\lambda_0 < \ldots < \lambda_{N-1}$.

Así

$$Q_N^*(\lambda) \equiv \tilde{Q}_N(\lambda).$$

De esta manera, los números $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ son los valores propios de la matriz $\tilde{J}$ y, como los polinomios $P_k(\lambda)$, generados por las matrices J y $\tilde{J}$ coinciden, entonces, la función espectral $\tilde{\rho}(\lambda)$ corresponde unívocamente a la matriz $\tilde{J}$, y $\tilde{\rho}(\lambda)$ tiene saltos en los puntos $\left\{\tilde{\lambda}_j\right\}_{j=0}^{N-1}$ iguales a

$$\tilde{\rho}(\tilde{\lambda}_j + 0) - \tilde{\rho}(\tilde{\lambda}_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N-1} P_k^2(\lambda_j)} = \frac{1}{\phi(\tilde{\lambda}_j)\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\phi(\tilde{\lambda}_i)}} \quad \big(\tilde{\rho}(\lambda) \equiv 0, \lambda < \lambda_0\big).$$

El hecho de que $\tilde{a}_{N-1} > a_{N-1}$ es consecuencia del lema de la Sección 9, ejercicio uno.

El teorema está demostrado.

□

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Demostrar que si los conjuntos $\left\{\lambda_j\right\}_{j=0}^{N-1}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_j\right\}_{j=0}^{N-1}$ satisfacen las condiciones del teorema de la Sección 9, entonces en las matrices J y $\tilde{J}$, reconstruidos por ellos, los últimos elementos diagonales satisfacen la desigualdad.

$$\tilde{a}_{N-1} > a_{N-1}.$$

2. Reconstruir las matrices de Jacobi por sus espectros: $\{0; 1; 2\}$ y $\{0.5; 1.5; 2.5\}$.

10. La reconstrucción de la matriz de Jacobi por dos espectros (continuación)

En la Sección 9 mostramos que el par de las matrices J y $\tilde{J}$ de tipo (3.2), que se distinguen sólo por un elemento $a_{N-1} \neq \tilde{a}_{N-1}$, se puede reconstruir unívocamente por sus espectros $\left\{\lambda_i\right\}_{i=0}^{N-1}$ y $\left\{\tilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{N-1}$. Durante el proceso de la demostración vemos un método sobre la reconstrucción de las matrices por sus espectros: construimos la función $\phi(\lambda)$ de la forma (9.6), luego encontramos $\rho(\lambda)$ de $\phi(\lambda)$ con ayuda de (9.7), después, utilizando el proceso de ortogonalización de Schmidt, obtenemos el sistema de los polinomios $P_i(\lambda)$ y, por fin, econtramos las matrices J y $\tilde{J}$. Este método de la reconstrucción de las matrices es realizable, pero es demasiado largo; no lo usamos más que para la demostración del teorema principal. La reconstrucción práctica de las matrices J y $\tilde{J}$ se puede hacer inmediatamente por los espectros mucho más rápidamente.

Consideremos la igualdad (4.5). Dividiéndola por $P_{N-1}(\lambda)$, tenemos

$$\frac{Q_N(\lambda)}{P_{N-1}} = \lambda - a_{N-1} - \frac{b_{N-2}^2}{\psi_{N-2}(\lambda)}, \tag{10.1}$$

donde

$$\psi_{N-2}(\lambda) = \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_{N-2}(\lambda)} b_{N-2}.$$

Sustituyendo (9.4) en (10.1) obtenemos

$$\frac{Q_N(\lambda)}{Q_N(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda)}(\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}) = \lambda - a_{N-1} - \frac{b_{N-2}^2}{\psi_{N-2}(\lambda)}. \tag{10.2}$$

Consideremos, ahora, la parte izquierda de la igualdad (10.2). Demostremos que ella está completamente determinada por los espectros $\{\lambda_i\}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}$. De hecho, los polinomios característicos $Q_N(\lambda)$ y $\tilde{Q}_N(\lambda)$ se determinan por sus raíces $\{\lambda_i\}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}$ excepto por la multiplicación por un valor constante, y al mismo tiempo este valor constante es el mismo para los polinomios (ver (9.1)). Así,

$$\frac{Q_N(\lambda)}{Q_N(\lambda) - \tilde{Q}_N(\lambda)}(\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}) = \frac{\alpha \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)(\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1})}{\alpha \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \alpha \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)(\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1})}{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)}$$

Dividiendo la igualdad (10.2) por λ y haciendo tender $\lambda \to \infty$, obtenemos en la parte derecha 1 y en la parte izquierda

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{Q_N(\lambda)}{P_{N-1}(\lambda)\cdot\lambda} = (\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}) \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)}{\lambda\left(\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)\right)} = \frac{\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1}}{\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i}.$$

Entonces,

$$\tilde{a}_{N-1} - a_{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i. \tag{10.3}$$

De esta manera, la parte izquierda de (10.1) se determina completamente por los valores propios $\{\lambda_i\}$ y $\{\tilde{\lambda}_i\}$ de las matrices J y $\tilde{J}$:

$$q\frac{Q_N(\lambda)}{P_{N-1}(\lambda)} = \frac{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)}{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)}\left(\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i\right). \tag{10.4}$$

Transformemos, ahora, la parte derecha de la igualdad (10.1). Para esto consideremos el sistema (5.1) (los polinomios $\{P_j(\lambda)\}$ le satisfacen). Dividiendo la ecuación número i de este sistema por $P_i(\lambda)$, obtenemos las siguientes relaciones de recurrencia para las funciones $\psi_i(\lambda) = b_i P_{i+1}(\lambda)\,[P_i(\lambda)]^{-1}$:

$$\psi_i(\lambda) = \lambda - a_i - \frac{b_{i-1}^2}{\psi_{i-1}(\lambda)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, N-2, b_{-1} = 0).$$

De estas relaciones obtenemos para $\psi_{N-2}(\lambda)$ la siguiente presentación en forma de la fracción continua:

$$\psi_{N-2}(\lambda) = \lambda - a_{N-2} - \frac{b_{N-3}^2}{\psi_{N-3}} = \lambda - a_{N-2} - \cfrac{b_{N-3}^2}{\lambda - a_{N-3} - \cfrac{b_{N-4}^2}{\lambda - a_{N-4} - \ldots}} \tag{10.5}$$

Las igualdades (10.5), (10.4) y la fórmula (10.1) implican que

$$\frac{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i)\left(\sum_{i=0}^{N-1}\tilde{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i\right)}{\prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \lambda_i) - \prod_{i=0}^{N-1}(\lambda - \tilde{\lambda}_i)} = \lambda - a_{N-1} - \cfrac{b_{N-2}^2}{\lambda - a_{N-2} - \cfrac{b_{N-3}^2}{\lambda - a_{N-3} - \ddots \cfrac{b_0^2}{\lambda - a_0}}}. \tag{10.6}$$

De esta manera, para encontrar los elementos a_i y b_i es suficiente descomponer la función racional de la parte izquierda de la igualdad (10.6), en la fracción continua. Se conoce, que tal descomposición es única y se hace con ayuda del algoritmo de Euclides (por medio de dividir consecutivamente el polinomio con resta). Por fin, de (10.3) tenemos

$$\tilde{a}_{N-1} = \sum \tilde{\lambda}_i - \sum_{i=0}^{N-1}\lambda_i + a_{N-1}$$

Nota: De hecho, en la descomposición (10.6) hay b_i^2 (no b_i), pero sabemos que $b_i < 0$, esto es, b_i se encuentran unívocamente.

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. Reconstruir pares de las matrices J y $\tilde{J}$ por sus espectros:

a) $\{0,1,2\}$ y $\{\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\}$

(Comparar con el ejercicio dos de la Sección 9)

b) $\{1,3,5,7\}$ y $\{2,4,6,8\}$

11. La reconstrucción de las características mecánicas del sistema

Volvamos al problema mecánico inicial de las vibraciones de las masas, enlazados por resortes. Mostramos que por las frecuencias propias de dos sistemas que se distinguen sólo por un resorte, se puede reconstruir las matrices J y $\tilde{J}$ de la forma (3.2), esto es, por estas frecuencias se reconstruyen los valores

$$a_i = \frac{1}{m_i}\left(\frac{k_{i+1}}{l_{i+1}} + \frac{k_i}{l_i}\right) \qquad b_j = -\frac{k_{j+1}}{l_{j+1}\sqrt{m_j m_{j+1}}} \qquad \begin{array}{l} i = 0,1,\ldots,N-1, \\ j = 0,1,\ldots,N-2. \end{array}$$

Antes de todo notamos que los valores k_i y l_i aparte no influyen a los procesos que se desarrollan en el sistema, pero su razón $\gamma_i = \dfrac{k_i}{l_i}$ influye, y sólo podemos buscar esta razón en vista del comportamiento del sistema. Así pues, necesitamos encontrar $\{m_i\}_{i=0}^{N-1}$ y $\{\gamma_i\}_{i=0}^{N}$ del sistema

$$\begin{array}{ll} m_i a_i = (\gamma_{i+1} + \gamma_i) & i = 0,1,\ldots,N-1, \\ \sqrt{m_j m_{j+1}}\, b_j + \gamma_{j+1} = 0 & j = 0,1,\ldots,N-2. \end{array} \tag{11.1}$$

Tenemos $2N-1$ ecuaciones para encontrar $2N+1$ incógnitas. Esto significa que el comportamiento del sistema se determina no por todas las variables independientemente. De hecho, los valores de las masas y las rigideces de los resortes se determinan según el sistema de unidades, y sólo sus razones son absolutas (esto es, no dependen del sistema de unidades). Por eso, ponemos $m_0 = 1$ y $\gamma_0 = 1$ (lo que es equivalente a dividir m_i y γ_i respectivamente por m_0 y γ_0 y buscar las razones $\dfrac{m_i}{m_0}$ y $\dfrac{\gamma_i}{\gamma_0}$).

Entonces el sistema (11.1) toma la forma:

$$\begin{array}{l} a_0 - (\gamma_1 + 1) = 0 \\ a_1 m_1 - (\gamma_2 + \gamma_1) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{N-1} m_{N-1} - (\gamma_N + \gamma_{N-1}) = 0; \end{array} \tag{11.2}$$

$$\begin{array}{l} \sqrt{m_1}\, b_0 + \gamma_1 = 0 \\ \sqrt{m_1 m_2}\, b_1 + \gamma_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sqrt{m_{N-2} m_{N-1}}\, b_{N-2} + \gamma_{N-1} = 0. \end{array} \tag{11.3}$$

De la primera de las ecuaciones de (11.2) encontramos γ_1, luego de la primera de las ecuaciones (11.3) encontramos m_1, de la segunda (11.2) encontramos γ_2, de la segunda de (11.3) encontramos m_2, etcétera.

Finalmente, encontramos $\tilde{\gamma}_N$ de la ecuación

$$\tilde{a}_{N-1} m_{N-1} - (\tilde{\gamma}_N + \gamma_{N-1}) = 0.$$

Ejercicios para trabajar en forma independiente

1. En el sistema (11.1) podemos fijar cualquiera de las dos incógnitas y encontrar los $2N-1$ incógnitas que quedan.

   Expresar todas las incógnitas $\{m_i\}_{i=0}^{N-1}$, $\{\gamma_j\}_{j=0}^{N-1}$ por γ_0 y γ_N.

   Sugerencia. Transformar el sistema (11.1) a la forma

   $$J\vec{\mu} = \vec{x},$$

   donde

   $$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \sqrt{m_0} \\ \vdots \\ \sqrt{m_{N-1}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} \gamma_0\left(\sqrt{m_0}\right)^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma_N\left(\sqrt{m_{N-1}}\right)^{-1} \end{pmatrix}$$

   y utilizar los resultados de las Secciones 4 y 5.

Apéndice 1

A. Reconstrucción de la función espectral por el movimiento de la primera masa

Según la Sección 8, se puede reconstruir la matriz de Jacobi J por su función espectral $\rho(\lambda)$. Veamos ahora, cómo es posible encontrar la función $\rho(\lambda)$, observando el movimiento de nuestro sistema mecánico. De esta manera, tomando en cuenta los resultados de las Secciones 8 y 11, podremos encontrar del movimiento del sistema mecánico inicial sus parámetros. Pero primeramente determinemos, cómo escribir la fórmula del movimiento del sistema en términos de la función espectral. Según las fórmulas (3.4) y (3.5) (fin de la Sección 3),

$$
\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \cos\sqrt{\lambda_k}t\left(\vec{x}(0), \overrightarrow{P(\lambda_k)}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{P(\lambda_k)}}{\|\overrightarrow{P(\lambda_k)}\|^2} \\
&+ \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda_k}t}{\sqrt{\lambda_k}}\left(\dot{\vec{x}}(0), \overrightarrow{P(\lambda_k)}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{P(\lambda_k)}}{\|\overrightarrow{P(\lambda_k)}\|^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\, P\left(\vec{x}(0), \lambda\right)\overrightarrow{P(\lambda)}d\rho(\lambda) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} P\left(\dot{\vec{x}}(0), \lambda\right)\overrightarrow{P(\lambda)}d\rho(\lambda),
\end{aligned}
$$

donde $P(\vec{v}, \lambda) \equiv \left(\vec{v}, \overrightarrow{P(\lambda)}\right)$, $\quad \overrightarrow{P(\lambda)} = \begin{pmatrix} P_0(\lambda) \\ P_1(\lambda) \\ \vdots \\ P_{N-1}(\lambda) \end{pmatrix}$.

Consideremos, ahora, el caso, cuando

$$
\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}
$$

es decir, la situación, cuando en el momento inicial todas las masas, a excepción de la primera masa, están en equilibrio, la primera masa está a la derecha de 1; todas las masas en el momento inicial tienen velocidad 0.

En esta situación tendremos

$$
\vec{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\overrightarrow{P(\lambda)}d\rho(\lambda)
$$

y para la primera masa

$$
x_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}t\, d\rho(t). \tag{A.1}
$$

Suponemos que, observando el movimiento de la primera masa durante mucho tiempo, encontramos la función $x_0(t)$ para todo $t > 0$:

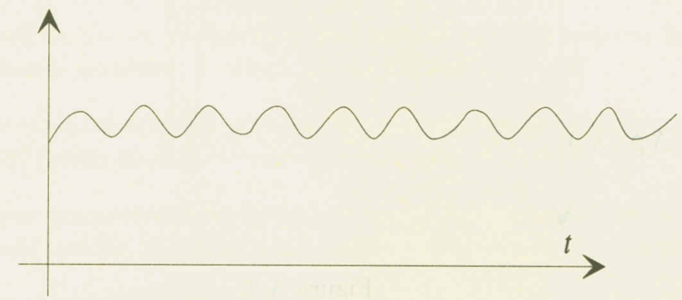

Figura A.1

¿Cómo reconstruir $d\rho(t)$ por $x_0(t)$? Multiplicamos $x_0(t)$ por $\cos \nu\lambda$ e integramos el producto por t de 0 a T. Para encontrar $\frac{1}{T_0}\int_0^T x_0(t) \cos \nu t\, dt$ calculamos, primeramente,

$$
\frac{1}{T}\int_0^T \cos\sqrt{\lambda}t \cos \nu t\, dt = -\frac{1}{2T}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}+\nu\right)T}{\sqrt{\lambda}+\nu} + \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda}-\nu\right)T}{\sqrt{\lambda}-\nu}\right\}.
$$

Integrándolo por $d\rho(\lambda)$ obtenemos

$$
f(\nu) \equiv \frac{1}{T}\int_0^T x_0(t) \cos \nu t\, dt = \sum_{j=1}^{N} \frac{-1}{2T}\left\{\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_j}+\nu\right)T}{\sqrt{\lambda_j}+\nu} + \frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_j}-\nu\right)T}{\sqrt{\lambda_j}-\nu}\right\}\Delta\rho(\lambda_j)
$$

Estudiemos esta suma para grandes T y $\nu > 0$. El primer sumando $-\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_j}+\nu\right)T}{2T\left(\sqrt{\lambda_j}+\nu\right)}$ será pequeño. El segundo sumando será pequeño si $\left(\sqrt{\lambda_j}-\nu\right)T \gg 1$.

Esto quiere decir que para todos ν, a excepción de ν cerca de los N puntos $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$, para pequeños valores de $\left(\sqrt{\lambda_j}-\nu\right)T$ la fracción es

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_j}-\nu\right)T}{\left(\sqrt{\lambda_j}-\nu\right)T} \sim 1.$$

Así pues, la función $f(\nu)$ tiene la forma

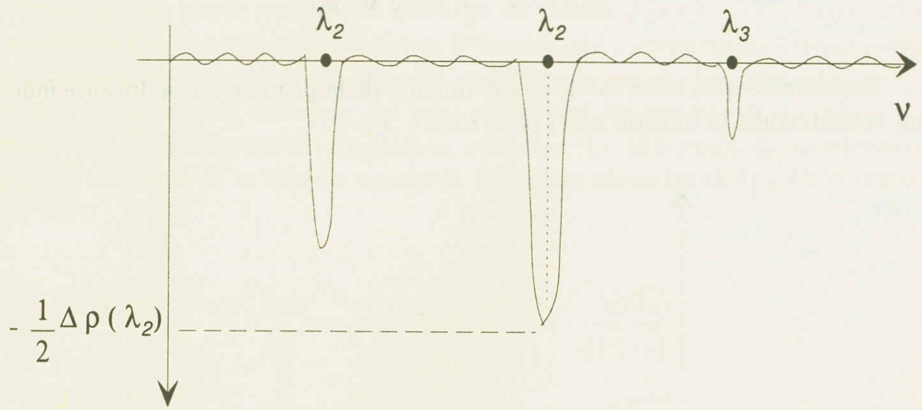

Figura A.2

Vemos que en los puntos λ_j la función tiene “embates” $-\frac{1}{2}\Delta\rho(\lambda_j)$ y más adelante de estos puntos la función está cerca de cero. De esta manera, observando durante mucho tiempo el movimiento de la primera masa y encontrando la función $f(\nu)$, podemos encontrar la función espectral: los puntos en los que $f(\nu)$ tiene “embates”, son λ_j, y el módulo de cada embate es $\Delta\rho(\lambda_j)$.

Bibliografía

[1] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman. *Theory of linear operators in Hilbert space.* Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.

[2] J.M. Berezans′kiĭ. *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators.* Translated from the Russian by R. Bolstein, J.M. Danskin, J. Rovnyak and L. Shulman. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 17. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.

[3] F.R. Gantmakher. *Lecciones sobre mecánica analítica* (en ruso). Moscú, Nauka, 1966.

[4] I.M. Gel′fand. *Lectures on linear algebra.* Translated from the revised second Russian edition by A. Shenitzer. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 9. Interscience Publishers, New York-London, 1961.

[5] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Mechanics.* Course of Theoretical Physics, Vol. 1. Translated from the Russian by J.B. Bell. Pergamon Press, Oxford, 1960.

Bibliografía complementaria

[6] N.I. Akhiezer. *The classical moment problem and some related questions in analysis.* Translated by N. Kemmer. Hafner Publishing Co., New York, 1965.

[7] F. Gesztesy and B. Simon. m-functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. *J. Anal. Math.*, **73**(1997) 267–297.

[8] B. Simon. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator. *Adv. Math.*, **137**(1998) 82–203.

[9] M. Stone. *Linear transformations in Hilbert space.* American Mathematical Society Colloquium Publications, 15. American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.

[10] G. Teschl. *Jacobi operators and completely integrable nonlinear lattices.* Mathematical Surveys and Monographs, 72. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

Señalamientos metodológicos y didácticos al tema: problemas inversos de la teoría espectral de operadores de dimensión finita, editado por el Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la UNAM, se terminó de imprimir el mes de octubre de 2004, en los talleres de *Impretei,* Almería 17, Col. Postal, C.P. 03410, México, D.F. Se imprimieron 200 ejemplares, más sobrantes para reposición.

Esta monografía presenta la traducción de las notas del curso impartido por el Prof. Vladimir A. Marchenko durante 1987 en la Universidad Estatal de Jarkov, Ukrania. A estas notas se agrega un apéndice que forma parte de otro curso dictado por el mismo profesor en 1995.

La traducción fue hecha por el Dr. Mikhail Kudryavtsev, quien fue alumno del Prof. Marchenko, y se contó con la colaboración del Prof. Guillermo Gómez de la Facultad de Ciencias de la UNAM.

La teoría espectral de operadores de Jacobi ha sido tratada en textos clásicos como: Akhiezer, N.I. y Glazman, I.M., 1993; Akhiezer, N.I., 1965; y Stome, M., 1990; y recientemente, en Simon, B., 1998; así como en Teschl, G., 2000. El texto que ahora se presenta está dedicado al estudio de matrices finitas de Jacobi con especial énfasis en problemas inversos.

ISBN 970-32-1916-0

9 789703 219162

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMATICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS