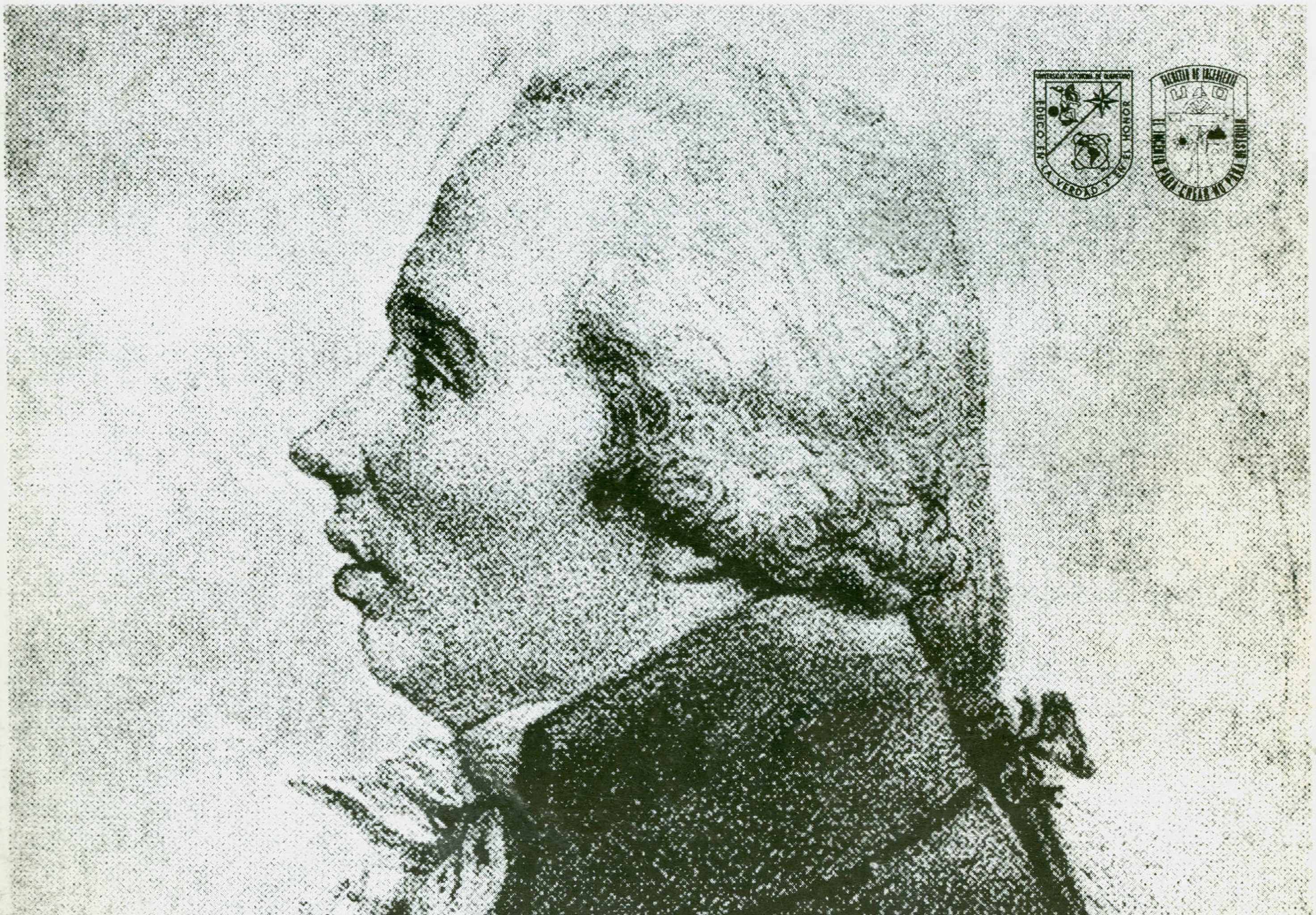
$ 30.00
Marzo de 2000
No. 15

Eureka

Revista de la Licenciatura en Matemáticas Aplicadas



Adrien Marie Legendre

Solución de un número infinito de desigualdades

Rafael René del Río Castillo*[a]

y

Herminio Blancarte Suárez**

* IIMAS, UNAM

** Lic. en Matemáticas Aplicadas, Facultad de Ingeniería, UAQ

RECIBIDO: *19 de julio 1999*

PUBLICADO: *febrero del 2000*

RESUMEN

Usando el teorema de categoría de Baire, se prueba la existencia de un conjunto no numerable de soluciones para un sistema infinito de desigualdades simultáneas. El resultado está relacionado con problemas en teoría de los números concernientes a la aproximación de irracionales por racionales.

I. Introducción

Encontrar aquellos números que satisfacen alguna condición dada, es un problema que encontramos a menudo, por ejemplo, cuando deseamos resolver una ecuación o varias ecuaciones o desigualdades simultáneas. Dar una interpretación geométrica de las condiciones impuestas puede ser de gran ayuda para entender como es el conjunto de las soluciones. Tal es el caso de algunos problemas de álgebra lineal donde cada igualdad puede ser pensada como una recta y las soluciones de varias igualdades como los puntos de intersección de estas rectas.

En el presente trabajo nos ocuparemos de un problema muy ambicioso: resolver un número infinito de desigualdades. Nuestra herramienta será un

[a]Cátedra Patrimonial Nivel II. SEP–CONACyT, Ref. SC-980004. Programa de apoyo a la formación de personal académico en instituciones públicas de los estados.

famoso teorema que cumplió recientemente su primer centenario, el teorema de categoría de Baire (1899; véanse también Banach, 1930, y Kuratowsky, 1930, para versiones más modernas).

Este teorema es un resultado que nos revela aspectos importantes de la estructura de los espacios métricos completos, como es la recta real $\mathbb{R}$. Si tenemos dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ su intersección puede ser vacía (dos intervalos abiertos disjuntos, por ejemplo). Si consideramos dos subconjuntos densos de $\mathbb{R}$ su intersección puede ser también vacía (los racionales y los irracionales, por ejemplo). ¿Qué pensar de la intersección de subconjuntos que son densos y abiertos en $\mathbb{R}$? El teorema de Baire asegura que todo esto va cambiar. Los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tiene la propiedad de ser abiertos y densos son "muy gordos", tanto que intersectan a un número infinito de subconjuntos que son densos y abiertos y además la intersección no sólo no es vacía, si no que es densa y no numerable.

En este trabajo aplicaremos el teorema anterior para mostrar que un sistema infinito de desigualdades tiene una infinidad de soluciones. La clave será visualizar el conjunto de soluciones como el conjunto que consta de la intersección numerable de bolas abiertas.

En las demostraciones que siguen consideraremos subconjuntos de un intervalo $\mathbf{I}$ y, particularmente, $\mathbf{I} = [0, 1]$, recordando que los abiertos de $\mathbf{I}$ son la intersección de abiertos de $\mathbb{R}$ con $\mathbf{I}$. Si en lugar de un intervalo $\mathbf{I}$ consideramos a $\mathbb{R}$, las demostraciones no presentan ninguna modificación importante.

Sea $D = \{s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots\}$ un subconjunto denso y numerable del $\mathbf{I} = [0, 1]$ y sea $F: D \to \mathbf{R}^+$ una función cualesquiera, donde $\mathbf{R}^+$ denota el conjunto de los reales positivos.

Teorema 1. *Si* $\mathbf{E} \equiv \{x \in \mathbf{I}: |x - s_k| < F(s_k)$ *para una infinidad de puntos* $s_k \in D\}$, *entonces* $\mathbf{E}$ *es denso no numerable.*

Sobre la aproximación de irracionales por racionales (Hardy y Wright, 1979; Khintchine, 1961), se establece el siguiente resultado:

Sea $\varphi(q)$ una función positiva arbitraria de la variable q, un número natural. Entonces siempre se puede encontrar un número irracional α tal que la desigualdad

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \phi(q) \tag{1}$$

tiene un número infinito de soluciones en enteros p y q.

Así por ejemplo hay siempre un irracional α tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n},$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$. De hecho, si escogemos la función $\phi(q) = 1/q^2$, resulta que para todos los irracionales α, la desigualdad (1) tiene un número infinito de soluciones en racionales p/q. El teorema anterior generaliza los resultados anteriores. Dada la naturaleza clásica del problema, pensamos que probablemente este teorema se encuentra demostrado en alguna parte, sin embargo no lo hemos encontrado en ninguna referencia.

II. Definiciones y preliminares

Sea $\mathbf{I} = [a, b]$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Decimos que $A \subset \mathbf{I}$ es denso si cualquier subintervalo de $\mathbf{I}$ intersecta a A. Un conjunto es denso en ninguna parte si cada intervalo tiene un subintervalo contenido en su complemento, esto es equivalente a que el interior de la cerradura de A sea vacía. Así pues, los conjuntos densos en ninguna parte están llenos de agujeros; un ejemplo típico es el conjunto de Cantor (Oxtoby, 1970)

Teorema 2 (Teorema de la categoría de Baire). *La intersección numerable de abiertos densos es densa.* (Oxtoby, 1970.)

El siguiente lema es una consecuencia inmediata del teorema 2 y asegura que la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos es no numerable.

Lema. *Sea* $\mathbf{I} = [0, 1]$, *si* $A \subset \mathbf{I}$ *tal que*

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i, \tag{2}$$

donde B_i *es abierto y denso* $\forall i \in \mathbf{N}$, *entonces* A *es no numerable.*

Demostración: Por el teorema de Baire (teorema 2), sabemos que A es denso. Utilizando reducción al absurdo, supongamos que A es numerable. Consideremos una enumeración de $A = \{p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots\}$, donde ninguno de los puntos p_i son puntos aislados de $\mathbf{I}$. Definamos

$$A_i \equiv \mathbf{I} \setminus \{p_i\}, \qquad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \ldots\}. \tag{3}$$

Claramente A_i es abierto y denso $\forall i \in \{1, 2, \ldots\}$. Consideremos el conjunto

$$C = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \bigcap A = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \bigcap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right). \tag{4}$$

Así, C es denso por el teorema de Baire. Pero por la definición de A_i, tenemos que $C = \phi$. Por lo tanto, A es no numerable. ■

III. Demostración del teorema

Sea $\mathbf{E} \equiv \{x \in \mathbf{I}\colon |x - s_k| < F(s_k)$ para una infinidad de puntos $s_k \in D\}$. Sea

$$V_k = \{y \in \mathbf{I}\colon |y - s_k| < F(s_k)\}\,, \tag{5}$$

las bolas centradas en cada s_k con radio $F(s_k)$. En términos de tales V_k, $\mathbf{E}$ se puede caracterizar como

$$\mathbf{E} = \lim_{n\to\infty} V_k = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} V_k\right). \tag{6}$$

Sea

$$W_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} V_k. \tag{7}$$

Por hipótesis D es denso y

$$D \setminus \{s_1, \ldots, s_{n-1}\} \subset W_n,$$

entonces W_n es denso y abierto para $\forall n \in \mathbf{N}$. Así pues:

$$\mathbf{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} W_n. \tag{8}$$

Por el teorema de Baire y el lema, $\mathbf{E}$ es no numerable. ■

Referencias bibliográficas

[1] Baire, R., "Sur les fonctions de variables réelles", *Ann. Math.* **3** (1899), pp. 1–32.

[2] Banach, S., "Théorèmes sur les ensembles de premières catégorie", *Fund. Math.* **9** (1930), pp. 395–398.

[3] Hardy, G. H. y E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, quinta edición, Oxford Science Publications, 1979.

[4] Khintchine, A., *Continued Fractions*, tercera edición, University of Chicago Press, 1961.

[5] Kuratowsky, C., "La propiérté de Baire dans les espaces métriques", *Fund. Math.* **16** (1930), pp. 390–394.

~~[6] Oxtoby, J. C., *Measure and Category*, Springer-Verlag, 1970.~~

[7] Reed, M. y B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol. 1: Functional Analysis, Academic Press, Inc., 1975.