UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

ALGUNAS PROPIEDADES DE OPERADORES LINEALES COMPACTOS EN ESPACIOS DE BANACH

TESIS
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JUAN ARMANDO VELAZCO VELAZCO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAFAEL RENÉ DEL RIO CASTILLO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA
IIMAS - UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, 28 de enero de 2019

A mi madre y a R. Isela Ramos,
con profundo cariño

Índice general

Introducción

En el presente trabajo se desarrolla la teoría de operadores compactos en espacios de Banach. Se presentan de forma organizada los principios fundamentales de esta teoría y se estudian aspectos avanzados de la misma. Este tipo de transformaciones aparecen de manera natural cuando se invierten operadores diferenciales y son una generalización de los operadores lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita. Resultados seminales fueron obtenidos por Ivar Fredholm, David Hilbert, Erhard Schmidt y Frigyes Riesz en la primera década del siglo pasado, ello en el contexto de las ecuaciones integrales y el estudio de espacios de funciones, sentando las bases de la teoría de operadores compactos. Aunque varios de los temas aquí expuestos son de nivel avanzado se ha trabajado la exposición de tal manera que el lector tenga acceso a todos los prerrequisitos necesarios. Se ha demostrado con detalle la mayoría de los resultados aquí expuestos y cuando un resultado no está probado (por no ser la demostración parte de los objetivos correspondientes, por ejemplo, resultados auxiliares de otros campos como lo es la topología en conjuntos de puntos) se remite al lector a alguna referencia para que consulte la demostración.

En el capítulo 1, se ha desarrollado la teoría fundamental de los espacios de Hilbert y los espacios de Banach, así como resultados varios relacionados con la teoría de operadores lineales acotados en espacios de Banach, principalmente. Se muestran resultados que describen la geometría de los espacios de Hilbert, ello debido a que estos espacios son ejemplos de espacios de Banach y son los que están más presentes en las aplicaciones. Se presenta una sección dedicada al espacio dual y el teorema de representación de Riesz para funcionales lineales, 1.15, concluyendo que todo espacio de Hilbert es reflexivo (teorema 1.17).

El capítulo 2 expone la teoría de los operadores lineales compactos. Se ha hecho énfasis en la diferencia entre la familia de operadores completamente continuos y la familia de operadores compactos definidos de un espacio de Banach X a un espacio de Banach Y (conjuntos de operadores denotados como $\mathrm{CC}(X,Y)$ y $\mathrm{Com}(X,Y)$ respectivamente). Cómo parte de tal enfoque, se muestra que entre espacios de Banach X y Y, bajo las hipótesis pertinentes, se tiene la siguiente cadena de contenciones $\mathrm{FA}(X,Y) \subset \mathrm{Com}(X,Y) \subset \mathrm{CC}(X,Y)$, donde $\mathrm{FA}(X,Y)$ denota al conjunto de operadores finitamente aproximables entre los espacios de Banach X, Y (ver teorema 2.6). También, para redondear la exposición de tal resultado, se muestra cuando ocurre que tales familias coinciden en un espacio de Banach X, esto es, $\mathrm{FA}(X) = \mathrm{Com}(X)$ (teorema 2.9) y cuando $\mathrm{Com}(X) = \mathrm{CC}(X)$ (teorema 2.7); dando para ello todos los teoremas, y sus respectivas demostraciones, involucrados en las correspondientes pruebas de los resultados mencionados.

Como cierre de este trabajo se tiene el capítulo 3, en el que se presenta la teoría espectral de los operadores compactos, exponiéndose los resultados fundamentales. Se prueba, por ejemplo, una versión de la alternativa de Fredholm (ver 3.13) para operadores compactos en un espacio normado. Se da también un ejemplo de un operador no compacto T tal que $T_\lambda = T - \lambda I$ es sobre e inyectivo para todo $\lambda \neq 0$ (ver observación 3.4), ejemplo no habitual en la literatura usual donde se expone la alternativa de Fredholm. En el mismo capítulo, se da una definición del espectro esencial de un operador acotado, así como algunos resultados relacionados adaptados para operadores lineales acotados.

Como aporte de trabajo de tesis, en el contexto de operadores acotados, se dan los teoremas 3.17 y 3.18, que en conjunto forman una extensión a espacios de Banach de un teorema presentado para espacios de Hilbert dado en [6], capítulo 3, (teorema 3.6.1). Los teoremas mencionados caracterizan, en conjunto, al espectro esencial (cuya definición aquí utilizada es en términos de operadores compactos) de un operador lineal acotado en un espacio de Banach X. También, en la parte final del capítulo 3, se definen los operadores Fredholm, esto para continuar el estudio del espectro esencial para operadores acotados: al usar la definición de operadores Fredholm, se dan algunos resultados relacionados con el espectro esencial, por ejemplo, los resultados 3.22, 3.23 y la observación 3.9). Lo anterior, permite dar una versión de la alternativa de Fredholm, 3.2, para operadores Fredholm definidos en un espacio de Banach.

Agradecimientos

Sería pretencioso de mi parte decir que éste trabajo es sólo mío. Nada más alejado de la verdad. En lo personal, la presente tesis ha sido producto no sólo de mi esfuerzo, sino también del de mi familia, a la cual agradezco su apoyo incondicional en todo momento que lo he necesitado; en especial mi madre, es ella la primer persona a quién quiero agradecer.

En lo que respecta a lo académico, la primer persona a quien le digo gracias por este trabajo es al doctor Rafael René del Río Castillo. Gran parte de sus enseñanzas han sido al mostrarme su dedicación para con el trabajo matemático. Su disciplina y entrega, al menos para mí, son dignos de seguir como ideales. Su paciencia, así como su amabilidad para sacarme de mis frecuentes errores y no pocas dudas facilitaron mucho el que este trabajo se llevara a cabo. Gracias, maestro. También, cómo no mencionarlo, quiero dar un agradecimiento a los doctores Shirley Bromberg Silverstein, Mario Pineda Ruelas, Laura Hidalgo Solís y Felipe de Jesús Zaldívar Cruz, todos ellos de la UAM-I, profesores que me enseñaron a leer, a tener gusto por pensar y a tolerar la frustración cuando algo no salía bien. Sus enseñanzas las llevo presentes en mi día a día.

Deseo aprovechar este espacio para externar un agradecimiento especial a esas personas que se han mantenido cerca a lo largo de todos estos años, apoyándome de diversas formas, cada uno a su modo, para que yo siguiera adelante. Gente a la que bien puedo llamar familia mas, para no agobiarles, los llamo amigos. Rossy, Mike, Marcos, Luis, Gustavo (¡primo!), Fer, Félix (dondequiera que estés, amigo), Felipe, Cando, Bart: gracias por acompañarme en este bello pero también duro camino que representa el aprender algo de matemáticas.

Finalmente también deseo dar gracias al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo brindado a través de la beca que me fue asignada para llevar a cabo la maestría.

Capítulo 1

Generalidades sobre espacios de Banach y Hilbert

1.1. Espacios normados

A lo largo del texto y salvo que se indique otra cosa, X denotará un espacio vectorial arbitrario, real o complejo (indicándolo cuando sea pertinente). Un espacio vectorial X se dice de **dimensión finita** si contiene un conjunto maximal finito de vectores linealmente independientes que lo genera. Si el conjunto de vectores linealmente independientes que genera al espacio es maximal pero no finito se dice que X es un espacio vectorial de dimensión infinita. Nótese que por definición, el espacio vectorial trivial $X = \{0\}$ tiene dimensión finita y $\dim\{0\} = 0$. Un **subespacio vectorial** M de X es un subconjunto no vacío de X tal que, el vector cero es elemento de M y toda combinación lineal de elementos del subconjunto M es elemento de M.

El símbolo $\subset$ denota contención propia, mientras que $\subseteq$ indicará la contención de conjuntos no necesariamente propia. Si f es un mapeo entre los conjuntos A y B, $f[A]$ denotará la imagen de A bajo f, mientras que $f^{-1}(B)$ será la imagen inversa de B bajo f. Cuando se hable de subespacios vectoriales no necesariamente tienen que ser cerrados, por otra parte, se indicará cuando el subespacio en cuestión sea cerrado.

Definición. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Una función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es llamada una **norma** si

1. $f(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$,

2. Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\alpha x) = |\alpha| f(x)$,

3. Para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple la llamada **desigualdad triangular**
$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

Diremos que el par (X, f) es un **espacio vectorial normado**. Como es costumbre, por simplicidad escribiremos simplemente X si se sobreentiende cual es la norma del espacio del que se hable, y, como en la mayoría de los textos de hoy en día, se denotará a f como $\| \, \|$. Si W es un subespacio vectorial del espacio normado X, entonces $(W, \|\cdot\| \, |_W)$ es un **subespacio normado** de X, donde $\|\cdot\| \, |_W$ es la norma definida en X restringida a W. Como convención, en el presente trabajo, siempre que se diga espacio normado se hace referencia a un espacio vectorial normado.

1.2. Espacios de Banach

En un espacio vectorial normado se puede inducir una topología métrica.

Definición. Sea X un conjunto no vacío. Una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una métrica en X si satisface

a) Para todo $x, y \in X$, se tiene que $d(x, y) < +\infty$,

b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,

c) Para $x, y, z \in X$, se cumple la **desigualdad triangular**: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Un conjunto X dotado con una métrica d recibe el nombre de **espacio métrico** y se representa por el par (X, d).

Proposición 1.1. *Considere el espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$. Entonces X es un espacio métrico (X, d) donde $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por*

$$d(x, y) = \|x - y\|,$$

para cualesquiera $x, y \in X$.

Demostración. Como es usual, veamos que la definición de d satisface las propiedades de una métrica.

a) Para cualesquiera $x, y \in X$ se cumple que $d(x, y) < +\infty$, pues la función norma como propiedad cumple ser real-valuada.

b) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$. Supongamos que $d(x,y) = 0$. Entonces $\|x - y\| = 0$ y por propiedad de la función norma esto ocurre si y sólo si $x - y = 0$, de donde $x = y$. Recíprocamente, si se supone que $x = y$ es claro que $d(x - y) = 0$.

c) La desigualdad triangular se cumple a partir del hecho siguiente: como la función norma satisface una desigualdad triangular, para $x, y, z \in X$ arbitrarios se cumple que

$$d(x,z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Así, la función d es una métrica. $\square$

Como convención, diremos que una métrica así definida es una **métrica inducida** por la norma definida en X. La noción de convergencia más elemental es la que se refiere a convergencia de sucesiones.

Definición. Dado un espacio métrico (X, d),

I) Una **sucesión** es una función $\mathbb{N} \longrightarrow X$. Se denotará a una sucesión como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó simplemente $\{x_n\}_{n\geq 1}$. Los x_n son llamados **elementos de la sucesión**.

II) Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a un valor x, si dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$. Si este es el caso, la sucesión es **convergente** y escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ o bien } \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0.$$

III) Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente se dirá que la sucesión **diverge o que** es **divergente**.

IV) Una sucesión es **acotada** si $M = \{x_n | x_n \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ es un conjunto acotado, esto es

$$\delta(M) := \sup_{x,y\in M} d(x,y) < \infty,$$

donde $\delta(M)$ denota al **diámetro** del conjunto M.

V) Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $N \in \mathbb{N}$ de tal modo que si $m, n \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

VI) Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy tiene límite en X o dicho de otra forma, converge en X.

Definición. Sea $(X, \| \|)$ un espacio vectorial normado. Entonces $(X, \| \|)$ es un **espacio de Banach** si el espacio métrico (X, d) es completo, donde d es la métrica inducida por la norma $\| \|$.

Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio vectorial normado X se dice que es **sumable** si

$$\sum_{n=1}^{N} x_n \to x \in X$$

cuando $N \to \infty$. Se dirá que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es **absolutamente sumable** si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty.$$

Teorema 1.1. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si y sólo si toda sucesión absolutamente sumable es sumable.*

Demostración. Suponga que X es un espacio de Banach y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión absolutamente sumable, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \text{ converge en } \mathbb{R}.$$

Sean $s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$ y $a_n = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$. Dado un $\varepsilon > 0$, existe un $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq N(\varepsilon)$

$$|a_n - a_m| = \left| \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\| \right| < \varepsilon.$$

Para tal $N(\varepsilon)$, si $m, n \geq N(\varepsilon)$

$$\|s_n - s_m\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j \right\| = \left\| \sum_{j=m+1}^{n} x_j \right\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} \|x_j\| < \varepsilon,$$

por lo tanto, los s_n forman una sucesión de Cauchy, por ser X de Banach, convergen y por tanto el conjunto $\{x_n\}_{n=1}$ es sumable.

Suponga ahora que toda sucesión absolutamente sumable en X es sumable. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $k = 1, 2, \ldots$ existe un $N(k) \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N(k)$, entonces

$$\|x_n - x_m\| < \frac{1}{2^k},$$

sin perdida de generalidad, suponga que $N_1 < N_2 < \ldots$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{N_{k+1}} - x_{N_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty,$$

por lo que la serie anterior es absolutamente sumable y por la hipótesis es sumable; es decir,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_{N_{k+1}} - x_{N_k}) \to x \in X.$$

Sea $w_1 = x_{N_1}$ y defina $w_{k+1} = x_{N_{k+1}} - x_{N_k}$. Entonces

$$x_{N_k} = \sum_{j=1}^{k} w_j.$$

Nótese, de lo anterior, que la sucesión $\{x_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es una subsucesión convergente de una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, por lo tanto, esta última sucesión es también convergente y por tanto, por ser $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy arbitraria, X es un espacio normado completo. $\square$

1.3. Operadores lineales entre espacios de Banach

Salvo que se indique lo contrario, todos los espacios vectoriales que se traten estarán definidos sobre el mismo campo base. Un espacio vectorial es una estructura algebraica, por lo que es natural realizar un estudio de tal estructura a través de la noción correspondiente de homomorfismo, es decir, mapeos entre este tipo de objetos que preserven la estructura de los mismos.

Definición. Sean X, Y espacios normados. Un **operador lineal** $T : X \longrightarrow Y$ es un mapeo que satisface:

i) El dominio de T, $\mathcal{D}(T)$, es un espacio vectorial,

ii) Para todo $x, y \in \mathcal{D}$ y α escalar del campo base

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y).$$

La imagen de $\mathcal{D}(T)$ bajo T es el **rango** de T y será denotado por $\mathcal{R}(T)$.

Con fines de estandarizar la notación a lo largo de este trabajo, se hace mención de lo siguiente: dado un operador lineal T se escribirá, para $x \in \mathcal{D}(T)$, Tx en lugar de $T(x)$, como se acostumbra en algunos textos sobre análisis funcional (por ejemplo, la referencia [1]).

Ejemplo 1.1. Dado un espacio normado X, se tienen ejemplos típicos de operadores lineales como son la identidad $I : X \longrightarrow X$, definido por $Ix = x$ o el operador cero $0 : X \longrightarrow X$, cuya regla de correspondencia viene dada por $0x = 0$ para todo $x \in X$. Un ejemplo menos simple es el siguiente: considere el espacio de las funciones continuas en el intervalo cerrado $[0, 1]$, $C[0, 1]$. Se define el operador $T : C[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$T\varphi := \int_0^1 \varphi(x)dx$$

donde la integral es en el sentido de Riemann. El operador T es lineal.

Como una primer consecuencia de la preservación de la estructura por parte de un operador lineal, se tiene la proposición siguiente.

Proposición 1.2. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre espacios normados X, Y, entonces*

a) El rango de T, $\mathcal{R}(T)$, es un espacio vectorial,

b) El espacio nulo de T, $\mathcal{N}(T)$, es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$,

c) Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{R}(T) \leq n$.

Demostración. La demostración se sigue directamente de las definiciones. Para ilustrarlo, se demostrará la afirmación b): Sean $x, y \in \mathcal{N}(T)$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ es el campo $\mathbb{R}$ o el campo $\mathbb{C}$. Entonces, de la linealidad de T se tiene que $0 \in \mathcal{N}(T)$ pues

$$T0 = T(0 + 0) = T0 + T0 \;\therefore\; 0 = T0 - T0 = T0.$$

De forma análoga:

$$T(\alpha x + y) = \alpha Tx + Ty = \alpha 0 + 0 = 0$$

Por lo tanto, $\alpha x + y \in \mathcal{N}(T)$, y así $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio de X, como se quería probar. $\square$

Dados dos espacios normados, X y Y, se define a la familia de operadores lineales entre ellos como

$$\mathfrak{L}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y \; | T \text{ es operador lineal}\},$$

familia que se puede dotar de una estructura de espacio vectorial definiendo operaciones puntualmente, esto es, para $T_1, T_2 \in \mathfrak{L}(X, Y)$ se define la suma de operadores como

$$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x, \ x \in \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2),$$

mientras que el producto por escalar (el escalar pertenece al mismo campo base sobre el que se encuentran definidos los espacios normados X y Y)

$$(\alpha T_1)x = \alpha T_1 x, \ x \in \mathcal{D}(T_1).$$

Al definir a los operadores lineales en espacios normados y dado que estos últimos resultan ser espacios métricos, la pregunta natural es ¿cuando un operador lineal es continuo?

Definición. Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ de un espacio normado X a un espacio normado Y es **acotado** si existe una constante C positiva tal que

$$\|Tx\| \leq C\|x\|, \text{ para toda } x \in X.$$

Cada una de tales constantes recibe el nombre de **cota** para el operador T. Se define la **norma operador** de T como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

Proposición 1.3. *Un operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios normados X y Y es acotado si y sólo si $\|T\| < \infty$.*

Demostración. Suponga que $T : X \longrightarrow Y$ es un operador acotado. Sea C una cota de T entonces tendremos que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq C,$$

y por tanto $\|T\| < \infty$.

Para completar la equivalencia de proposiciones, sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador tal que $\|T\| < \infty$. Entonces, para $x_0 \in X$

$$\|Tx_0\| = \left\| T\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \right\| \|x_0\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \|x_0\|,$$

defínase ahora $C = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$, es decir, el operador T es acotado, como se quería probar. □

Teorema 1.2. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre espacios normados X, Y. Las siguientes proposiciones son equivalentes*

1. *T es continuo en un punto x_0.*
2. *T es continuo.*
3. *T es acotado.*

Demostración. Note que, por definición de continuidad en un punto, el operador lineal $T : X \longrightarrow Y$ es continuo en un punto x_0 si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$, entonces $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$. Así,

1)⇒2) Sean T un operador lineal continuo en el punto $x_0 \in X$, $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y sean $x, z \in X$ puntos arbitrarios distintos y tales que

$$\begin{aligned} \|Tx - Tz\| &= \|Tx - Tx_0 + (Tx_0 - Tz)\| \\ &\leq \|Tx - Tx_0\| + \|Tx_0 - Tz\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

de la hipótesis de continuidad de T en x_0, sabemos que existen δ_0, δ_1 positivos tales que

$$\|x - z\| = \|x - x_0 + (x_0 - z)\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0 - z\| < \delta_0 + \delta_1,$$

sea pues $\delta := 2\,\text{máx}\{\delta_0, \delta_1\}$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ y $x, z \in X$, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x - z\| < \delta$ entonces $\|Tx - Tz\| < \varepsilon$, es decir, T es continuo en cualquier otro punto y por tanto, es continuo.

2)⇒3) Al ser T continuo en particular es continuo en el vector $0 \in X$. Así, para $x \neq 0$, sea $0 < \varepsilon \leq 1$. Existe $\delta > 0$ tal que si $\|\rho\frac{x}{\|x\|}\| < \delta$, con $0 < \rho < \delta$, entonces $\|T\left(\rho\frac{x}{\|x\|}\right)\| < \varepsilon$ o bien

$$\left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < \frac{\varepsilon}{|\rho|} \leq \frac{1}{\rho} < \infty.$$

Como $x \in X$ fue arbitrario, por la proposición 1.3, podemos decir que T es un operador lineal acotado, pues

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \frac{1}{\rho} < \infty.$$

3)⇒1) Basta notar que, para $x, x_0 \in X$ existe una constante C positiva tal que
$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\|.$$
Así, dado $\varepsilon > 0$, definamos $\delta := \frac{\varepsilon}{C}$, de donde
$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq C\|x - x_0\| < C\delta = \varepsilon,$$
es decir, T es un operador continuo en el punto x_0. □

Una familia de operadores de interés entre espacios normados X y Y es, precisamente, **la familia de operadores lineales acotados** de X a Y, a la que denotaremos por $\mathcal{B}(X, Y)$. Desde luego, se tiene que $\mathcal{B}(X, Y) \subset \mathfrak{L}(X, Y)$ y más aún, $\mathcal{B}(X, Y)$ resulta ser un espacio vectorial normado, donde la norma definida en él es la norma operador. Cuando la familia de operadores lineales acotados tenga como dominio y codominio al mismo espacio X se escribirá simplemente $\mathcal{B}(X)$.

Proposición 1.4. *El espacio $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio vectorial normado.*

Demostración. El operador $0 : X \longrightarrow Y$ es elemento de $\mathcal{B}(X, Y)$. Basta definir la constante como $C = 1$, la cual satisface
$$\|0x\| \leq \|x\| \, \forall x \in X.$$
Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Sin pérdida de generalidad, supóngase que X, Y son espacios vectoriales normados sobre los complejos, y sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Por hipótesis, existen constantes positivas C_1, C_2 tales que
$$\|T_1x\| \leq C_1\|x\| \text{ y } \|T_2x\| \leq C_2\|x\|, \forall x \in \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2),$$
por lo que, para todo $x \in \mathcal{D}(T_1) \cap \mathcal{D}(T_2)$,
$$\|(\alpha T_1 + T_2)x\| = \|\alpha T_1x + T_2x\| \leq \|\alpha T_1x\| + \|T_2x\| \leq (|\alpha|C_1 + C_2)\|x\|;$$
es decir, $\alpha T_1 + T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$. Así, se tiene que cualquier combinación lineal de operadores en $\mathcal{B}(X, Y)$ es nuevamente un elemento de $\mathcal{B}(X, Y)$ y por tanto, $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio vectorial.

Para cada elemento $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, sea $\| \; \| : \mathcal{B}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$
Se mostrará que $\| \; \|$ así definida satisface la definición de una norma. Sea $X_1 = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$.

i) El operador cero cumple que $0x = 0$ para todo $x \in X_1$, y por lo tanto $\|0\| = \sup_{\|x\|=1}\|0x\| = 0$. Suponga ahora que se tiene un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ tal que $\|T\| = 0$. Entonces $\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = 0$ para todo $x \in X_1$, como

$$0 \leq \|Tx\| \leq \sup_{\|x\|=1}\|Tx\|, \forall x \in X_1,$$

se concluye que $Tx = 0$ para todo $x \in X_1$. Lo anterior asegura que T es el operador 0: dado $y \in X$, por la estructura de espacio vectorial, $y = \alpha x$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $x \in X_1$, lo que lleva a que

$$Ty = T(\alpha x) = \alpha Tx = 0,$$

por ser y arbitrario, T es el operador 0.

ii) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\|\alpha T\| = \sup_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1}|\alpha|\|Tx\| = |\alpha|\sup_{\|x\|=1}\|Tx\| = |\alpha|\|T\|$$

iii) Por último, se prueba que la norma definida satisface la desigualdad triangular: dados $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$,

$$\|T_1 + T_2\| = \sup_{\|x\|=1}\|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1}\|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1}(\|T_1x\|+\|T_2x\|),$$

y como

$$\sup_{\|x\|=1}(\|T_1x\| + \|T_2x\|) \leq \sup_{\|x\|=1}\|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1}\|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\|$$

se tiene que

$$\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|.$$

como se quería probar. $\square$

Proposición 1.5. *Sean X, Y espacios normados. Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, entonces $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio cerrado.*

Demostración. Considere una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{N}(T)$ tal que $x_n \longrightarrow x_0$. Por demostrar que $x_0 \in \mathcal{N}(T)$. Por ser T acotado, es continuo de ahí que

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0,$$

por lo tanto, para cada $\varepsilon > 0$ existe un índice $n \in \mathbb{N}$ a partir del cual ocurre que

$$\|Tx_n - Tx_0\| < \varepsilon.$$

Como $x_n \in \mathcal{N}(T)$, entonces $Tx_n = 0$, lo que implica en particular

$$0 \leq \|Tx_0\| < \varepsilon, \text{ para todo } \varepsilon,$$

es decir, $\|Tx_0\| = 0$ lo que ocurre, por propiedades de la norma, si y sólo si $Tx_0 = 0$. □

Proposición 1.6. *La función $f : \mathcal{B}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ le asigna el valor $\|T\|$ es continua.*

Demostración. Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y considere $\varepsilon > 0$. Hágase $\delta = \varepsilon$; como una consecuencia de la desigualdad triangular, para $T_0 \in \mathcal{B}(X, Y)$ tal que $\|T - T_0\| < \delta$ se tiene que

$$|\|T\| - \|T_0\|| \leq \|T - T_0\| < \delta = \varepsilon.$$

Como T es arbitrario, f es continua en $\mathcal{B}(X, Y)$. □

Corolario 1.1. *Sean X, Y, Z espacios normados. Considere los espacios de operadores acotados $(\mathcal{B}(X, Y), \|\ \|)$, $(\mathcal{B}(Y, Z), \|\ \|)$ y $(\mathcal{B}(X, Z), \|\ \|)$ donde $\|\ \|$ es la norma operador en cada uno de esos espacios. Para $T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$, $T_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $T_1 \circ T_2 = T_1T_2 \in \mathcal{B}(X, Z)$ se cumple:*

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|.$$

Demostración. Dados $T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$, $T_1 \in \mathcal{B}(Y, Z)$ y $T_1T_2 \in \mathcal{B}(X, Z)$ para todo $x \in X$ se cumple que

$$\|T_1T_2x\| \leq \|T_1\|\|T_2x\| \leq \|T_1\|\|T_2\|\|x\|$$

Tomando supremos al evaluar en los elementos de la bola cerrada de radio unidad centrada en el origen en X, se tiene que

$$\|T_1T_2\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1\|\|T_2x\| = \|T_1\| \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\| = \|T_1\|\|T_2\|.$$

□

Teorema 1.3. *Si Y es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X,Y)$. Para todo $x \in X$, existen $m, n \in \mathbb{N}$ tales que después de cierto índice se cumple que

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\|$$

por lo que la sucesión $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Al ser Y un espacio de Banach, tal sucesión debe converger a un $y \in Y$. Sea $T : X \longrightarrow Y$ definido por $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x = y$. Así definido, T es lineal y acotado: de la desigualdad triangular se cumple que

$$|\|T_n\| - \|T_m\|| \leq \|T_n - T_m\|$$

Por lo tanto, la sucesión de números reales $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente. Sea $C = \lim_{n\to\infty} \|T_n\|$. Entonces

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\| = C\|x\|,$$

por lo que $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Para $T_n \in \mathcal{B}(X,Y)$

$$\|(T - T_n)x\| = \lim_{m\to\infty} \|(T_m - Tn)x\| \text{ o bien}$$

$$\frac{\|(T - T_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{m\to\infty} \|(T_m - Tn)\|$$

lo que implica

$$\|T - T_n\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|(T - T_n)x\|}{\|x\|} \leq \lim_{m\to\infty} \|(T_m - Tn)\|.$$

Así $T_n \longrightarrow T$, como se quería probar. $\square$

Definición. Sea un operador lineal inyectivo entre espacios normados X, Y, $T : X \longrightarrow Y$. El operador

$$T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T) \text{ tal que } Tx_0 = y_0 \mapsto x_0$$

recibe el nombre de **operador inverso** de T.

Un importante teorema para operadores acotados es el siguiente.

Teorema 1.4. *Si X, Y son espacios de Banach y $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es tal que T es inyectivo y $\mathcal{R}(T) = Y$, entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$.*

Demostración. La demostración puede ser consultada en [5], sección 3.4. □

Definición. Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre espacios normados X, Y. Se dice que T es un operador **cerrado** si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}(T)$ que satisface

$$x_n \longrightarrow x \text{ en } X, \ Tx_n \longrightarrow y \text{ en } Y,$$

entonces $x \in \mathcal{D}(T)$ y $Tx = y$.

De la definición se tiene casi de forma inmediata la siguiente proposición.

Proposición 1.7. *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, con $\mathcal{D}(T) = X$. Entonces T es un operador cerrado.*

Demostración. Considere una sucesión convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, digamos, $x_n \longrightarrow x_0$. Como $T : X \longrightarrow Y$ es acotado, entonces es continuo y dado que $\mathcal{D}(T) = X$, se tiene que $x_0 \in X$, además

$$Tx_0 = T \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = y,$$

esto es, T es un operador cerrado. □

Observación 1.1. Es importante hacer notar que la hipótesis $\mathcal{D}(T) = X$ es fundamental, pues al no cumplirse, ser acotado no implica ser un operador cerrado, como lo ilustra el siguiente ejemplo, dado en [1]: Considere un espacio normado X y sea $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ el operador identidad, donde el subconjunto $\mathcal{D}(T) \subset X$ es denso en X. Es claro que T es lineal y acotado, pero T no es cerrado: sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $x_n \longrightarrow x_0$ en X, con $x_0 \in X \setminus \mathcal{D}(T)$. Entonces T no satisface la definición de un operador cerrado.

Teorema 1.5. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre tales espacios.*

(a) Si T es cerrado y $\mathcal{D}(T) = X$, entonces existen constantes positivas q, r tales que $\|Tx\| \leq q$ siempre que $\|x\| \leq r$.

(b) Si T es cerrado y $\mathcal{D}(T) = X$, entonces $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Observación 1.2. El teorema anterior es una versión del teorema de la gráfica cerrada y acorde con [5] es equivalente al teorema 1.4. Para más detalles ver [5], sección 3.4, teorema 3.10.

En relación con el teorema 1.4, se encuentran los operadores acotados inferiormente.

Definición. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios normados es **acotado inferiormente** si existe una constante $C > 0$ tal que

$$C\|x\| \leq \|Tx\|, \text{ para cada } x \in X.$$

Observación 1.3. La definición anterior es equivalente a decir que T es acotado inferiormente si existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \leq \|Tx\| \text{ para todo } x \in X \text{ tal que } \|x\| = 1.$$

Proposición 1.8. *Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios normados no es acotado inferiormente si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X de vectores unitarios tales que $\|Tx_n\| \to 0$.*

Demostración. Se probará la necesidad, esto es, suponga que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vectores unitarios y tales que $\|Tx_n\| \to 0$. Si T fuera acotado inferiormente, existiría una constante $C > 0$ tal que, para todo $x \in X$ con $\|x\| = 1$ se tendría que

$$C \leq \|Tx\|,$$

en particular, para los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sea $0 < \varepsilon < C$, entonces se tiene que

$$C \leq \|Tx_n\| < \varepsilon < C,$$

lo que es una contradicción. Así pues, no existe una constante $C > 0$ tal que

$$C \leq \|Tx\|,$$

y por lo tanto T no es acotado inferiormente.

Para probar la suficiencia, sólo hay que notar lo siguiente: Si T no es acotado inferiormente y si no existiese tal sucesión, se tendría que existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ con $\|x\| = 1$

$$\|x\| \leq C\|Tx\|,$$

pero por definición, se tiene entonces que T es acotado inferiormente, lo que contradice la hipótesis. $\square$

Para espacios de Banach se tiene una caracterización para los operadores acotados inferiormente.

Teorema 1.6. *Sea $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, donde X, Y son espacios de Banach. Entonces T es acotado inferiormente si y sólo si T es inyectivo y tiene rango cerrado.*

Demostración. Asuma que T es acotado inferiormente. Por demostrar que T es inyectivo y que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. El operador T es inyectivo ya que $Tx = 0$ si y sólo si $x = 0$, ya que es acotado inferiormente. Suponga que se tiene una sucesión $Tx_n \to y \in Y$. Entonces, dado un $\varepsilon > 0$, existe un N_ε tal que si $m, n \geq N_\varepsilon$,

$$C\|x_n - x_m\| \leq \|T(x_n - x_m)\| = \|Tx_n - Tx_m\| < \varepsilon$$

y por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como X es completo $x_n \to x$ y por ser T acotado, $Tx_n \to Tx$; de donde $Tx = y$ y por tanto $\mathcal{R}(T)$ es cerrado.

Recíprocamente, asuma ahora que T tiene rango cerrado y que es inyectivo. Por el teorema 1.4, $T : X \longrightarrow \mathcal{R}(T)$ tiene inversa continua, por lo tanto, para algún $C > 0$ se tiene que

$$\|T^{-1}y\| \leq C\|y\|, \ y \in \mathcal{R}(T).$$

Sea $y = Tx$, para algún $x \in X$, entonces

$$\frac{1}{C}\|x\| \leq \|Tx\|, \ \text{para todo } x \in X.$$

□

1.3.1. Proyecciones en espacios de Banach

Definición. Una **proyección** es un operador $P \in \mathcal{B}(X)$ tal que

$$P^2 = P,$$

estos operadores son también conocidos como **idempotentes**.

Dada una proyección P,

$$\mathcal{R}(P) = \{x \in X \mid Px = x\}.$$

Si P es una proyección, entonces también lo es $Q = I - P$, lo cual es directo de la definición:

$$Q^2 = (I - P)^2 = I - IP - PI + P^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - P = Q$$

En ocasiones, Q recibe el nombre de **proyección complementaria**, sobre todo en el contexto de espacios de Hilbert. Dadas P y Q sus respectivos rangos y espacios nulos están relacionados de la siguiente manera

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(Q),\ \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(Q),$$

ya que si $y = Px$, entonces $(I - P)y = (I - P)Px = (P - P^2)x = 0$ y por tanto $y \in \mathcal{N}(Q)$. Por otra parte, si $(I - P)y = 0$, entonces $y = Py$ y por lo tanto $y \in \mathcal{R}(P)$. Note que por lo anterior

$$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\},$$

y ademas tanto $\mathcal{R}(P)$ como $\mathcal{R}(Q)$ son subespacios cerrados del espacio de Banach X, ya que el espacio nulo de un operador acotado es cerrado.

Teorema 1.7. *Sea P una proyección y $Q = I - P$. Entonces*

$$\| \, \|_P := \|Px\| + \|Qx\|$$

es una norma equivalente a la norma $\| \, \|$ en el espacio de Banach X.

Demostración. Como $P, Q \in \mathcal{B}(X)$,

$$\|Px\| + \|Qx\| \leq (\|P\| + \|Q\|)\|x\|.$$

Por otra parte, observe que, por la desigualdad triangular

$$\|x\| = \|Px + Qx\| \leq \|Px\| + \|Qx\|,$$

así pues

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|Qx\| \leq (\|P\| + \|Q\|)\|x\|,$$

y por tanto se tiene que

$$\| \, \|_P = \|Px\| + \|Qx\|$$

es una norma equivalente a $\| \, \|$ en X. □

1.4. Espacios de Hilbert

La idea fundamental al estudiar espacios de Hilbert es transferir las ideas y conceptos de los espacios vectoriales de dimensión finita, dotados con un producto interno (los espacios euclídeos o euclidianos, de los cuales el ejemplo canónico es $\mathbb{R}^n$) a espacios más generales, como lo son los espacios de funciones, los que, por lo general, son de dimensión infinita. Es por tal motivo que en esta sección se da un desarrollo un poco más detallado de los resultados fundamentales relacionados con la definición de un espacio de Hilbert.

Definición. Considere un espacio vectorial X sobre el campo $\mathbb{C}$. Una función $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ es un **producto interno** si satisface

i) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in X$, $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$

ii) Para $\alpha \in \mathbb{C}, x, y, w \in X$ se satisface

$$\langle x, \alpha y + w\rangle = \langle x, \alpha y\rangle + \langle x, w\rangle = \alpha\langle x, y\rangle + \langle x, w\rangle$$

iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, para todo $x, y \in X$.

Observación 1.4. Notemos que para $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in X$, utilizando las propiedades ii) y iii) se cumple que

$$\langle \alpha x, y\rangle = \overline{\langle y, \alpha x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

Ejemplo 1.2 (El espacio ℓ^2). Sea

$$X = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

el espacio de sucesiones de números complejos con las operaciones usuales de suma de sucesiones y producto de un escalar complejo por una sucesión, es decir, dadas $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ definimos

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} &= \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \\ \alpha \cdot \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} &= \{\alpha a_n\}_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Afirmamos que X así definido es un espacio vectorial sobre los complejos y que si definimos $\langle , \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x}_n y_n,$$

donde la barra indica conjugación compleja, entones $\langle , \rangle$ es un producto interno (probarlo). Este espacio es una importante fuente de ejemplos por lo que se tiene una forma especial para denotarlo, lo llamaremos el espacio ℓ^2. Es usual denotar a los elementos de ℓ^2 para fines operativos como

$$\{a_n\} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

A continuación se expone como la noción de producto interno ayuda a desarrollar ideas geométricas en el espacio vectorial X: la noción de ortogonalidad entre elementos del espacio X da una generalización del comportamiento de elementos ortogonales en espacios euclidianos de dimensión finita.

Definición. Dado un espacio vectorial con producto interno $(X, \langle , \rangle)$ y vectores $x, y \in X$ diremos que x es **ortogonal** a y (o bien, que x, y son ortogonales entre sí) si $\langle x, y\rangle = 0$. Un **conjunto (o sistema) ortogonal** de vectores es una colección $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ en X si $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$ siempre que $\alpha \neq \beta$. Diremos además que $x \in X$ es un vector **unitario** si $\langle x, x\rangle = 1$. Un conjunto ortogonal en el que cada uno de sus elementos es unitario recibe el nombre de **conjunto (o sistema) ortonormal**, esto es, sus elementos satisfacen

a) $\langle x_\alpha, x_\alpha\rangle = 1$,

b) $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$ para $\alpha \neq \beta$.

Una de las propiedades de producto interno nos dice que $\langle x, x\rangle \geq 0$ es decir, $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ por lo que es cuadrado de algún número. Podemos así definir la cantidad

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

de tal forma que $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$. El hecho es que tales cantidades adquieren un significado geométrico, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 1.9. *Sean x, y vectores ortogonales entre sí de un espacio con producto interno $(X, \langle , \rangle)$. Entonces*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostración. Usemos las definiciones mencionadas en el comentario previo a la proposición.

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2
\end{aligned}$$

Debido a que $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$. □

La idea anterior se puede extender a conjuntos ortonormales y de hecho nos da una idea de la estructura subyacente que tiene un espacio vectorial con producto interno.

Corolario 1.2. *Si* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *es un conjunto ortogonal de vectores en un espacio con producto interno, entonces*

$$\|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\| = \|x_1\| + \|x_2\| + \ldots + \|x_n\|.$$

Nótese que en un espacio con producto interno $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, para $x, y \in X$ arbitrarios se cumple que

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

y, análogamente

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

igualdades que implican la proposición siguiente:

Proposición 1.10 (La ley del paralelogramo). *En un espacio con producto interno* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *se cumple, para* $x, y \in X$ *arbitrarios, que*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Demostración. Inmediato de las igualdades anteriores. □

En la misma dirección se tiene la llamada identidad de polarización.

Proposición 1.11 (Identidad de polarización). *Sea* $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un espacio vectorial complejo con producto interno. Para* $x, y \in X$ *se cumple*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) - \frac{i}{4}(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2).$$

Demostración. Basta notar que para $\alpha \in \mathbb{C}$, a partir de las propiedades de un producto interno

$$\|x+\alpha y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, \alpha y\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2.$$

En particular, si $\alpha = i$, tendremos

$$\|x+iy\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

y análogamente, si $\alpha = -i$

$$\|x-iy\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle + \|y\|^2,$$

de donde

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = -4\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle.$$

Repitiendo los cálculos cuando $\alpha = 1$ y $\alpha = -1$ se obtiene que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

El resultado se obtiene de forma directa. □

Mención aparte merece el siguiente resultado, que es una generalización del teorema de Pitágoras de la geometría elemental.

Teorema 1.8 (Teorema de Pitágoras para espacios normados). *Sea $\{x_n\}_{n=1}^N$ un conjunto ortonormal en un espacio con producto interno $(X, \langle , \rangle)$. Entonces, para todo $x \in X$,*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x_n, x\rangle x_n \right\|^2$$

Demostración. Escribamos

$$x = \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right)$$

Ahora calculemos

$$\langle x, x\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right), \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n + \left(x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right) \right\rangle,$$

usando la ortonormalidad del conjunto $\{x_n\}_{n=1}^N$ tenemos que

$$\langle x, x\rangle = \left\| \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right\|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right\|^2,$$

ya que

$$\left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n, x - \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n, x \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n, \sum_{n=1}^N \langle x, x_n\rangle x_n \right\rangle,$$

y cómo ésta última diferencia es cero, se concluye así que

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2 + \left\| x - \sum_{n=1}^N \langle x_n, x\rangle x_n \right\|^2$$

□

Del teorema anterior tenemos dos corolarios muy importantes, la prueba de ambos son consecuencias inmediatas de dicho teorema.

Corolario 1.3 (Desigualdad de Bessel). *Sea $\{x_n\}_{n=1}^N$ un conjunto ortonormal en un espacio con producto interno $(X, \langle , \rangle)$. Entonces, para todo $x \in X$,*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=1}^N |\langle x, x_n\rangle|^2$$

Demostración. La cantidad

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{N} \langle x_n, x \rangle x_n \right\|^2 \geq 0, \forall x \in X,$$

de donde,

$$\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 \geq 0.$$

□

Corolario 1.4 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky). *Sean x, y elementos de un espacio con producto interno X. Entonces*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

Demostración. Sea $v = \frac{y}{\|y\|}$. Es claro que X es un vector unitario y más aún, el conjunto unipuntual $\{v\}$ es ortonormal. Por el corolario anterior,

$$\|x\|^2 \geq |\langle x, v \rangle|^2 = |\langle x, \frac{y}{\|y\|} \rangle|^2$$

de donde

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

□

La siguiente proposición nos permitirá desarrollar ideas geométricas aún más ricas en los espacios con producto interno.

Proposición 1.12. *Sea $(X, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno sobre un campo $\mathbb{K}$. Entonces X es un espacio vectorial normado si definimos, para todo $x \in X$,*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Demostración. Por definición $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, y es claro que $\sqrt{\langle x, x \rangle} = 0$ si y sólo si $x = 0$. Por otro lado, sea $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces, para $x \in V$

$$\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = \sqrt{|\alpha|^2 \langle x, x \rangle} = |\alpha| \|x\|.$$

Finalmente, veamos que se cumple la desigualdad triangular. Si $x, y \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \overline{\langle y, x \rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que para todo número complejo z se cumple que $Re(z) \leq |z|$, por tanto

$$\|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|(\langle x, y\rangle)| + \|y\|^2,$$

y por el corolario 1.4 (Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky)

$$\|x\|^2 + 2|(\langle x, y\rangle)| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Así

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \therefore \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \square$$

A continuación tenemos la definición de lo que es un espacio de Hilbert.

Definición. Un espacio vectorial con producto interno $(X, \langle , \rangle)$ es llamado **espacio de Hilbert** si al ser considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la norma, es un espacio métrico completo. A menudo, se denotará a un espacio de Hilbert por $\mathcal{H}$.

Así pues, un espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que la norma es inducida por un producto interno. Cabe mencionar aquí que una pregunta interesante al respecto es ¿En un espacio normado, cuando la norma definida en él proviene de un producto interno? la respuesta la da el siguiente teorema, que data del año 1935, debido a Pascual Jordan y John von Neumann[1]

Teorema 1.9. *En un espacio vectorial normado $(X, \|\ \|)$ en el que la norma satisface la ley del paralelogramo es posible definir un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tal que*

$$\langle x, x\rangle = \|x\|^2.$$

Llegado éste punto, se da la definición de cuando dos espacios de Hilbert son isomorfos.

Definición. Dos espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son **isomorfos** si entre ellos existe un operador lineal $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ tal que

1. El operador U es una isometría, esto es, $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{H}_1$.
2. Además, U es un operador lineal sobreyectivo.

Proposición 1.13. *Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ dos espacios de Hilbert y $U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un isomorfismo entre tales espacios. Entonces U es inyectivo.*

[1] El artículo es "On inner products in linear, metric spaces"

Demostración. La prueba es estándar para demostrar inyectividad de un mapeo en general. Suponga que $Ux = Uy$, entonces, por hipótesis

$$\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle \text{ para cualesquiera } x, y \in \mathcal{H}_1.$$

Por ser U sobre, dado $w \in \mathcal{H}_2$ existe $z \in \mathcal{H}_1$ tal que $Uz = w$; de ahí que

$$0 = \langle Ux - Uy, Uz\rangle = \langle U(x-y), Uz\rangle = \langle x - y, z\rangle.$$

Note que $w \in \mathcal{H}_2$ fue arbitrario, por lo tanto

$$\langle x - y, z\rangle = 0 \text{ para cualquier } z \in \mathcal{H}_1,$$

de donde $x - y = 0$; y así $x = y$, en otras palabras, U es inyectivo. □

Retomando las ideas geométricas en espacios con producto interno, en los espacios de Hilbert, considere un subespacio cerrado M. Sea $M^\perp \subset \mathcal{H}$ el conjunto de todos los vectores ortogonales a M. $M^\perp$ es llamado el **el complemento ortogonal** de M, que resulta ser subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. Nótese que

$$M \cap M^\perp = \{0\}.$$

Definición. Un subconjunto M de un espacio vectorial X (real o complejo), es **convexo** si y sólo si para cualesquiera $x, y \in M$ y $\tau \in [0, 1]$ se cumple que

$$\tau x + (1 - \tau)y \in M.$$

El vector $\tau x + (1 - \tau)y$ es llamado una **combinación convexa** de x y y.

De la definición anterior, se puede afirmar que cualquier subespacio vectorial de un espacio vectorial es un conjunto convexo.

Teorema 1.10. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y un subconjunto $M \subset \mathcal{H}$ cerrado y convexo. Dado $x \in \mathcal{H}$, existe un único $z \in M$ tal que*

$$\|x - z\| = \inf_{y\in M}\{\|x - y\|\} = d(x, M).$$

Demostración. Dado un punto x en un espacio métrico, la distancia de un punto a un conjunto no vacío M siempre existe al ser una cantidad acotada inferiormente por cero. El vacío es un conjunto convexo pero no resulta de interés en este contexto, así que suponga que M es no vacío. Sea $d = \inf_{y\in M}\|x - y\|$ y tome una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset M$ tal que $\|x - y_n\| \longrightarrow d$.

Se mostrará que es una sucesión de Cauchy. De la ley del paralelogramo, 1.10, se tiene que

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - \|2x - y_n - y_m\|^2.$$

Note ahora que $\|2x - y_n - y_m\|^2 = 4\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\|^2 \geq 4d^2$, ello debido a la hipótesis de ser M es convexo, de donde $\frac{y_n+y_m}{2} \in M$ y dada la definición de d, se sigue la desigualdad. De lo anterior

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4d^2.$$

Dado un $\varepsilon > 0$ y m, n suficientemente grandes, se tiene que

$$\begin{aligned} \|x - y_n\|^2 - \varepsilon &\leq d^2 \text{ y} \\ \|x - y_m\|^2 - \varepsilon &\leq d^2 \text{ de donde} \end{aligned}$$

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 4(d^2 + \varepsilon) - 4d^2 = 4\varepsilon$$

es decir, la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por ser M cerrado, tiene límite en M. Sea $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$. Como la norma es continua

$$d = \lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = \|x - \lim_{n\to\infty} y_n\| = \|x - z\|,$$

es decir, $d = \|x - z\|$. Resta probar la unicidad de tal punto z, para lo cual se aplicará nuevamente la ley del paralelogramo. Sean $w_1 \in M$ tal que

$$d = \inf_{y\in M} \|x - y\| = \|x - w_1\| = \|x - z\|, \text{ entonces}$$

$$2\|x - w_1\|^2 + 2\|x - z\|^2 = \|2x - (w_1 + z)\|^2 + \|z - w_1\|^2,$$

que es posible reescribir como

$$\frac{1}{2}(\|x - w_1\|^2 + \|x - z\|^2) = \|x - \frac{1}{2}(w_1 + z)\|^2 + \frac{1}{4}\|z - w_1\|^2.$$

Como M es convexo, $\frac{1}{2}(w_1 + z) \in M$ y

$$\|x - \frac{1}{2}(w_1 + z)\|^2 \geq d^2,$$

y así

$$d^2 \geq d^2 + \frac{1}{4}\|z - w_1\|^2,$$

lo que es posible si y sólo si $\|z - w_1\|^2 = 0$ lo que implica que $z = w_1$. $\square$

Cabe mencionar aquí que la existencia de puntos más cercanos en subconjuntos espacios de Banach más generales (llamada la propiedad del punto más cercano: *nearest point property*) ha sido motivo de investigación. El lector interesado puede explorar sobre los llamados conjuntos de Chebyshev para introducirse en el tema.

Como consecuencia del teorema anterior se puede decir que hay vectores ortogonales a cualquier subespacio cerrado propio M de $\mathcal{H}$ y más aún, hay suficiente de ellos para escribir

$$\mathcal{H} = M + M^{\perp} := \{x + y \,|\, x \in M, y \in M^{\perp}, \}$$

tal propiedad geométrica es de vital importancia ya que permite que, en general, los espacios de Hilbert sean un poco más fáciles de manejar que un espacio de Banach. ([2] pp. 41). El siguiente resultado es conocido como el **lema de la proyección**.

Teorema 1.11. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $M \subset \mathcal{H}$ un subespacio cerrado. Entonces, todo $x \in \mathcal{H}$ puede ser escrito de forma única como*

$$x = z + y, z \in M,\ y \in M^{\perp}$$

Demostración. Sea $x \in \mathcal{H}$. Por el teorema anterior, existe un elemento único $z \in M$ tal que $d = \inf_{y \in M} \|x - y\| = \|x - z\|$. Sea $w = x - z$. Se afirma que $w \in M^{\perp}$. Para probarlo, supóngase lo contrario, esto es, $\langle w, ty \rangle \neq 0$ para $y \in M \backslash \{0\}, t \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Sin pérdida de generalidad, suponga por el momento que $\operatorname{Re}\langle w, y \rangle \neq 0$. Así,

$$d^2 \leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|w - ty\|^2 = d^2 - 2t \operatorname{Re}\langle w, y \rangle + t^2 \|y\|^2, \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \backslash \{0\},$$

de donde

$$2t \operatorname{Re}\langle w, y \rangle \leq t^2 \|y\|^2.$$

A partir de la desigualdad anterior, para todo $t > 0$ se obtiene que

$$\frac{2 \operatorname{Re}\langle w, y \rangle}{\|y\|^2} \leq t, \text{ por lo tanto } \frac{2 \operatorname{Re}\langle w, y \rangle}{\|y\|^2} \leq 0.$$

Por otra parte, para todo $t < 0$ se cumple que

$$t \leq \frac{2 \operatorname{Re}\langle w, y \rangle}{\|y\|^2}, \text{ y así } \frac{2 \operatorname{Re}\langle w, y \rangle}{\|y\|^2} \geq 0$$

lo que implica que

$$\operatorname{Re}\langle w, y \rangle = 0.$$

Para ver que $\operatorname{Im}\langle w, y\rangle = 0$ se utilizará, en esencia, la misma técnica. Para $y \in M \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ suponga que $\operatorname{Im}\langle w, y\rangle \neq 0$. Entonces,

$$d^2 \leq \|x - (z + ity)\|^2 = \|w - ity\|^2 = d^2 + 2t \operatorname{Im}\langle w, y\rangle - t^2\|y\|^2, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

entonces, de manera análoga a lo ya realizado

$$t^2\|y\|^2 \geq 2t \operatorname{Im}\langle w, y\rangle.$$

Si se considera ahora que $t > 0$, se cumple entonces que

$$t \geq \frac{2\operatorname{Im}\langle w, y\rangle}{\|y\|^2}, \text{ por lo que se deduce que } \frac{2\operatorname{Im}\langle w, y\rangle}{\|y\|^2} \leq 0.$$

Cuando se consideran valores arbitrarios de t pero tales que $t < 0$, un argumento similar muestra que

$$\frac{2\operatorname{Im}\langle w, y\rangle}{\|y\|^2} \geq 0,$$

lo que lleva a la conclusión que $\operatorname{Im}\langle w, y\rangle = 0$. Así pues, se debe cumplir que

$$\langle w, y\rangle = 0,$$

como se quería probar.

De lo anterior, $x = w + z$ con $z \in M$ y $w \in M^\perp$. Para probar la unicidad, suponga que $x \in \mathcal{H}$ admite al menos dos descomposiciones, es decir, que existen $z_1, z_2 \in M$ y $w_1, w_2 \in M^\perp$ tales que

$$x = z_1 + w_1 = z_2 + w_2.$$

Entonces

$$z_1 - z_2 = w_2 - w_1,$$

y por lo tanto $w_2 - w_1 = z_1 - z_2 \in M \cap M^\perp = \{0\}$, lo que implica $z_1 = z_2,\ w_1 = w_2$. $\square$

1.4.1. Bases de espacios de Hilbert

Definición. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y un subconjunto ortonormal $S \subset \mathcal{H}$. Si $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, con Λ un conjunto de índices, es tal que es un sistema ortonormal de elementos de $\mathcal{H}$ maximal (i. e. no contenido de forma propia en algún otro sistema ortonormal), se dirá en tal caso que S es una **base ortonormal** (o **sistema completo ortonormal**) de $\mathcal{H}$.

La diferencia entre una base de Hamel y una base ortonormal radica que la primera depende de la estructura lineal del espacio, mientras que las bases ortonormales guardan una relación profunda con la estructura topológica del espacio, al ser la métrica inducida por el producto interno (ver [9]).

Ejemplo 1.3. Considere en el espacio de Hilbert ℓ^2 el conjunto $\{e_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \ldots, \delta_{ij}, \ldots)\}$. Tal conjunto es un sistema ortonormal.

Teorema 1.12. *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tiene una base ortonormal.*

Demostración. La demostración es una aplicación directa del lema de Zorn. Sea $\mathfrak{C}$ la familia de conjuntos ortonormales en $\mathcal{H}$. Tal familia es no vacía pues para $h \in \mathcal{H}$ el conjunto $\{\frac{h}{\|h\|}\}$ es un conjunto ortonormal. Se induce en $\mathfrak{C}$ un orden parcial del siguiente modo: para $S_1, S_2 \in \mathfrak{C}$, se dirá que $S_1 \prec S_2$ si y sólo si $S_1 \subset S_2$; claramente, la relación $\prec$ definida en $\mathfrak{C}$ satisface la definición de un orden parcial, esto es reflexividad, transitividad y antisimetría. Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena arbitraria (un conjunto linealmente ordenado) en $\mathfrak{C}$, donde Λ es un conjunto de índices. Entonces el elemento

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} S_\alpha$$

es una cota superior para cualquier elemento de $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Por ser $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una cadena arbitraria de $\mathfrak{C}$ es posible aplicar ahora el lema de Zorn y concluir así que $\mathfrak{C}$ tiene al menos un elemento maximal. $\square$

A continuación se presenta una analogía entre la representación de un elemento perteneciente a un espacio vectorial por medio de elementos de una base de Hamel (una representación de tipo algebraica) y una correspondiente representación de un elemento perteneciente a un espacio de Hilbert por medio de elementos de una base ortonormal (una representación de tipo analítica, al hacerse presente la noción de convergencia).

Teorema 1.13. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces*

i) Para todo $x \in \mathcal{H}$

$$x = \sum_{\alpha\in\Lambda} \langle x_\alpha, x\rangle x_\alpha,$$

ii) y además, se satisface la ***identidad de Parseval***

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x_\alpha, x\rangle|^2.$$

Demostración. Sea $\Lambda_N = \{1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{N}$. Para $x \in \mathcal{H}$, por la desigualdad de Bessel, se cumple que

$$\sum_{j=1}^{N} |\langle x_{\alpha_j}, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Note que para $N = 1, 2, \ldots$ se genera una sucesión creciente y acotada de números reales, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tal sucesión es convergente. De lo anterior, es posible afirmar que

$$\langle x_\alpha, x\rangle \neq 0$$

para un conjunto a lo más numerable de índices, $\{\alpha_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$. Sea

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, y\rangle x_{\alpha_j}.$$

Entonces, para $n > m$

$$\|y_n - y_m\|^2 = \|\sum_{j=m+1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, x\rangle x_{\alpha_j}\|^2 = \sum_{j=m+1}^{n} |\langle x_{\alpha_j}, x\rangle|^2,$$

La sucesión de sumas parciales $\sum_{j=1}^{n} |\langle x_{\alpha_j}, x\rangle|^2$ es convergente, como se había mencionado líneas arriba y por lo tanto, dado un $\varepsilon > 0$, para n, m suficientemente grandes se cumple que

$$\sum_{j=m+1}^{n} |\langle x_{\alpha_j}, x\rangle|^2 < \varepsilon,$$

y así la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$ y por tanto converge a un elemento $x_0 \in \mathcal{H}$. Para tal x_0 se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle x - x_0, x_{\alpha_j}\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, x\rangle x_{\alpha_j}, x_{\alpha_j}\rangle \\
&= \langle x, x_{\alpha_j}\rangle - \lim_{n\to\infty} \overline{\langle x_{\alpha_j}, x\rangle} \langle x_{\alpha_j}, x_{\alpha_j}\rangle \\
&= \langle x, x_{\alpha_j}\rangle - \langle x, x_{\alpha_j}\rangle = 0;
\end{aligned}$$

mientras que para un $\alpha \neq \alpha_l$, para algún l se tiene que

$$\langle x - x_0, x_\alpha\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, x\rangle x_{\alpha_j}, x_\alpha\rangle = 0.$$

Así, $x - x_0$ es ortogonal a x_α para todo $\alpha \in \Lambda$. Se muestra a continuación que $x - x_0 = 0$. Si $x - x_0 \neq 0$ entonces

$$S \cup \left\{ \frac{y - y_0}{\|y - y_0\|} \right\}$$

es un sistema ortonormal que contiene a S, lo que no puede ser debido a que S es maximal. Así pues, $x - x_0 = 0$ y por lo tanto

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j}.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{j=1}^{n} \langle x_{\alpha_j}, x \rangle x_{\alpha_j}\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} (\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x_{\alpha_j}, y \rangle|^2) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in\Lambda} |\langle x_\alpha, x \rangle|^2.$$

□

En las aplicaciones, una de las propiedades más importantes que tiene un espacio de Hilbert es la de ser separable ya que este tipo de espacios tienen una base ortonormal a lo más numerable.

En relación con tal propiedad está la cualidad de que un subconjunto de un espacio de Hilbert sea **fundamental** o, a veces también llamado **total**, esto es, que el conjunto generado a partir del subconjunto en cuestión sea denso en $\mathcal{H}$.

Definición. Sea $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un subconjunto propio de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. $\mathcal{M}$ es **fundamental** o **total** si se cumple que

$$\overline{\operatorname{span} \mathcal{M}} = \mathcal{H}.$$

Teorema 1.14. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Entonces,*

a) Si $\mathcal{H}$ es separable, todo sistema ortonormal en $\mathcal{H}$ es numerable.

b) Si $\mathcal{H}$ contiene una sucesión ortonormal total en $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ es separable.

Demostración. a) Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\mathcal{M}_0$ un conjunto cualquiera denso en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un conjunto ortonormal arbitrario. Para $x, y \in \mathcal{M}$ se cumple que

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = 2,$$

y por lo tanto $\|x - y\| = \sqrt{2}$. Así, al considerar las bolas $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(x)$ y $B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(y)$ se tiene que

$$B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(x) \cap B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(y) = \emptyset.$$

De la densidad de $\mathcal{M}_0$ existen $m_0, m_1 \in \mathcal{M}_0$ tales que $m_0 \in B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(x)$ y $m_1 \in B_{\frac{\sqrt{2}}{3}}(y)$. Suponga pues que $\mathcal{M}$ es no numerable. Es posible tomar una cantidad no numerable de bolas $B_\delta(x_\alpha)$ con $\alpha \in \Lambda$ donde Λ es un conjunto de índices arbitrario, $x_\alpha \in \mathcal{M}$ y los δ son radios adecuados de tal forma que

$$B_\delta(x_\alpha) \cap B_\delta(x_\beta) = \emptyset \text{ si } \alpha \neq \beta;\ \delta < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Cada bola así construida contiene al menos un punto de $\mathcal{M}_0$. Por ser $\mathcal{H}$ separable, contiene un conjunto denso numerable $\mathcal{M}_1$ y por la densidad del mismo, aplica la construcción anterior, por tanto, se tiene un subconjunto no numerable de $\mathcal{M}_1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{M}$ es un conjunto ortonormal numerable.

b) Sea $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión ortonormal total en $\mathcal{H}$ y sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\gamma_{n1}e_1 + \gamma_{n2}e_2 + \ldots + \gamma_{nk}e_k, \quad \text{con } \gamma_{nk} \in \mathbb{C}, n = 1, 2, \ldots$$

y $\gamma_{nk} = q_{nk} + ir_{nk}$ con $q_{nk}, r_{nk} \in \mathbb{Q}$. Note que $\mathcal{M}$ es numerable. Lo que resta probar es que $\mathcal{M}$ es denso en $\mathcal{H}$. Como la sucesión $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ es total en $\mathcal{H}$, existe un n tal que $Y_n = \operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ contiene un punto cuya distancia a x es menor a $\varepsilon/2$. En particular $\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para la proyección ortogonal y de x en Y_n, que está dada por

$$y = \sum_{j=1}^n \langle e_k, x\rangle e_k,$$

(ver la demostración del teorema 1.13) y ahora, de la densidad de los racionales

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} [\langle e_k, x\rangle - \gamma_{nk}]\, e_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo tanto

$$v = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj} e_j$$

satisface

$$\begin{aligned} \|x - v\| &= \|x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj} e_j\| \\ &\leq \|x - \sum_{j=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k\| + \|\sum_{j=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k - \sum_{j=1}^{n} \gamma_{nj} e_j\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{M}$ es denso en $\mathcal{H}$, con lo que se concluye que $\mathcal{H}$ es separable. □

1.4.2. Proyecciones en un espacio de Hilbert

En 1.3.1 se habló de proyecciones en espacios de Banach. En lo que respecta a espacios de Hilbert se tiene la definición siguiente (para mayor detalle el lector puede consultar [12], sección 1.4).

Definición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una **proyección ortogonal** $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert es una proyección tal que $\mathcal{R}(P) \perp \mathcal{N}(P)$. Dos proyecciones ortogonales P_1 y P_2 se dicen **proyecciones ortogonales entre sí** si

$$\mathcal{R}(P_1) \perp \mathcal{R}(P_2).$$

Una **familia ortogonal de proyecciones ortogonales** es un conjunto de proyecciones ortogonales entre sí $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, donde Λ es un conjunto de índices no necesariamente numerable.

Definición. Si una familia ortogonal de proyecciones ortogonales $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ satisface

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} P_\alpha x = x, \ \text{para todo } x \in \mathcal{H}$$

se dirá que tal familia es **resolución de la identidad** en $\mathcal{H}$.

Si se considera una sucesión de proyecciones ortogonales entre sí, $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ tomada de una resolución de la identidad, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} P_k \xrightarrow{s} I \text{ a medida que } n \to \infty,$$

en la topología inducida por la norma operador en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Considérese una resolución de la identidad, $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ tal que $P_\alpha \neq 0$ para toda $\alpha \in \Lambda$, definida en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ no trivial. Si $\{\lambda\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una familia de escalares, se define el conjunto

$$\mathcal{D}(T) = \{x \in \mathcal{H} \mid \{\lambda_\alpha P_\alpha x\}_{\alpha\in\Lambda} \text{ es sumable en } \mathcal{H}\}.$$

De la definición, $\mathcal{D}(T)$ forma un subespacio vectorial: para $\beta \in \mathbb{C}$ se tiene que, si $\beta x, y \in \mathcal{D}(T)$, entonces $\beta x + y \in \mathcal{D}(T)$, pues

$$\lambda_\alpha P_\alpha(\beta x + y) = \beta\lambda_\alpha P_\alpha x + \lambda_\alpha P_\alpha y,$$

por ser cada P_α operadores lineales, y como cada $\{\lambda_\alpha P_\alpha x\}$, $\lambda_\alpha P_\alpha y$ son sumables, se tiene que $\{\lambda_\alpha P_\alpha(\beta x + y)\}$ es sumable. Note que el subespacio $\mathcal{D}(T)$ no tiene porqué ser en general cerrado.

Observación 1.5. El mapeo $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{H}$ definido por

$$Tx = \sum_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha P_\alpha x, \text{ para todo } x \in \mathcal{D}(T)$$

es llamado la **suma ponderada de proyecciones**. Ver [12].

1.5. El espacio dual y el teorema de Riesz

Definición. Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado complejo (respectivamente, real). Un operador lineal $T : X \longrightarrow \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ si X está definido sobre los complejos o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ si X está definido sobre los reales, recibe el nombre de **funcional lineal**. El conjunto $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ recibe el nombre de **espacio dual** asociado a X y se denotará por X^*. Cabe mencionar en este punto que se está considerando al espacio $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ equipado con la norma operador.

Considere un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sobre los complejos y su respectivo espacio dual $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$. En las aplicaciones es de importancia conocer la forma general que tienen los elementos del espacio dual asociado.

Teorema 1.15 (representación de Riesz para funcionales lineales). *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert sobre los complejos. Para cada $T \in \mathcal{H}^*$ existe un $z_T \in \mathcal{H}$ único y tal que para $x \in \mathcal{H}$ satisface*

$$Tx = \langle z_T, x\rangle,$$

además $\|T\| = \|z_T\|$.

Demostración. Por la proposición 1.7, el espacio nulo de T, $\mathcal{N}(T)$ es cerrado. Si $T \equiv 0$, entonces $\mathcal{H} = \mathcal{N}(T)$ y basta escoger $z_T = 0 \in \mathcal{H}$ de tal modo que

$$Tx = \langle 0, x\rangle \ \forall x \in \mathcal{H},$$

y por lo tanto $\|z_T\| = \|0\| = \|T\|$. Supóngase pues que $T \not\equiv 0$. Entonces $\mathcal{N}(T) \neq \mathcal{H}$ y por ser el espacio nulo de T un subespacio cerrado, por el lema de la proyección, se tiene que

$$\mathcal{H} = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T)^{\perp},$$

donde $\mathcal{N}(T)^{\perp} \neq \{0\}$. Sea $x_0 \in \mathcal{N}(T)^{\perp} \setminus \{0\}$. Defínase

$$z_T = \frac{\overline{Tx_0}}{\|x_0\|^2} x_0.$$

Dado $x \in \mathcal{H}$, si $x \in \operatorname{span}\{x_0\}$, entonces $x = \alpha x_0$, para algún escalar α y por lo tanto se tiene que

$$Tx = \alpha T x_0 = \alpha \overline{\overline{Tx_0}} \frac{\langle x_0, x_0\rangle}{\|x_0\|^2} = \langle z_t, x\rangle.$$

Nótese que si se toma $x \in \mathcal{N}(T)$, entonces

$$Tx = 0 = \langle z_T, x\rangle, \text{ pues } x_0 \in \mathcal{N}(T)^{\perp}.$$

Por otra parte, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(\langle z_T, \cdot\rangle)$; ambos son operadores lineales y además toman los mismos valores en $\mathcal{N}(T)$ y en x_0, por lo que como operadores deben tomar los mismos valores en $M = \operatorname{span}(\mathcal{N}(T) \cup \{x_0\})$: sea $y \in M$, por definición

$$y = \alpha w + \beta x_0, \text{ con } w \in \mathcal{N}(T), \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

entonces $Ty = \beta T x_0$ y

$$\langle z_T, \alpha w + \beta x_0\rangle = \langle z_T, \alpha w\rangle + \langle z_T, \beta x_0\rangle = \beta x_0,$$

como se había afirmado. Ahora observe que $\mathcal{H} = M$ pues, para $h \in \mathcal{H}$ es posible escribir

$$h = \left(h - \frac{Th}{Tx_0}x_0\right) + \frac{Th}{Tx_0}x_0,$$

donde

$$\left(h - \frac{Th}{Tx_0}x_0\right) \in \mathcal{N}(T),$$

y por lo tanto $Tx = \langle z_T, x\rangle$, para todo $x \in \mathcal{H}$. Para probar la unicidad de z_T, como es habitual, suponga que para todo $x \in \mathcal{H}$ existe al menos otro elemento $w_T \in \mathcal{H}$ tal que

$$Tx = \langle z_T, x\rangle = \langle w_T, x\rangle.$$

Entonces,

$$\langle z_T, x\rangle - \langle w_T, x\rangle = 0 \Rightarrow \langle z_T - w_T, x\rangle = 0,\ \forall x \in \mathcal{H},$$

en particular, la igualdad se cumple para $x = z_T - w_T$ y así

$$\langle z_T - w_T, z_T - w_T\rangle = \|z_T - w_T\|^2 = 0,$$

lo que ocurre si y sólo si $z_T - w_T = 0$, es decir, si $z_T = w_T$. Finalmente, para probar la igualdad de las normas, se observa que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |Tx| = \sup_{\|x\|=1} |\langle z_T, x\rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \|z_T\|\|x\| = \|z_T\|$$

y, por otra parte

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |Tx| \geq \left|T\left(\frac{z_T}{\|z_T\|}\right)\right| = \langle z_T, \frac{z_T}{\|z_T\|}\rangle = \|z_T\|,$$

por lo tanto

$$\|T\| = \|z_T\|.$$ □

El teorema 1.3 implica la siguiente proposición.

Proposición 1.14. *Sea X es un espacio vectorial normado complejo (respectivamente real). El espacio X^* es un espacio de Banach.*

Demostración. Basta observar que $\mathbb{C}$, respectivamente $\mathbb{R}$ son, con las métricas usuales, espacios métricos completos. □

Desde luego, $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ tiene estructura de espacio vectorial normado. La definición de espacio dual puede ser aplicada nuevamente a X^* para obtener un **segundo espacio dual** de X: $X^{**} = (X^*)^*$. La importancia de este segundo espacio dual radica en que $g \in X^{**}$ está definido por un elemento fijo $x \in X$; es decir, $g : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ está dado por $f \mapsto g(f) = g_x(f) = f(x)$. Así, se tiene un operador lineal $\mathfrak{J} : X \longrightarrow X^{**}$ dado por $x \mapsto g_x$, el cual recibe el nombre de **mapeo canónico** entre el espacio X y su segundo dual X^{**}. El operador $\mathfrak{J}$ es inyectivo, pues $\mathcal{N}(\mathfrak{J}) = \{0\}$.

Definición. Sea X un espacio vectorial normado y considere a la inmersión canónica $\mathfrak{J} : X \longrightarrow X^{**}$. Si $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = X^{**}$ se dirá que X es **reflexivo**.

Teorema 1.16. *Sea X un espacio vectorial normado. Para cada elemento fijo $x \in X$, el funcional lineal asociado a x, $g_x \in X^{**}$, es acotado en X^* y tiene por norma*

$$\|g_x\| = \|x\|.$$

Demostración. Por definición

$$g_x(f) = f(x),$$

de donde g_x es acotado, pues $\|g_x(f)\| = |f(x)| \leq M\|x\|$, ya que $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es acotado. Por otra parte

$$\|g_x\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{\|f\|\|x\|}{\|f\|} = \|x\| \qquad \square$$

Un ejemplo de la importancia de la definición anterior es la proposición siguiente.

Proposición 1.15. *Si un espacio normado X es reflexivo, entonces es un espacio de Banach.*

Demostración. Como el espacio dual X^* es Banach, entonces X^{**} es Banach. Por otra parte, al ser X reflexivo se tiene que $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = X^{**}$ y como $\mathfrak{J} : X \longrightarrow X^{**}$ resulta ser un isomorfismo entre X y $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$, se sigue el resultado. $\square$

Como una aplicación del teorema de representación de Riesz se tiene el siguiente resultado:

Teorema 1.17. *Todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es reflexivo.*

Demostración. Sea $\mathfrak{T} : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathcal{H}$ dado por $\mathfrak{T}f = z_f$ donde $z_f \in \mathcal{H}$ está determinado por el teorema de representación de Riesz 1.15: para cualquier $h \in \mathcal{H}$, $f(h) = \langle z_f, h\rangle$. También, como consecuencia del teorema 1.15, $\mathfrak{T}$ resulta ser una isometría y una biyección. Se define en $\mathcal{H}^*$:

$$\langle f_0, f_1\rangle = \langle \mathfrak{T}f_0, \mathfrak{T}f_2\rangle,$$

que resulta ser un producto interno en $\mathcal{H}^*$, debido a que

- es claro que, por definición, $\langle f, f\rangle \geq 0$ y que $\langle f, f\rangle = 0$ si y sólo si $f = 0_{\mathcal{H}^*}$ (i.e. es el funcional cero).
- para $\alpha \in \mathbb{C}$, $e, f, g \in \mathcal{H}^*$

$$\begin{aligned}\langle e, \alpha f + g\rangle &= \langle z_e, \alpha z_f + z_g\rangle \\ &= \alpha\langle z_e, z_f\rangle + \langle z_e, z_g\rangle \\ &= \alpha\langle e, f\rangle + \langle e, g\rangle;\end{aligned}$$

- y la propiedad final, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{H}^*$

$$\langle f, g\rangle = \langle z_f, z_g\rangle = \overline{\langle z_g, z_f\rangle} = \overline{\langle g, f\rangle}.$$

Sea $\psi \in \mathcal{H}^{**}$ arbitrario. Nuevamente, por el teorema 1.15, para $f \in \mathcal{H}^*$ y cierto $f_\psi \in \mathcal{H}^*$

$$\psi(f) = \langle f_\psi, f\rangle$$

pero, por definición,

$$\langle f_\psi, f\rangle = \langle \mathfrak{T}f_\psi, \mathfrak{T}f\rangle = \langle z_{f_\psi}, z_f\rangle;$$

Nótese ahora que $f_\psi(z_f) = \langle z_{f_\psi}, z_f\rangle$ y por lo tanto

$$\psi(f) = f_\psi(z_f),\ i.e.\, \mathfrak{J}z_f = \psi,$$

por la definición del mapeo canónico. Como $\psi \in \mathcal{H}^{**}$ fue arbitrario, $\mathfrak{J}$ es sobreyectivo y por lo tanto $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = H^{**}$. □

1.6. El operador adjunto

Definición. Sea $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Se define el **operador adjunto de Hilbert** T^* de T como el operador

$$T^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$$

tal que para toda $x \in \mathcal{H}_1$ y $y \in \mathcal{H}_2$

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle.$$

La prueba de la existencia del operador T^* puede ser encontrada en la sección 3.8 de la referencia [1]. Algunas propiedades básicas del operador adjunto de Hilbert están dadas en el siguiente teorema. Antes de enunciarlo se necesita una proposición que auxiliará en parte de la demostración.

Lema 1.1. *Sean X y Y espacios con producto interno y $Q : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado entre ellos. Entonces:*

1. *$Q = 0$ si y sólo si $\langle Qx, y\rangle = 0$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.*
2. *Si $X = Y$ es un espacio normado sobre los complejos y $\langle Qx, x\rangle = 0$ para todo $x \in X$, entonces $Q = 0$.*

Demostración. Para la primera afirmación, si $\langle Qx, y\rangle = 0$ para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$, en particular se cumple que $\langle Qx, Qx\rangle = 0$ si y sólo si

$$\|Qx\|^2 = 0 \Leftrightarrow Qx = 0,$$

como $x \in X$ es arbitrario, $Q = 0$.

La segunda afirmación se sigue de las siguientes consideraciones. Sea $w = \alpha x_0 + x_1 \in X$. Como $\langle Qw, w\rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(\alpha x_0 + x_1), \alpha x_0 + x_1\rangle \\ &= |\alpha|^2\langle Qx_0, x_0\rangle + \langle Qx_1, x_1\rangle + \alpha\langle Qx_1, x_0\rangle + \bar{\alpha}\langle Qx_0, x_1\rangle \end{aligned}$$

Por hipótesis $\langle Qx_0, x_0\rangle = 0 = \langle Qx_1, x_1\rangle$. Si $\alpha = 1$ entonces

$$\langle Qx_1, x_0\rangle + \langle Qx_0, x_1\rangle = 0.$$

Si en cambio, $\alpha = i$, $\bar{\alpha} = -i$ y por lo tanto

$$\langle Qx_1, x_0\rangle - \langle Qx_0, x_1\rangle = 0.$$

Sumando las igualdades se obtiene que $\langle Qx_1, x_0\rangle = 0$, por lo tanto $\langle Qx_0, x_1\rangle = 0$. Como x_0, x_1 son arbitrarios, se aplica la primer parte del lema para obtener que $Q = 0$. □

Teorema 1.18. *Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert, α un escalar y $S : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ y $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ operadores lineales acotados entre $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *Para $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$*

(b) $(S + T)^* = S^* + T^*$

(c) $(T^*)^* = T$

(d) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

(f) $\|T\| = \|T^*\|$

(g) $T^*T = 0 \Leftrightarrow T = 0$

(h) *Si* $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$*, entonces* $(ST)^* = T^*S^*$.

Demostración. De las propiedades del producto interno y la definición de operador adjunto de Hilbert:

(a) $\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$.

(b) Por definición $\langle x, (S+T)^*y\rangle = \langle (S+T)x, y\rangle = \langle Sx, y\rangle + \langle Tx, y\rangle$, de donde

$$\langle x, (S+T)^*y\rangle = \langle x, S^*y\rangle + \langle x, T^*y\rangle = \langle x, (S^* + T^*)y\rangle,$$

por lo que se deduce la igualdad entre operadores $(S+T)^* = S^* + T^*$.

(c) Con fines de simplificación de la notación hágase $(T^*)^* = T^{**}$. Para $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$ se tiene de la parte (a) que

$$\langle T^{**}x, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle Tx, y\rangle.$$

Lo anterior conduce a que $\langle (T^{**} - T)x, y\rangle = 0$. Aplique la primer parte del lema previo al operador $T^{**} - T$.

(d) Considere el siguiente cálculo

$$\begin{aligned} \langle (\alpha T)^*y, x\rangle &= \langle y, (\alpha T)x\rangle \\ &= \langle y, \alpha(Tx)\rangle \\ &= \alpha\langle T^*y, x\rangle \\ &= \langle \bar{\alpha}T^*y, x\rangle, \end{aligned}$$

o dicho de otra manera $\langle ((\alpha T)^* - \bar{\alpha}T^*)y, x\rangle = 0$. Aplique el lema previo a este teorema, para obtener el resultado.

(e) Aplique la desigualdad de Schwarz, notando que $T^*T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ mientras que $TT^* : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_2$. Así, para $x_1 \in \mathcal{H}_1$:

$$\|Tx_1\|^2 = \langle Tx_1, Tx_1\rangle = \langle T^*Tx_1, x_1\rangle \leq \|T^*Tx_1\|\|x_1\| \leq \|T^*T\|\|x_1\|^2.$$

Tomando ahora el supremo de las normas sobre los elementos de la bola unitaria cerrada se deduce que $\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\|$ y por lo tanto

$$\|T\| \leq \|T^*\|$$

Usando la parte (c) y realizando las mismas consideraciones para el operador T^*, para un $x_2 \in \mathcal{H}_2$ se obtiene que

$$\|T^*\| \leq \|T\|,$$

lo que implica que

$$\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2.$$

(f) Se tiene de la demostración del inciso anterior.

(g) Inmediato, de (e).

(h) De la definición de operador adjunto de Hilbert:

$$\langle x, (ST)^*y\rangle = \langle (ST)x, y\rangle = \langle Tx, S^*y\rangle = \langle x, T^*S^*y\rangle;$$

o dicho de otro modo $\langle x, (ST - T^*S^*)y\rangle = 0$. Resta usar la primera parte del lema previo. $\square$

Para finalizar esta sección, se dan dos definiciones que serán necesarias más adelante.

Definición. Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ un operador lineal acotado entre ellos. Si $T = T^*$ se dirá que T es un operador lineal **autoadjunto**.

Para cuando el espacio bajo estudio es un espacio de Banach, no necesariamente de Hilbert, se tiene una definición de adjunto distinta. La motivación de la presente definición puede ser consultada en [1], sección 4.5 o bien en la sección 3.2 de [5].

Definición. Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado. Se define el operador **adjunto** de T, denotado por $T^{\times}$, como el operador $T^{\times} : Y^* \longrightarrow X^*$ definido por

$$f(x) = (T^{\times} g)x = (g \circ T)x = gTx,$$

donde X^*, Y^* son los correspondientes espacios duales asociados a X y a Y.

Observación 1.6. Las definiciones de adjunto dadas no coinciden al trabajar entre espacios de Hilbert, sin embargo sí están relacionadas: si $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert, entonces

$$T^* = A_1 T^{\times} A_2^{-1} : \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1,$$

donde $A_1 : \mathcal{H}_1^* \longrightarrow \mathcal{H}_1$ definido con ayuda del teorema 1.15: Para $f \in \mathcal{H}_1^*$ existe un h_1 tal que para $h \in \mathcal{H}_1$ $f(h) = \langle h, h_1 \rangle$, por lo tanto se define $A_1 f = h_1$. Una definición similar se tiene para el operador A_2. Tanto A_1 como A_2 son isometrías y biyecciones. El tratamiento completo al respecto se puede ver en [1], sección 4.5.

Observación 1.7. En el presente trabajo, por estar enfocados principalmente a operadores definidos en espacios de Banach se estará trabajando con adjuntos de Banach. Por ello se usará T^* para designarlos. Si se trabaja en un espacio de Hilbert, el adjunto al que se haga referencia será el de Hilbert.

Definición. Sean X un espacio normado y un subconjunto $\mathcal{S} \subset X$. Un funcional $f \in X^*$ es llamado un **anulador** de $\mathcal{S}$ si

$$f(x) = 0, \text{ para todo } x \in \mathcal{S}.$$

El conjunto de anuladores de $\mathcal{S} \subset X$ es denotado por $\mathcal{S}^o$. Análogamente, dado un subconjunto $\mathcal{T} \subset X^*$, $x \in X$ es un anulador de $\mathcal{T}$ si

$$f(x) = 0, \text{ para todo } f \in \mathcal{T}.$$

El conjunto de anuladores de $\mathcal{T}$ se denota por ${}^o\mathcal{T}$

Teorema 1.19. *Dados los subespacios $\mathcal{S} \subset X$ y $\mathcal{T} \subset X^*$ del espacio normado X y su dual X^*, respectivamente, se tienen las siguientes afirmaciones.*

(a) S^o y ${}^o\mathcal{T}$ son subespacios cerrados.

(b) *Si* $\mathcal{M} \subset X$ *es un subespacio cerrado, entonces* ${}^{o}(\mathcal{M}^{o}) = \mathcal{M}$.

(c) *Si* $\mathcal{S} \subset X$ *y* $\mathcal{M} = \text{span}(\mathcal{S})$ *es el subespacio cerrado generado por* $\mathcal{S}$, *entonces*

$$\mathcal{M}^{o} = \mathcal{S}^{o} \text{ y } \mathcal{M} = {}^{o}(\mathcal{S}^{o})$$

(d) *Dados los espacios de Banach* X, Y *y* $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, *entonces*

$$\mathcal{R}(T) = {}^{o}\mathcal{N}(T^{*})$$

si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ *es cerrado en* Y.

Demostración. Para (a) , (b) y (c) el lector puede consultar [5], sección 3.3. Se probará (d): de las definiciones, $\mathcal{R}(T)^{o} = \mathcal{N}(T^{*})$, pues $f \in \mathcal{R}(T)^{o}$ si y sólo si $f(Tx) = 0$ para todo $x \in X$, lo que es cierto si y sólo si $T^{*}f(x) = 0$ para todo x, es decir, si $T^{*}f = 0$. Por (c), se tiene que, por ser $\mathcal{R}(T)$ un subespacio,

$$\overline{\mathcal{R}(T)} = {}^{o}[\mathcal{R}(T)^{o}] = {}^{o}\mathcal{N}(T^{*}).$$

Se sigue la afirmación. □

1.7. Tres teoremas fundamentales en espacios de Banach

En un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es posible, gracias al teorema de representación de Riesz, extender un funcional lineal f definido en un subespacio cerrado $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ a todo el espacio $\mathcal{H}$, y además, tal extensión es única y preserva la norma. Para espacios de Banach en general, es posible realizar tal extensión con preservación de la norma del funcional lineal. Note que el resultado es por completo independiente de la propiedad topológica de completitud (o completez) del espacio.

Teorema 1.20 (Teorema de Hahn-Banach). *Sean* X *un espacio vectorial normado real o complejo y* $M \subset X$ *un subespacio vectorial de* X. *Considere* $f \in M^{*}$, *donde* M^{*} *es el espacio dual asociado a* M. *Si* f *es un funcional lineal acotado, entonces existe un funcional lineal acotado* $\hat{f} \in X^{*}$ *tal que*

$$\hat{f}\mid_{M} = f,$$

y $\|\hat{f}\| = \|f\|$.

El teorema de Hahn-Banach es un teorema que garantiza que un espacio normado tiene los suficientes funcionales lineales definidos en el espacio, permitiendo una teoría de espacios duales rica y una teoría satisfactoria de operadores adjuntos [1]. Para ver los detalles técnicos alrededor de este teorema (y los siguientes) se invita al lector a consultar [1] o [5] y, para una presentación en un contexto un poco más general, [2] o [3].

Teorema 1.21 (Principio de acotamiento uniforme). *Sean X un espacio de Banach y $\mathbf{F}$ una familia de operadores lineales acotados de X a algún espacio normado Y. Suponga que para cada $x \in X$, $\{\|Tx\| \mid T \in \mathbf{F}\}$ es acotado. Entonces $\{\|T\| \mid T \in \mathbf{F}\}$ es acotado.*

El teorema anterior da condiciones suficientes para que una familia de operadores acotados de un espacio de Banach a un espacio normado resulte acotada.

Teorema 1.22 (Teorema del mapeo abierto). *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal acotado sobreyectivo entre espacios de Banach X, Y. Entonces si M es un conjunto abierto en X, TM es un conjunto abierto en Y.*

En otras palabras, un operador lineal entre espacios de Banach mapea conjuntos abiertos a conjuntos abiertos. Cuando T es una biyección, la inversa T^{-1} es continua.

Definición. Sea T un mapeo entre espacios normados X, Y. La **gráfica** de T, denotada por $\Gamma(T)$, es definida como

$$\Gamma(T) = \{(x, y) \mid (x, y) \in X \times Y,\ y = Tx\}.$$

Dados dos espacios normados X y Y es posible construir un nuevo espacio vectorial normado $X \times Y$ definiendo las operaciones siguientes

$$(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1),$$

y para un escalar α

$$\alpha(x_0, y_0) = (\alpha x_0, \alpha y_0),$$

con $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$; y se equipa a este espacio vectorial $X \times Y$ con la norma dada por

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|,$$

donde las normas están definidas en sus correspondientes espacios X, Y. Se tiene así una manera ligeramente distinta de enunciar el teorema de la gráfica cerrada 1.5:

Teorema 1.23 (Teorema de la gráfica cerrada). *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal entre ellos. Entonces T es acotado si y sólo si la gráfica de T es cerrada.*

El teorema de la gráfica cerrada da condiciones bajo las cuales un operador lineal cerrado es acotado.

Como consecuencias del teorema 1.20 se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1.24. *Sean X un espacio normado y $x_0 \in X \setminus \{0\}$. Entonces existe un funcional lineal acotado $\hat{f}$ en X tal que*

$$\|\hat{f}\| = 1, \quad y \ \hat{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

Demostración. Dado $x_0 \in X \setminus \{0\}$, considere el subespacio $\mathcal{M} \subset X$ dado por

$$\mathcal{M} = \{x \mid x = \alpha x_0, \, \alpha \in \mathbb{K}\},$$

donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sea $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por

$$f(x) = \alpha\|x_0\|.$$

El funcional f es acotado, pues $|f(x)| = |\alpha|\|x_0\| = \|x\|$ y de aquí se concluye también que $\|f\| = 1$. Como una consecuencia del teorema 1.20, existe un funcional lineal acotado, $\hat{f}$, que extiende a f a todo el espacio X y tal que $\|\hat{f}\| = \|f\| = 1$ y, por la definición de f, $\hat{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|$. □

Teorema 1.25. *Sean X un espacio normado y $x \in X$. Entonces*

$$\|x\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Por lo anterior, si $x_0 \in X$ es tal que $f(x_0) = 0$, para todo $f \in X^*$, entonces $x_0 = 0$.

Demostración. Del teorema anterior, existe $\hat{f} \in X^*$ tal que

$$\|x\| = \frac{\|x\|}{1} = \frac{\hat{f}(x)}{\|\hat{f}\|},$$

de donde,

$$\|x\| = \frac{\hat{f}(x)}{\|\hat{f}\|} \leq \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{f(x)}{\|f\|};$$

por otro lado, como $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ entonces

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|,$$

y entonces $\|x\|$ es una cota superior para $\sup_{f\in X^*\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{\|f\|}$, i.e.

$$\sup_{f\in X^*\setminus\{0\}} \frac{f(x)}{\|f\|} \leq \|x\|,$$

teniéndose como consecuencia la igualdad deseada. Para concluir la prueba, si $x \in X$ es tal que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^* \setminus \{0\}$, por la igualdad obtenida, $\|x\| = 0$ lo que ocurre si y sólo si $x = 0$. □

Corolario 1.5. *Sean X un espacio normado y $g_x \in X^{**}$ definido por*

$$g_x(f) = f(x).$$

Entonces, g_x es un funcional acotado en X^* y

$$\|g_x\| = \|x\|.$$

Demostración. Por el teorema anterior

$$\|g_x\| = \sup_{f\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|g_x(f)|}{\|f\|} = \sup_{f\in X^*\setminus\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \|x\|.$$

□

1.8. Convergencia débil y fuerte

Definición (Convergencia fuerte). Una sucesión $\{x_n\}_n^\infty$ en un espacio normado X se dice **fuertemente convergente** o (**convergente en norma**) si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Para denotar que una sucesión es fuertemente convergente se escribirá

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ o bien } x_n \xrightarrow{s} x.$$

Definición (Convergencia débil). Una sucesión $\{x_n\}_n^\infty$ en un espacio normado X se dice **débilmente convergente** si existe $x \in X$ tal que para todo $f \in X^*$ se satisface que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Se denotará que una sucesión es débilmente convergente como $x_n \xrightarrow{w} x$.

Lema 1.2. *Sea* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *una sucesión débilmente convergente en un espacio normado* X*. Entonces*

a) El límite débil, x*, de* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *es único.*

b) Toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ *de* $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ *converge débilmente a el mismo límite,* x*.*

c) La sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ *es acotada.*

Demostración. Note que la convergencia débil involucra la convergencia de una sucesión de números $a_n = f(x_n)$, $f \in X^*$.

a) Suponga que $x_n \xrightarrow{w} x$ y que también $x_n \xrightarrow{w} y$. Entonces, para todo $f \in X^*$
$$f(x_n) \xrightarrow{s} f(x) \text{ y } f(x_n) \xrightarrow{s} f(y),$$
pero, al ser sucesiones numéricas, el límite es único y por lo tanto $f(x) = f(y)$, de donde
$$f(x) - f(y) = f(x - y) = 0;$$
por el teorema 1.25, $x = y$.

b) Basta notar que la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ es, por definición, convergente. Al ser sucesiones numéricas, cualquier subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$ convergente tendrá el mismo límite.

c) Considere el mapeo canónico $\mathfrak{J} : X \longrightarrow X^{**}$ y defina
$$g_{x_n}(f) = f(x_n).$$
Entonces, para todo n
$$|g_{x_n}(f)| = |f(x_n)| \leq M,$$

es decir, la sucesión $\{g_{x_n}(f)\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada para todo $f \in X^*$. Como el espacio dual es un espacio de Banach, el principio de acotamiento uniforme (teorema 1.21) asegura que la sucesión de normas $\{\|g_{x_n}\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Para concluir, por el corolario 1.5,

$$\|g_{x_n}\| = \|x_n\| \text{ para cada } n,$$

y así, la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. □

Teorema 1.26. *Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión definida en un espacio normado X definido sobre el campo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Entonces*

a) Una sucesión fuertemente convergente es débilmente convergente y los límites coinciden.

b) Si $\dim X < \infty$, entonces la convergencia débil implica convergencia fuerte.

Demostración. Para probar la afirmación a), si $x_n \to x$, entonces para todo $f \in X^* = \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ se tendría que, por la continuidad de los funcionales lineales f

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x),$$

que por definición significa que $x_n \xrightarrow{w} x$.

Para la afirmación b), suponga que $x_n \xrightarrow{w} x$ y que $\dim X = k$. Tómese una base, $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ sin pérdida de generalidad normalizada (esto es $\|e_j\| = 1$) de X; entonces

$$x_n = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^{(n)} e_j, \text{ con } \alpha_j^{(n)} \in \mathbb{K},$$

mientras que, por otra parte

$$x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j \text{ con } \alpha_j \in \mathbb{K}.$$

Por hipótesis $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ para todo $f \in X^*$, en particular, para los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_k$ de la base dual asociada a la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ de X. Los f_j definidos por

$$f_j(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

se tiene por lo tanto que

$$f_j(x_n) = \alpha_j^{(n)}, \text{ mientras que } f_j(x) = \alpha_j,$$

por lo tanto $f_j(x_n) \longrightarrow f_j(x)$ implica que $\alpha_j^{(n)} \longrightarrow \alpha_j$. De tales consideraciones se obtiene que

$$\|x_n - x\| = \|\sum_{j=1}^{k}(\alpha_j^{(n)} - \alpha)e_j\| \leq \sum_{j=1}^{k}|\alpha_j^{(n)} - \alpha|.$$

Así, dado un $\frac{\varepsilon}{k} > 0$, sea $n = \text{mín}\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, donde los n_j son tales que $|\alpha_j^n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{k}$; entonces

$$\|x_n - x\| \leq \sum_{j=1}^{k}|\alpha_j^{(n)} - \alpha| < \varepsilon$$

y por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente a x. □

1.8.1. Sucesiones de operadores y tipos de convergencia

Dada una sucesión de operadores $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(X,Y)$ se tienen tres tipos de convergencia que son de interés en las aplicaciones.

a) Convergencia en norma en $\mathcal{B}(X,Y)$

b) Convergencia fuerte de $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ en Y

c) Convergencia débil de $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ en Y

Definición. Sean X, Y espacios normados. Una sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ de operadores en $\mathcal{B}(X,Y)$ se dice

a) que **converge uniformemente** si $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $(\mathcal{B}(X,Y), \|\ \|)$, donde $\|\ \|$ es la norma operador. Dicho de otro modo, si existe $T : X \longrightarrow Y$ tal que
$$\|T_n - T\| \to 0$$

b) que **converge fuertemente** si, para todo $x \in X$, $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ converge fuertemente en Y, es decir, si existe $T : X \longrightarrow Y$ tal que
$$\|T_nx - Tx\| \to 0, \text{ para todo } x \in X.$$

c) que **converge débilmente** si , para todo $x \in X$, $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ converge débilmente en Y. En otras palabras, si ocurre que
$$|f(T_nx) - f(Tx)| \to 0, \text{ para todo } x \in X \text{ y para todo } f \in Y^*.$$

1.9. El lema de Riesz y compacidad de la bola unitaria cerrada

Teorema 1.27 (Lema de Riesz). *Sea M un subespacio propio de un espacio vectorial normado X, cerrado en X. Entonces, para cada θ tal que $0 < \theta < 1$ existe un $x_\theta \in X$ tal que*

$$\|x_\theta\| = 1 \text{ y } d(x_\theta, M) \geq \theta,$$

donde

$$d(x_\theta, M) = \inf_{y \in M} \|x_\theta - y\|.$$

Demostración. Por ser M un subespacio cerrado, existe $x_M \in M$ y $z \in X \setminus M$ tales que

$$d = d(z, M) > 0.$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ se debe cumplir que $\|x_M - z\| < d + \varepsilon$. En particular, se cumple para $\varepsilon = \frac{d(1-\theta)}{\theta}$, donde $0 < \theta < 1$ y en tal caso se tiene que

$$\|x_M - z\| < \frac{d}{\theta}.$$

Sea

$$x_\theta = \frac{x_M - z}{\|x_M - z\|}.$$

Es claro que $\|x_\theta\| = 1$ y para un $y \in M$ arbitrario

$$\|x_\theta - y\| = \frac{\|x_M - y(\|x_M - z\|) - z\|}{\|x_M - z\|} \geq \frac{d}{\|x_M - z\|} > \theta,$$

pues $x_M - y(\|x_M - z\|) \in M$. Así

$$\inf_{y \in M} \|x_\theta - y\| = d(x_\theta, M) \geq \theta.$$

□

Teorema 1.28. *Sea X un espacio vectorial normado. Si*

$$X_1 = \{x \mid \|x\| \leq 1\} \subset X$$

es compacto, entonces X es de dimensión finita.

Demostración. La prueba se hará por contradicción. Para tal efecto, asuma que $\dim X = \infty$ y que X_1 es compacto. Sea $x_1 \in X_1$ tal que $\|x_1\| = 1$. Tal elemento x_1 genera un subespacio $M_1 \subset X$ de dimensión 1 y por ende, completo y cerrado en X, así, por el lema de Riesz 1.27, existe un $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y además

$$\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

Sea $M_2 = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$, es decir, M_2 es el subespacio generado por los vectores x_1, x_2. Nuevamente, M_2 es de dimensión finita, por lo tanto cerrado, por lo que es posible aplicar nuevamente el lema de Riesz para obtener un elemento $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$ y $d(x_3, M_2) \geq \frac{1}{2}$ para el que en particular

$$\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2} \text{ y } \|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}.$$

En general, sea $M_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ el subespacio generado por los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde cada uno de los x_i ha sido elegido como en los casos de M_1 y M_2. Nótese que $M_n \subset X$, $\dim M_n < \infty$ por lo tanto es cerrado y es posible aplicar nuevamente el lema de Riesz. Así se tiene un elemento x_{n+1} tal que $\|x_{n+1}\| = 1$ y $\|x_{n+1} - x_j\| \geq \frac{1}{2}$ para cada $j = 1, \ldots, n$. Así pues, es posible escoger una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$, la cual es acotada, y tal que

$$\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}, \text{ si } m \neq n,$$

la cual no puede tener, por construcción, una subsucesión convergente, lo que es una contradicción a la suposición de ser X_1 compacto y por ende secuencialmente compacto. La contradicción se obtuvo por suponer que $\dim X = \infty$, de ahí que $\dim X < \infty$. □

1.10. Otra topología para espacios de Banach

1.10.1. Redes

Cuando se trata de extender algunos teoremas y nociones desarrollados en espacios métricos en términos de sucesiones a espacios topológicos más generales es necesario remplazar a las sucesiones por objetos topológicos más adecuados. Tales objetos son las redes.

Definición. Un **conjunto dirigido** es un conjunto parcialmente ordenado I con la propiedad que is $i, j \in I$, entonces existe un $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Ejemplo 1.4. Sea A un conjunto arbitrario y $\mathcal{P}(A)$ su conjunto potencia, con el orden parcial inducido por la inclusión. Entonces, el conjunto $\mathcal{P}(A)$ es dirigido.

Definición. Una **red** en un conjunto X es un par (f, I), donde I es un conjunto dirigido y f es una función $f : I \longrightarrow X$.

Observación 1.8. Se acostumbra escribir una red como $\{x_i : i \in I\}$ o $\{x_i\}$ si se sobreentiende cuál es el conjunto I.

Ejemplo 1.5. Dado un conjunto A y su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$, seleccione de cada subconjunto $S \subseteq A$ un elemento $x_S \in S$. Entonces $\{x_S : S \in \mathcal{P}(A)\}$ es una red en A.

Definición. Sea X un espacio topológico. Si $\{x_i\}$ es una red en X se dice que **la red converge** a $x \in X$, denotado por $x_i \to x$ o $\lim_i x_i = x$, si para todo conjunto abierto G tal que $x \in G$, existe un $i_0 \in I$ de tal forma que para todo $i \geq i_0$ $x_i \in G$. Se dice que x es un **punto límite** (o **punto de acumulación**) de la red $\{x_i\}$ si para todo abierto G que contiene a x y para todo $j \in I$ existe un elemento $i \geq j$ tal que $x_i \in G$.

Teorema 1.29. *Sea (X, τ) un espacio topológico con topología τ.*

a) Si $A \subset X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red $\{x_i\}$ en A, para cierto conjunto dirigido I, tal que $x_i \to x$.

b) Si el espacio topológico X es Hausdorff, entonces toda red en X que converge lo hace a un único punto.

c) Sean (Y, σ) un espacio topológico con topología σ y $x \in X$. Entonces, $f : X \to Y$ es continua en x si y sólo para toda red convergente $x_i \to x$ en X, $f(x_i) \to f(x)$.

Demostración. a) Suponga que $x \in \overline{A}$. Se construye un conjunto dirigido I al considerar la familia de vecindades de x. Defínase la siguiente relación de orden $\prec$ en I: dadas $U, V \in I$ vecindades de x, $V \prec U$ si y sólo si $U \subset V$. Es claro que $\prec$ es un orden parcial en I y como la intersección finita de abiertos es un abierto se cumple que $U \prec U \cap V$ y $V \prec U \cap V$ por tanto I es un conjunto dirigido. Sea $U \in I$. Entonces $A \cap U \neq \emptyset$ (si no fuera así, i.e $A \cap U = \emptyset$, se tendría un abierto $G \subset U$ tal que $A \subset X \setminus G$ que es cerrado y por tanto $x \notin \overline{A}$ ya que $\overline{A} \subseteq X \setminus G$); de ahí que para cada vecindad $U \in I$ existe un $x_U \in A$ y por lo tanto se tiene así una red $\{x_U\}$ en A. Tal red converge a x: sea V un abierto tal que $x \in V$. Por definición V es vecindad de x. Considere $U \in I$ tal que $V \prec U$; entonces $x_U \in U \subset V$, así pues $x_U \to x$.

Recíprocamente, suponga que se tiene un conjunto dirigido I y una red $\{x_i\}$ en A tal que $x_i \to x$ pero que $x \notin \overline{A}$. Entonces $x \in X \setminus \overline{A}$ y como $X \setminus \overline{A}$ es abierto existe un elemento $i_0 \in I$ tal que si $i \geq i_0$ entonces $x_i \in X \setminus \overline{A}$ pero esto lleva a una clara contradicción: $A \subseteq \overline{A}$ y por lo tanto $x_i \in A$ y $x_i \notin A$ para todo $i \geq i_0$. Así pues $x \in \overline{A}$.

b) Suponga, por el contrario, que una red convergente admite dos límites, esto es $x_i \to x$ y $x_i \to y$ con $x \neq y$. Por ser X Hausdorff, existen abiertos U, V tales que $x \in U$, $y \in V$ con $U \cap V = \emptyset$. Para U existe un $i_0 \in I$ tal que para todo $i \geq i_0$ $x_i \in U$. De forma análoga, para V existe un $i_1 \in I$ tal que $x_i \in V$ si $i \geq i_1$. Por ser I un conjunto dirigido, existe un $i_3 \in I$ tal que $i_0 \leq i_3$ y $i_1 \leq i_3$, por lo que $x_{i_3} \in U \cap V = \emptyset$, una contradicción que deriva de suponer que $x \neq y$, así pues $x = y$.

c) Suponga que f es continua en el punto x y que se tiene una red $x_i \to x$ (con el correspondiente conjunto dirigido I). Sea U una vecindad de $f(x)$ en Y. Entonces existe un abierto O tal que $f(x) \in O$ y por ser f continua $f^{-1}(O)$ es un abierto en X. Como $f^{-1}(O)$ es una vecindad de x, existe un $i_0 \in I$ tal que si $i \geq i_0$, $x_i \in f^{-1}(O)$, por lo que $f(x_i) \in O \subseteq U$. Por ser U arbitrario, $f(x_i) \to f(x)$. Recíprocamente, suponga que para toda red convergente $x_i \to x$ en X se tiene que $f(x_i) \to f(x)$. Sea $V \subset Y$ un cerrado y considere $x \in \overline{f^{-1}(V)}$. Por la parte a), existe una red $\{x_i\}$ en $f^{-1}(V)$ tal que $x_i \to x$. Como por hipótesis $f(x_i) \to f(x)$ y $V = \overline{V}$, entonces $f(x) \in V$, es decir $\overline{f^{-1}(V)} \subset f^{-1}(V)$ y entonces $f^{-1}(V) = \overline{f^{-1}(V)}$, por tanto es cerrado en X, de ahí que f es continua. $\square$

Observación 1.9. El recíproco de b) en el teorema anterior es cierto: en un espacio topológico X, si toda red convergente tiene límite único, entonces el espacio topológico es Hausdorff. La prueba puede ser consultada en [3], sección 2.6.

1.10.2. La topología débil y débil-*

La llamada topología débil asociada a un espacio de Banach X es una herramienta que permite estudiar las propiedades estructurales del espacio

X. El desarrollo que se presenta en esta sección sigue el dado en [3], para ser específicos, la sección 5.7.

Recuérdese que dada una familia de conjuntos no vacíos $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, donde Λ es un conjunto de índices, se define el producto X de los X_α como

$$X = \prod_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha = \{f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha \in \Lambda} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha, \ \forall \alpha \in \Lambda\}.$$

Si, en particular, se consideran espacios topológicos (X_α, τ_α), se asigna a X la topología producto (que es la topología generada por las proyecciones naturales $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$). La colección de todas las uniones de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\pi_\alpha^{-1}(O_\alpha)$, donde los O_α son abiertos en X_α, es lo que se conoce como la topología débil generada por las proyecciones π_α. En un contexto más general, se puede generar la topología débil mediante una familia de funciones $f_\alpha : X \to X_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$. Nótese que por definición, cada f_α será continua en esta topología (ver [17] sección 2.6 ó [16] sección IV.3).

Definición. Un **par dual** es un espacio vectorial, X, sobre un campo un campo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K}$ puede ser $\mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$), y un espacio vectorial, Y, de funcionales lineales definidos en X con la propiedad que para todo $x \neq 0$, en X, existe un $f \in Y$ tal que $f(x) \neq 0$.

Se hace la observación [3] que la definición nos pide que los elementos de Y separen puntos de X. Por otro lado, se presenta cierta simetría en el siguiente sentido: si $f \in Y$ es tal que $f \neq 0$, entonces existe un $x \in X$ tal que $f(x) \neq 0$. Tal dualidad se representará por medio de la notación $\langle f, x \rangle$ en lugar de $f(x)$, donde $f \in Y$ y $x \in X$. Otra exposición al respecto, en términos de formas bilineales, puede ser encontrada en [7], capítulo 3.

Definición. Dado un par dual, (X, Y), la topología $Y-$débil en X, denotada por $\sigma(X, Y)$, es la topología más débil en X tal que los mapeos $x \mapsto \langle f, x \rangle$ son continuos para todo $f \in Y$. Si X es un espacio de Banach, la topología $\sigma(X, X^*)$ en X será la **topología débil**, mientras que la topología $\sigma(X^*, X)$ en X^* será llamada la **topología débil-***.

Proposición 1.16. *Sea $\langle X, Y \rangle$ un par dual. Una red definida en X es convergente en la topología débil, $x_i \to x$, si y sólo si $\langle f, x - x_i \rangle \to 0$ para toda $f \in Y$.*

Demostración. Suponga que se tiene una red convergente $x_i \to x$ en la topología débil $\sigma(X,Y)$. Por ser cada $f \in Y$ un funcional lineal, dados $x_0, x_1 \in X$ arbitrarios, se tiene que

$$\langle f, x_0 + x_1\rangle = \langle f, x_0\rangle + \langle f, x_1\rangle.$$

Por otro lado, los mapeos $\varphi_f : X \to \mathbb{K}$ dados por $x \mapsto \langle f, x\rangle$ son continuos y por el teorema 1.29 c) se cumple que

$$\lim_i \varphi_f(x_i) = \varphi_f(x),$$

de donde

$$\lim_i \langle f, x_i\rangle = \langle f, x\rangle \Leftrightarrow \langle f, x - x_i\rangle \to 0.$$

Por ser $f \in Y$ arbitrario, se ha probado la necesidad.

Se probará ahora la otra dirección, esto es, la suficiencia. Suponga que se tiene una red $\{x_i\}$ en X tal que para todo $f \in Y$ se cumple que $\langle f, x - x_i\rangle \to 0$. Dado un f en Y, de las definiciones, dada una vecindad V arbitraria de $f(x)$, existe un abierto $U \subseteq V$ en Y tal que $f(x) \in U$ y un $i_0 \in I$ tal que si $i \geq i_0$, $f(x_i) \in U$. Como los mapeos φ_f son continuos, $\varphi_f^{-1}(U)$ es un abierto en X, por lo que, por definición, existen $\varphi_{f_j} : X \to X_{f_j}$ con $1 \leq j \leq k$ y U_j abiertos en X_{f_j} tales que

$$\varphi_f^{-1}(U) = \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_{f_j}^{-1}(U_j),$$

es decir, para $j = 1, \ldots, k$, $\varphi_{f_j}(x) \in U_j$. Por la continuidad de los mapeos φ_{f_j}, la red $\{\varphi_{f_j}(x_i)\}$ converge a $\varphi_{f_j}(x)$ (para $j = 1, \ldots, k$) y por lo tanto, existen índices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tales que

$$\text{para todo } i \geq i_j \ \varphi_{f_j}(x_i) \in U_j.$$

Sea $N = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Entonces, si $i \geq N$, para $j = 1, \ldots, k$, $\varphi_{f_j}(x_i) \in U_j$, de donde

$$x_i \in \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_{f_j}^{-1}(U_j) \subseteq \varphi_f^{-1}(U).$$

□

Observación 1.10. Dado un par dual (X, Y), una base de vecindades para la topología $Y-$débil se obtiene de la siguiente manera: para $f_1, \ldots, f_n \in Y$, $n = 1, 2, \ldots$ y un $\varepsilon > 0$, defina

$$W(f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \mid |\langle f_j, x\rangle| < \varepsilon, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Una base de vecindades típica es la que se construye alrededor del vector 0.

La topología débil, en este caso, es Hausdorff. Ello debido a la condición de separación de puntos en X por los elementos de Y, por lo tanto, los límites de redes en X son únicos.

Ejemplo 1.6. La topología débil en general es distinta de la topología fuerte (la original inducida por la norma). A manera de ejemplo, sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión infinita y $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Dado un $h \in \mathbb{N}$, por el teorema 1.13,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle h, e_k\rangle|^2 < \infty,$$

por lo que, en términos de la topología débil $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$,

$$\langle h, e_k\rangle \to 0 \Leftrightarrow e_k \to 0.$$

Sin embargo, es conveniente notar que $\|e_k\| = 1$ por lo que la sucesión $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ no converge en norma, lo que muestra que la topología inducida por la norma en $\mathcal{H}$ no tiene porqué coincidir con la topología débil.

Teorema 1.30. *La topología $\sigma(X, Y)$ es metrizable si y sólo si Y tiene dimensión algebraica numerable. En particular, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, las topologías $\sigma(X, X^*)$ y $\sigma(X^*, X)$ no son metrizables. Adicionalmente, si X^* (respectivamente, X) es separable, la topología $\sigma(X, X^*)$ (respectivamente $\sigma(X^*, X)$) restringida a la bola unitaria en X, (respectivamente, X^*) es metrizable.*

Demostración. Ver [3], sección 5.7 □

Teorema 1.31 (Banach - Alaoglu). *Sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$X_1^* = \{f \in X^* \mid \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología débil-, i.e. en la topología $\sigma(X^*, X)$.*

Demostración. Ver [3], sección 5.8. □

Teorema 1.32. *Sea X un espacio de Banach. Entonces,*

$$X_1 = \{f \in X \mid \|x\| \leq 1\}$$

es compacto en la topología débil, i.e, $\sigma(X, X^*)$, si y sólo si X es reflexivo.

Demostración. Ver [3], sección 5.8. □

Capítulo 2

Operadores Compactos

Una de las primeras preguntas a las que nos enfrentamos al trabajar en espacios de Banach de dimensión infinita es ¿Existen operadores lineales entre espacios de Banach que muestren un comportamiento similar al de los operadores lineales entre espacios normados de dimensión finita? la respuesta es afirmativa, tales operadores reciben el nombre de operadores compactos.

2.1. Propiedades de los operadores compactos

Definición. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. T es un **operador compacto** si para todo subconjunto $C \subset X$ acotado se cumple que la imagen de C bajo T es un conjunto precompacto, es decir, si $\overline{T(C)}$ es compacto.

A menudo es útil la siguiente caracterización

Proposición 2.1. *Sean X, Y espacios de Banach. $T : X \longrightarrow Y$ es compacto si y sólo si para toda sucesión acotada $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, $T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Suponga que T es compacto. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X acotada. Entonces $\overline{\{Tx_n\}}_{n\geq 1}$ es un conjunto compacto en la topología inducida por la métrica definida en Y, por lo que tal conjunto es secuencialmente compacto (toda sucesión en él tiene una subsucesión convergente). Para probar la necesidad, suponga ahora que para toda sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X acotada se cumple que $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente y sea $C \subset X$ un subconjunto acotado. Consideremos ahora a la imagen de C bajo T, $T(C)$ y sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $T(C)$. Por definición,cada $y_n = Tx_n$ para algún $x_n \in C$ y por lo tanto la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, pues C lo es, de donde $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} = \{y_{n_k}\}$ en $\overline{T(C)}$. Por ser la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ arbitraria, $\overline{T(C)}$ es secuencialmente compacto y por lo tanto compacto, es decir $T(C)$ es precompacto. □

Observación 2.1. Nótese que la definición de operador compacto bien puede hacerse para espacios normados arbitrarios, es decir, sin necesidad explícita de que los espacios vectoriales involucrados sean de tipo Banach, por lo que en algunos resultados los enunciados serán en términos de espacios vectoriales normados.

Una propiedad importante de los operadores compactos es la siguiente

Proposición 2.2. *Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal compacto, X, Y espacios de Banach, entonces T es acotado.*

Demostración. Suponga, por el contrario, que T es no acotado y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X. Entonces $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ en Y es una sucesión no acotada y por lo tanto no puede tener una subsucesión convergente, pues tal subsucesión sería de Cauchy. Se tiene así una sucesión acotada en X cuya imagen bajo T no tiene una subsucesión convergente, lo que contradice la hipótesis de ser T compacto. □

Si X, Y son espacios de Banach de dimensión infinita, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.3. *Sean X, Y espacios vectoriales normados arbitrarios y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal. Si T es acotado y $\dim T[X] < \infty$, entonces T es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X, con cota d. Por ser T acotado, por definición, existe una constante c que nos permite afirmar que la sucesión $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada:

$$\|Tx_n\| \leq c\|x_n\| \leq m = cd$$

Para simplificar la notación, sea $M = \{Tx_n : x_n \in X\}$. Observe ahora que la cerradura del codominio de la sucesión, $\overline{M}$, es un conjunto cerrado y acotado. En particular $\overline{M}$ es acotado pues, por ser M acotado, existe una bola cerrada B_{r_M} de radio r_M tal que $M \subseteq B_{r_M}$. Como, por definición $\overline{M}$ es el menor cerrado que contiene a M, se tiene que $\overline{M} \subseteq B_{r_M}$. Ahora bien, por ser Y de dimensión finita, se cumple que $\overline{M}$ es compacto, es decir, M es precompacto. Como la sucesión en X fue arbitraria, se deduce que T es compacto. □

Como corolario a la proposición anterior, se tiene que, para espacios normados de dimensión finita:

Corolario 2.1. *Sean X, Y espacios vectoriales normados de dimensión finita. Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal acotado, entonces es compacto.*

Demostración. Como $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$ es un subespacio vectorial y además $\dim Y < \infty$, entonces $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$. El resultado se sigue por el teorema anterior.□

Ejemplo 2.1. Las proposición anterior nos da una de las familias de mayor interés en el análisis funcional como una familia de operadores compactos. Los elementos de los que consta el espacio dual son operadores compactos, pues tienen rango finito.

Ejemplo 2.2. Cuando los espacios vectoriales normados en cuestión son de dimensión finita, la propiedad de ser un operador compacto es equivalente a ser acotado, sin embargo, en dimensión infinita el recíproco de la proposición anterior no es verdadero. Un operador puede ser acotado, por ende continuo, pero no compacto. Un ejemplo es el operador identidad I en un espacio normado de dimensión infinita: sea $X_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unitaria cerrada del espacio X. El conjunto X_1 es cerrado (por lo que coincide con su cerradura) y acotado pero no compacto (ver el teorema 1.28 ó [5], capítulo 4). Otro ejemplo de operador continuo pero no compacto nos lo proporciona el operador definido en ℓ^2 "corrimiento a la derecha"dado por

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

Si consideramos a la sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ donde cada $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \ldots, \delta_{ij}, \ldots)$ son elementos de la base estándar de ℓ^2 (por ello la delta de Kronecker δ_{ij}) vemos que $\{Se_n\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene una subsucesión convergente.

Otra propiedad de interés que tienen los operadores compactos es que al realizar composición con un operador acotado, el operador resultante es compacto.

Proposición 2.4. *Sean X un espacio normado, $S : X \longrightarrow X$ un operador lineal acotado y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto. Entonces $ST = S \circ T$ y $TS = T \circ S$ son operadores lineales compactos.*

Demostración. Se mostrará que TS es compacto. Sea M un subconjunto acotado en X. Por ser S acotado SM es un conjunto acotado: para todo

$x \in M$, $\|Sx\| \leq C_0\|x\| \leq C_0\delta(M)$, donde $\delta(M)$ es el diámetro de M; por ser T compacto $T(SM) = TS(M)$ es precompacto.

Finalmente, la compacidad del operador ST se tiene de la continuidad de S: Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión acotada, Tx_n es una sucesión que tiene una subsucesión convergente y $S(Tx_n) = ST(x_n)$ tendrá entonces una subsucesión convergente, por ser S continuo. □

Observación 2.2. Note que el teorema 1.4 en conjunto con el resultado anterior nos dice que un operador compacto no puede tener asociado un operador inverso acotado. Si T es un operador lineal compacto inyectivo, puede tener asociado un operador inverso definido en el rango, $\mathcal{R}(T)$, de T.

Se verá a continuación como los operadores compactos manejan la convergencia débil y convergencia en norma.

Teorema 2.1. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto. Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X es débilmente convergente, entonces $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ es fuertemente convergente, más aún, $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.*

Demostración. Sea $y_n = Tx_n$ y $y = Tx$. Se mostrará que hay convergencia débil

$$y_n \xrightarrow{w} y$$

y acto seguido se mostrará que

$$y_n \xrightarrow{s} y.$$

Sea g un funcional lineal acotado en Y, es decir, $g \in Y^*$. Se define el siguiente funcional f en X por

$$f(z) = g(Tz), \quad \text{con } z \in X.$$

Por definición f es lineal y es acotado por la compacidad de T:

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\|\|Tz\| \leq \|g\|\|T\|\|z\|.$$

Dada una sucesión débilmente convergente $x_n \xrightarrow{w} x$ en X, se tiene por definición que $f(x_n) \xrightarrow{s} f(x)$ y, en particular, $g(Tx_n) \longrightarrow g(Tx)$, dada la definición de f; pero entonces $g(y_n) \longrightarrow g(y)$.Como g fue arbitraria, se tiene, por definición, que $y_n \xrightarrow{w} y$. Para probar que $y_n \longrightarrow y$, supóngase que no ocurre la convergencia fuerte. Entonces $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$\|y_{n_k} - y\| \geq \eta, \text{ para algún } \eta > 0.$$

Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es débilmente convergente, entonces es una sucesión acotada en X y por lo tanto la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada. Por la compacidad del operador T, la sucesión Tx_{n_k} tiene una subsucesión convergente, digamos $\{\bar{y_j}\}_{j=1}^{\infty}$. Sea $\bar{y} \in Y$ tal que $\bar{y_j} \longrightarrow \bar{y}$. Como la convergencia fuerte implica convergencia débil, $\bar{y_j} \xrightarrow{w} \bar{y}$, pero por ser subsucesión de una sucesión débilmente convergente se debe tener que $\bar{y} = y$ y así

$$\|\bar{y_j} - y\| \longrightarrow 0 \text{ pero } \|\bar{y_j} - y\| \geq \eta > 0$$

lo que es una contradicción. Así $y_n \longrightarrow y$, como se quería probar. $\square$

Con respecto al adjunto $T^{\times}$ (de Banach) de un operador lineal compacto T se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Sean X, Y espacios normados con los espacios duales asociados X^* y Y^* respectivamente, $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto y $T^{\times} : Y^* \longrightarrow X^*$ su operador adjunto (de Banach). Entonces $T^{\times}$ es compacto.*

Demostración. Considere un subconjunto $B \subset Y^*$ acotado, es decir, existe algún C tal que para todo $g \in B$, $\|g\| \leq C$. Se mostrará que $T^{\times}[B]$ es totalmente acotado y por el teorema A.5 se tendrá que tal imagen es un conjunto precompacto en X^*, ya que éste último es un espacio de Banach.

Como T es un operador lineal compacto, la imagen de la bola unitaria, $T[X_1]$ es precompacta en Y. Por el teorema A.5 $T[X_1]$ es un conjunto totalmente acotado y por lo tanto tiene una ε_1-red $\mathcal{M}_{\varepsilon_1} \subset T[X_1]$, lo que significa que X_1 tiene puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tales que, para un $x \in X_1$ arbitrario, se cumple que

$$\|Tx - Tx_j\| < \varepsilon_1 \text{ para algún } j.$$

Defínase un operador lineal $S : Y^* \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dado por.

$$Sg = (g(Tx_1), g(Tx_2), \ldots, g(Tx_n)).$$

Así definido, S es un operador lineal acotado. Nótese que S es compacto, pues es un operador acotado, ya que cada una de las entradas que lo define es acotada, y más aún, es de rango finito, por construcción, y por lo tanto $S[B]$ es precompacto, de donde $\overline{S[B]}$ es totalmente acotado. Así, existen funcionales $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tales que para todo $g \in B$ se cumple

$$\|Sg - Sg_j\| < \varepsilon \text{ para algún } j, \text{ en la norma de } \mathbb{R}^n$$

lo que implica que $|g(Tx_i) - g_j(Tx_i)| < \varepsilon$, para cada i: considerando al espacio $(\mathbb{R}^n, \| \|_e)$, donde $\| \|_e$ es la norma euclidiana. Para usar las desigualdades anteriores, sea $g \in B$. Entonces, existe un j tal que

$$|g(Tx_i) - g_j(Tx_i)| < \varepsilon, \text{ para todo i .}$$

Dado un $x \in X_1$ existe un i tal que $\|Tx - Tx_i\| < \varepsilon$ ya que $T[X_1]$ es totalmente acotado. Así

$$\begin{aligned}
|g(tx) - g_j(Tx) &= |g(Tx) - g(Tx_i) + g(Tx_i) - g_j(Tx_i) + g_j(Tx_i) - g_j(Tx)| \\
&\leq |g(Tx) - g(Tx_i)| + |g(Tx_i) - g_j(Tx_i)| + |g_j(Tx_i) - g_j(Tx)| \\
&\leq \|g\|\|Tx - Tx_i\| + \varepsilon + \|g_j\|\|Tx_i - Tx\| \\
&\leq 2C\varepsilon + \varepsilon, \text{ para todo } x \in X_1.
\end{aligned}$$

Como por definición $g(Tx) = (T^\times g)x$ se tiene entonces que

$$\|T^\times g - T^\times g_j\| = \sup_{\|x\|=1} |(T^\times(g - g_j))x| = \sup_{\|x\|=1} |g(Tx) - g_j(Tx)| < (2C+1)\varepsilon,$$

es decir, el conjunto $\{T^\times g_1, T^\times g_2, \ldots, T^\times g_k\}$ es una ε-red para $T^\times[B]$. Como ε es arbitrario, $T^\times[B]$ es totalmente acotado y, por el teorema A.5, precompacto. Por lo tanto $T^\times$ es un operador lineal compacto. □

2.1.1. El rango de un operador compacto

Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto entre espacios de Banach X, Y. Por ser éste acotado, $\mathcal{D}(T) = X$. ¿Cuándo $\mathcal{R}(T)$ es cerrado? al respecto se tienen dos proposiciones que indican como hallar la respuesta, el tratamiento detallado de las ideas que se exponen a continuación se encuentra en la referencia [5], capítulo 3, sección 5, proposiciones 3.12 y 3.14. Cuando $\dim X = \infty$ el operador T no tiene porqué ser inyectivo, por lo que, en tal caso, el espacio nulo de T satisface que $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$. Por otra parte, también es conocido que si T es un operador cerrado, entonces $\mathcal{N}(T)$ es un subespacio cerrado. Supóngase pues que T es un operador lineal compacto, por el teorema 1.5, T es cerrado. Sea

$$\hat{X} = X/\mathcal{N}(T)$$

el espacio cociente definido por la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathcal{N}(T)$. El espacio resultante $\hat{X}$, cuyos elementos son las clases de equivalencia $[x]$ puede ser dotado de la norma

$$\|[x]\| = d(x, \mathcal{N}(T)) = \inf_{z \in \mathcal{N}(T)} \|x - z\|,$$

y por tanto hay una métrica d inducida por tal norma. El espacio $(\hat{X}, d)$ es de tipo Banach (el lector puede consultar [5], capítulo 3 o bien [2] capítulo 3 para ver la prueba de tal afirmación). Defínase ahora $\hat{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$ por $\hat{T}[x] = Tx$.

Proposición 2.5. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto e inyectivo entre espacios de Banach X, Y. Entonces $\mathcal{R}(T)$ es cerrado si y sólo $\mathcal{R}(T)$ es finito dimensional.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. Al ser $\mathcal{R}(T) \subset Y$ cerrado y Y un espacio de Banach, entonces es completo. Como T es inyectivo y acotado, existe $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow X$ y tal que $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{R}(T), X)$. Así, la identidad en $\mathcal{R}(T)$, dada por

$$I_{\mathcal{R}(T)} = T \circ T^{-1} : \mathcal{R}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T) \subseteq Y$$

resulta ser un operador compacto y por lo tanto, la bola cerrada unitaria, $\mathcal{R}(T)_1 = \{y \in \mathcal{R}(T) | \|y\| \leq 1\}$, es compacta, lo que ocurre si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es finito dimensional, por el teorema 1.28. □

El resultado anterior aplica a la siguiente proposición.

Proposición 2.6. *El operador lineal $\hat{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$ es inyectivo y compacto.*

Demostración. La inyectividad de $\hat{T}$ se sigue del hecho que $\hat{T}[x] = 0$ si y y sólo si $[x] \in \mathcal{N}(T)$. Sea $\{[x]_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\hat{X}$. Entonces, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{N}(T)$ tal que $\{x_n + z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en X y, por ser T compacto, $\{T(x_n + z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y por lo que $\{T[x]_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, es decir, $\hat{T}$ es compacto, por lo tanto acotado y así $\hat{T}$ es cerrado. □

Corolario 2.2. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto entre espacios de Banach. Entonces, $\mathcal{R}(T)$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{R}(T)$ es finito dimensional.*

Demostración. Defina $\hat{T} : \hat{X} \longrightarrow Y$ por $\hat{T}[x] = Tx$, donde $\hat{X} = X/\mathcal{N}(T)$. Por la proposición anterior, $\hat{T}$ es inyectivo y compacto, por la proposición 2.5, $\mathcal{R}(\hat{T})$ es cerrado si y sólo si es de dimensión finita. El corolario se sigue del hecho que $\mathcal{R}(\hat{T}) = \mathcal{R}(T)$. □

Teorema 2.3. *Sean X, Y espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal compacto. Entonces el rango de T, $\mathcal{R}(T)$, es un espacio separable.*

Demostración. Considere las bolas $B_n = B(0; n) \subset X$. Dado que T es compacto, las imágenes bajo T de B_n, $C_n = T(B_n)$, son conjuntos relativamente compactos. Por el teorema A.5, los C_n son separables. Sea $x \in X$ tal que $\|x\| < n$. Entonces, para n suficientemente grande, $x \in B_n$, por lo que

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$,
2. $T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Como cada C_n es separable, existe, para cada n un subconjunto $D_n \subseteq C_n$ denso numerable. Sea

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n.$$

Entonces, $D \subset T(X)$ es numerable y denso. $\square$

2.2. La familia de operadores compactos entre espacios Banach

La introducción de álgebras de Banach para estudiar teoría espectral de operadores lineales es con la idea de estudiar el espectro sustituyendo las propiedades algebraicas que se obtienen de la teoría del determinante de un operador (de su matriz asociada) en el caso de espacios normados de dimensión finita con las propiedades algebraicas obtenidas a partir del estudio de la estructura algebraica de un álgebra.

2.2.1. Álgebras, *-álgebras y C^*-álgebras

La definición de álgebra de Banach apareció por vez primera en un artículo de Nagumo[1] en el año 1936. Las definiciones y resultados de este sección siguen principalmente la línea de desarrollo dada en [4], secciones 2.2 y 6.1.

Definición. Un **álgebra** $\mathcal{A}$ sobre un campo $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial tal que para $x, y \in \mathcal{A}$ un producto es definido $xy \in \mathcal{A}$, de tal forma que satisface, para $x, y, z \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz) \\ x(y+z) &= xy + xz \\ (x+y)z &= xz + yz \\ \lambda(xy) &= (\lambda x)y \\ &= x(\lambda y). \end{aligned}$$

[1] *Einige analytische Untersuchungen in linearen, metrischen Ringen*

Si el campo es $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ se dirá que el álgebra es compleja o real, respectivamente. Si ocurre que $xy = yx$ para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$ se dirá que el álgebra es **conmutativa**. Si existe un $e \in \mathcal{A}$ que satisface que para cualquier $x \in \mathcal{A}$

$$ex = xe = x$$

se dirá que el álgebra es con elemento unidad o que es un **álgebra unital**.

Observación 2.3. Note que en la definición no se pide la conmutatividad para el producto, ni tampoco la existencia de un elemento que juegue el papel de un neutro multiplicativo.

A un espacio de Banach se le puede dotar de estructura algebraica adicional compatible con la estructura analítica y por ende con la topológica, al tener el espacio de Banach una topología métrica.

Definición. Un **álgebra de Banach** es un álgebra compleja $\mathcal{A}$ en la que $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach $(\mathcal{A}, \| \, \|)$ que adicionalmente satisface

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|,$$

para cualesquiera $x, y \in \mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach unital, entonces $\|e\| = 1$.

Observación 2.4. Cualquier espacio de Banach X puede ser convertido en un álgebra de Banach (trivial) definiendo $x \cdot y = 0$ para todos los $x, y \in X$. Sin embargo, convertirlo en un álgebra de Banach no trivial parece ser una tarea no sencilla. El producto debe satisfacer la asociatividad y la cerradura.

Definición. Dada un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ y un subespacio vectorial $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ se dirá que $\mathcal{U}$ es una **subálgebra** de $\mathcal{A}$ si en $\mathcal{U}$ la restricción de la operación producto definida en $\mathcal{A}$ satisface la propiedad de cerradura. Si como subespacio $\mathcal{U}$ es cerrado, se dirá entonces que $\mathcal{U}$ es una **subálgebra de Banach**.

Observación 2.5. Si el álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es unital, no tiene porqué cumplirse que la subálgebra $\mathcal{U}$ sea unital.

Definición. Un subconjunto $\mathfrak{J}$ de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ se denominará como un **ideal izquierdo** (correspondientemente **ideal derecho**) si

a) $\mathfrak{J}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{A}$, y

b) Para $x \in \mathcal{A}$, se tiene que $x\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}$ (correspondientemente $\mathfrak{J}x \subseteq \mathfrak{J}$).

Si $\mathfrak{J} \neq \mathcal{A}$ se dirá que el ideal es **propio**. Un ideal $\mathfrak{J}$ será un **ideal máximo** si es propio y no está contenido en algún otro ideal propio distinto de él. Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa, se dirá simplemente que $\mathfrak{J}$ es un **ideal** (o **ideal bilateral**).

Con respecto a las álgebras se tienen unas definiciones más, las cuales se dan a continuación.

Definición. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ álgebras complejas.

- Una transformación lineal $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ que preserva productos es un **homomorfismo de álgebras** (de $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$).
- Si el homomorfismo de álgebras es un isomorfismo de espacios vectoriales, se dirá que es un **isomorfismo de álgebras**.
- Un elemento x en un álgebra unital $\mathcal{A}$ se dice que es **invertible** si existe $x^{-1} \in \mathcal{A}$ tal que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$.
- El **espectro** de un elemento $x \in \mathcal{A}$, denotado por $\sigma(x)$, en un álgebra de Banach unital es el complemento del conjunto del conjunto

$$\rho(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ es invertible en } \mathcal{A}\}.$$

- Una **involución** $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ en un álgebra es un mapeo definido por $x \mapsto x^*$ y tal que
  - $(x^*)^* = x$
  - $(xy)^* = y^*x^*$
  - Para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathcal{A}$, $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$.
- Una $*-$**álgebra** (o también llamada **álgebra involutiva**) es un álgebra equipada con una involución.
- Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $*-$álgebras, entonces un $*-$homomorfismo de álgebras entre ellas es un homomorfismo de álgebras que preserva la involución, esto es, $\Phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es $*-$homomorfismo si $\Phi(x^*) = (\Phi(x))^*$ para todo $x \in \mathcal{A}$ (las involuciones son, en general, distintas).
- Un elemento en un $*-$álgebra recibe el nombre de **hermitiano** si $x^* = x$.

- Un lemento de un $*-$álgebra recibe el nombre de **normal** si $x^*x = xx^*$.
- En un álgebra unital $\mathcal{A}$, $x \in \mathcal{A}$ recibe el nombre de **unitario** si $x^*x = xx^* = e$.
- Una C^*-álgebra es una $*-$álgebra de Banach $\mathcal{A}$ tal que $\|x^*x\| = \|x\|^2$, para todo $x \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2.3. Considere el espacio $\mathcal{A} = (\mathcal{B}(X), \| \|)$, donde $\| \|$ es la norma operador. En $\mathcal{A}$, la multiplicación está definida como la composición de operadores. Por el corolario 1.1, la norma satisface, para $T_1, T_2 \in \mathcal{A}$

$$\|T_1T_2\| \leq \|T_1\|\|T_2\|,$$

así pues, $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach. Note que $\mathcal{A}$ es unital pero no conmutativa. Sea

$$\mathcal{U} = \{T \in \mathcal{B}(X) \mid T \text{ es compacto } \},$$

entonces $\mathcal{U}$ es una subálgebra de Banach de $\mathcal{A}$. Finalmente, si X es un espacio de Hilbert, el teorema 1.18 nos dice que $\mathcal{U}$ es una C^*-álgebra (no unital), tomando como involución a $T \mapsto T^*$.

Teorema 2.4. *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach unital. Entonces $\mathcal{A}$ es isométricamente isomorfa a una subálgebra de operadores de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.*

Demostración. Sea $\Psi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A})$ definido por $x \mapsto L_x$ donde L_x es tal que, para $y \in \mathcal{A}$, $L_xy = xy$ (el operador multiplicación por la izquierda, el cual es lineal por ser por ser $\mathcal{A}$ un álgebra). De la definición, Ψ es un operador lineal: dado un escalar λ y $x, y \in \mathcal{A}$

$$\Psi(\lambda x + y) = L_{\lambda x+y} = \lambda L_x + L_y = \lambda\Psi x + \Psi y.$$

A continuación, se mostrará que Ψ preserva normas. Por la submultiplicatividad de la norma, corolario 1.1,

$$\|L_x\| = \sup_{\|y\|=1} \|xy\| \leq \|x\|,$$

mientras que, por ser $L_x \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$

$$\|x\| \leq \|L_xe\| \leq \|L_x\|,$$

así pues $\|x\| = \|L_x\|$ y Ψ preserva la norma, es decir, es una isometría. Finalmente, se probará que Ψ es un homomorfismo de álgebras, esto es, que preserva productos: sean $x, y \in \mathcal{A}$, entonces

$$\Psi xy = L_{xy} = L_xL_y = \Psi x\Psi y,$$

pues, por ser $\mathcal{A}$ un álgebra, el producto es asociativo, esto es, dado $z \in \mathcal{A}$

$$L_{xy}z = (xy)z = x(yz) = L_x L_y z.$$

Note que el homomorfismo de álgebras Ψ es inyectivo, por lo que se ha probado el teorema. $\square$

Se muestra a continuación un estudio de los operadores compactos desde el punto de vista de ciertas subfamilias de $\mathcal{B}(X, Y)$, donde X, Y son espacios de Banach arbitrarios. Para mayor detalle uno puede consultar la referencia [4].

Definición. Sean X, Y espacios de Banach. Se define

- el **conjunto de operadores de rango finito** de X a Y, $\mathrm{FR}(X, Y)$, como

$$\mathrm{FR}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \in \mathcal{B}(X, Y), \dim \mathcal{R}(T) < \infty\};$$

- el **conjunto de los operadores aproximables** de X a Y, designado por $\mathrm{FA}(X, Y)$, como

$$\mathrm{FA}(X, Y) := \overline{\mathrm{FR}(X, Y)}$$

  en $(\mathcal{B}(X, Y), d)$, donde d es la métrica inducida por la norma operador (ver sección **??**);

- **la familia de operadores compactos** de X a Y, denotado $\mathrm{Com}(X, Y)$, como

$$\mathrm{Com}(X) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \in \mathcal{B}(X, Y) \text{ y } \overline{T(X_1)} \text{ es compacto en } (Y, \| \, \|)\},$$

  donde $X_1 = \{x \in X \mid \|x\| \leq 1\}$;

- **la familia de operadores completamente continuos** de X a Y, designado por $\mathrm{CC}(X, Y)$, como

$$\mathrm{CC}(X, Y) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \in \mathcal{B}(X, Y) \text{ y } \forall (x_n \xrightarrow{w} x),\, Tx_n \xrightarrow{s} Tx\}$$

Observación 2.6. Las dos definiciones de operadores compactos dadas son equivalentes: es claro que si un operador es compacto, según la primera definición, entonces pertenece a $\mathrm{Com}(X)$. Por otra parte, sea $T : X \longrightarrow Y$, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, tal que $\overline{T(X_1)}$ es compacto en Y y considere una sucesión

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, acotada, que sin pérdida de generalidad se tomará definida en $X \setminus X_1$. Sea $M = \{x_n | x_n \in \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}$,

$$\delta_0 := \sup_{x_k \in M} d(0, x_k) = d(\{0\}, M).$$

De la definición de métrica $\delta_0 < \infty$, hecho deducible también de que

$$\delta_0 \leq 1 + d(X_1, M) + \delta(M), \text{ donde } d(X_1, M) := \inf_{x \in X_1, y \in M} d(x, y).$$

Defínase $\rho : M \longrightarrow X$ dada por $\rho(x_k) = \frac{1}{\delta} x_k$, donde

$$\delta = \max\{\delta(M), \delta_0\}$$

Por construcción, ρ es una contracción de M:

$$d(\rho(x_k), \rho(x_m)) = \frac{1}{\delta} d(x_k, x_m), \text{ pues } \frac{1}{\delta} < 1$$

y, además

$$\|\rho x_k\| = \frac{1}{\delta} \|x_k\| \leq \frac{1}{\delta} \cdot \delta(M) \leq 1, \text{ es decir, } \rho x_k \in X_1.$$

La sucesión $\{\rho x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, de ahí que $\{T \rho x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y, al ser $\overline{T(X_1)}$ secuencialmente compacto. Se tiene entonces que

$$\{T\left(\frac{1}{\delta} x_n\right)\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{\delta} T x_n\}_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{\delta} \{T x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

tiene una subsucesión convergente, lo que ocurre si y sólo si $\{T x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente. Por lo tanto T es un operador compacto, en el sentido de la primera definición de operadores compactos dada al inicio del capítulo.

El teorema 2.1 nos dice que un operador compacto es completamente continuo, sin embargo, un operador completamente continuo no es necesariamente compacto. El ejemplo de tal afirmación lo proporciona la llamada **propiedad de Schur** para espacios normados[2], quien estudió el espacio ℓ^1 demostrando que en este espacio de Banach las propiedades de una sucesión de ser fuertemente convergente y débilmente convergente son equivalentes (el lector interesado puede consultar el capítulo VII de la referencia [13]). Tal equivalencia dice en particular que el operador identidad $I : \ell^1 \longrightarrow \ell^1$ manda convergencia débil en convergencia fuerte, mas recordemos que tal operador no es compacto.

[2]Llamada así por Issai Schur, quien la estudió en "Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen ", Journal für die reine und angewandte Mathematik, 151 (1921) pp. 79-111

2.2.2. Algunos subconjuntos de $\mathcal{B}(X,Y)$

Lema 2.1. *Sean $(X, \| \|)$ un espacio vectorial normado sobre los complejos, $\mathcal{M} \subset X$ un subespacio no trivial de X. Entonces, $\overline{\mathcal{M}}$ es un subespacio de X.*

Demostración. Como, por hipótesis, $0 \in \mathcal{M}$, entonces $0 \in \overline{\mathcal{M}}$. Por otra parte, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dados $x_0, x_1 \in \overline{\mathcal{M}}$, se demostrará que

$$\alpha x_0 + \beta x_1 \in \overline{\mathcal{M}}.$$

Por definición, existen sucesiones $\{x_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $x_n^0 \longrightarrow x_0$ y $x_n^1 \longrightarrow x_1$. Así, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \leq n_0$

$$\|x_n^0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$$

y, de forma análoga, si $n \leq n_1$

$$\|x_n^1 - x_1\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Se afirma que $(\alpha x_n^0 + x_n^1) \longrightarrow \alpha x_0 + x_1$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(\alpha x_n^0 + x_n^1) - (\alpha x_0 + x_1)\| &= \|\alpha(x_n^0 - x_0) + (x_1^1) - x_1)\| \\
&\leq \|\alpha(x_n^0 - x_0)\| + \|x_1^1) - x_1\| \\
&\leq |\alpha|\|x_n^0 - x_0\| + \|x_1^1) - x_1\| \\
&< |\alpha|\frac{\varepsilon}{2|\alpha|} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Así pues $\alpha x_0 + x_1 \in \overline{\mathcal{M}}$. □

Proposición 2.7. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces*

a) $\mathrm{FR}(X,Y)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

b) $\mathrm{FA}(X,Y)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

c) $\mathrm{Com}(X,Y)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

d) $\mathrm{CC}(X,Y)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{B}(X,Y)$.

Demostración. Antes de iniciar, se hace la observación que en general, para un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$ se cumple que $\mathcal{R}(\alpha T) \subseteq \mathcal{R}(T)$.

a) El operador cero, $0 : X \longrightarrow Y$ es de rango finito. Sean $T, S \in \mathrm{FR}(X, Y)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Nótese que $\mathcal{R}(\alpha T+S) \subseteq \mathcal{R}(T)+\mathcal{R}(S)$ y por tanto $\dim \mathcal{R}(\alpha T+S) < \infty$; donde, como es usual

$$\mathcal{R}(T) + \mathcal{R}(S) = \{w + y \in Y \mid w \in \mathcal{R}(T),\ y \in \mathcal{R}(S)\}.$$

b) Por definición,

$$\mathrm{FA}(X, Y) = \overline{\mathrm{FR}(X, Y)},$$

por lo que es claro que el operador cero es elemento de $\mathrm{FA}(X, Y)$. Aplíquese ahora el lema 2.1.

c) Sean $S, T \in \mathrm{Com}(X, Y)$. Por el teorema 2.1, basta considerar una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada en X, es decir $\|x_n\| \leq C$ para todo n. Por ser T un operador compacto, se tiene que la sucesión $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente en Y, digamos $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, con límite y_0; la cual es imagen de la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X. Por ser la sucesión original acotada, la subsucesión anterior es ella misma acotada, así pues, la sucesión $\{Sx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, la que por fines prácticos, se etiqueta como $\{Sx_{n_k}^l\}_{l=1}^{\infty}$, con límite $y_1 \in Y$. Así pues, para un escalar no cero $\alpha \in \mathbb{C}$, la sucesión

$$\{(\alpha T + S)x_{n_k}^l\}_{l=1}^{\infty} \longrightarrow \alpha y_0 + y_1 \in Y,$$

es decir, se ha encontrado una subsucesión convergente en Y para la imagen de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bajo el operador $\alpha T + S$ y por lo tanto $\alpha T + S \in \mathrm{Com}(X, Y)$.

d) El operador cero es completamente continuo, por el teorema 2.1. Sean ahora $S, T \in \mathrm{CC}(X, Y)$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Se mostrará que $\alpha T + S \in \mathrm{CC}(X, Y)$. Considere una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge débilmente, esto es $x_n \xrightarrow{w} x$, en X. Por el lema 1.2, el límite débil es único, por lo que, por definición de operador completamente continuo se tendrá que

$$Tx_n \xrightarrow{s} Tx \text{ y } Sx_n \xrightarrow{s} Sx$$

en Y. Por tal motivo, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tendrá que

$$\|(\alpha T + S)x_n - (\alpha T + S)x\| < \varepsilon,$$

en otras palabras, $(\alpha T + S)$ lleva convergencia débil en convergencia fuerte y por lo tanto $\alpha T + S \in \mathrm{CC}(X, Y)$. □

Proposición 2.8. *Sean X, Y espacios de Banach. Los subespacios vectoriales* $\mathrm{FA}(X,Y)$, $\mathrm{Com}(X,Y)$ *y* $\mathrm{CC}(X,Y)$ *de* $(\mathcal{B}(X,Y), \|\,\|)$ *son cerrados con respecto a la topología inducida por la norma operador.*

Demostración. El subespacio $\mathrm{FA}(X,Y)$ es cerrado, por definición. Para el caso del subespacio $\mathrm{Com}(X,Y)$, suponga que se tiene una sucesión de operadores compactos $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathrm{Com}(X,Y)$ convergente en la norma operador a un operador T. Se mostrará que T es compacto. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X. Como T_1 es compacto, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\{T_1 x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge en Y a medida que $n \longrightarrow \infty$. La sucesión $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, por ser subsucesión de una sucesión acotada y, por lo tanto, dada la compacidad de T_2, la sucesión $\{T_2 x_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, de donde se infiere que $\{x_{1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$. Siguiendo un proceso por completo análogo, para el operador T_k es posible encontrar una subsucesión $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ de $\{x_{k-1,n}\}_{n=1}^{\infty}$ que es convergente, ya que T_k es compacto. Tal sucesión, $\{x_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$, converge para T_j, con $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Se tiene el siguiente arreglo

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{x_{1,1}} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots \\ x_{2,1} & \mathbf{x_{2,2}} & x_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_{k,1} & x_{k,2} & x_{k,3} & \cdots \end{array}$$

Nótese que cada fila es en realidad una subsucesión de la sucesión que forma la fila anterior y que además, al aplicar los operadores $T_1, T_2, \ldots, T_k$ a la k-ésima fila, se obtiene una sucesión convergente en Y. Considere ahora la subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$x_{1,1}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,k}, \ldots,$$

la cual satisface que, para cada k, $\{T_k x_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$, converge cuando $n \to \infty$ y por lo tanto es de Cauchy. Se afirma ahora que

$$\{T x_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$$

converge. Para tal efecto, se mostrará que esa sucesión es de Cauchy en Y. Por ser la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada, se tiene una constante M tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado un $\varepsilon > 0$ y k suficientemente grande, se cumple que existen $n, m \geq n_0(k)$ tal que

$$\|T_k x_{n,n} - T_k x_{m,m}\| < \frac{\varepsilon}{3},$$

y, para tal k fija se satisface además que

$$\|T_k - T\| < \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}$$

usando la desigualdad triangular se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}\|Tx_{n,n} - Tx_{m,m}\| &\leq \|Tx_{n,n} - T_k x_{n,n}\| + \|T_k x_{n,n} - T_k x_{m,m}\| + \|T_k x_{m,m} - Tx_{m,m}\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} \cdot M = \varepsilon.\end{aligned}$$

Así, la sucesión $\{Tx_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y por ser Y un espacio de Banach, es convergente, por lo tanto, T es un operador compacto.

Para probar que el subespacio $\mathrm{CC}(X,Y)$ es cerrado, suponga que $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente de operadores completamente continuos, es decir, $T_n \longrightarrow T$, a medida que $n \to \infty$. Considere una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ débilmente convergente en X. Por el lema 1.2, tal sucesión es acotada, es decir, $\|x_n\| \leq M$ para todo $n \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición, cada operador T_k es tal que $T_k x_n \xrightarrow{s} T_k x_0$ en Y o dicho de otro modo, existe un $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0(k)$

$$\|T_k x_n - T_k x_0\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Note, por otra parte, que de manera similar a como se trató el caso en el que los operadores son compactos, de la convergencia uniforme de la sucesión de los T_n a T, ($\|T_n - T\| \longrightarrow 0$), si k es suficientemente grande se cumple que

$$\|T_k - T\| \leq \frac{\varepsilon}{3 \cdot M}$$

de aquí que, para un k fijo adecuado,

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx_0\| &\leq \|Tx_n - T_k x_n\| + \|T_k x_n - T_k x_0\| + \|T_k x_0 - Tx_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3 \cdot M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3 \cdot \|x_0\|} \cdot \|x_0\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.5. *Considere el espacio* $(\mathcal{B}(X,Y), \|\,\|)$ *donde* $\|\,\|$ *es la norma operador. Entonces*

a) $\mathrm{FR}(X,Y)$ *es un ideal bilateral en* $\mathcal{B}(X,Y)$*.*

b) $\mathrm{FA}(X,Y)$ *es un ideal bilateral en* $\mathcal{B}(X,Y)$*.*

c) $\mathrm{Com}(X,Y)$ *es un ideal bilateral en* $\mathcal{B}(X,Y)$*.*

d) $\mathrm{CC}(X,Y)$ *es un ideal bilateral en* $\mathcal{B}(X,Y)$*.*

donde ideal bilateral es en el siguiente sentido: Para todo operador lineal $S \in \mathcal{B}(Y)$ *y* $U \in \mathcal{B}(X)$*, si* T *pertenece a alguno de los subespacios mencionados, entonces el operador* STU *pertenece también a tal subespacio.*

Demostración. a) Sea $T \in \mathrm{FR}(X,Y)$. Basta notar que $\dim \mathcal{R}(TU) < \infty$ y por lo tanto $\dim \mathcal{R}(STU) < \infty$.

b) Para $T \in FA(X,Y)$, sea $T \in \mathrm{FA}(X,Y)$. Entonces, existe una sucesión de operadores lineales de rango finito, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que

$$T_n \longrightarrow T.$$

Sean $U \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$. Por el primer inciso se sabe que, para cada n, $ST_nU \in \mathrm{FR}(X,Y)$. Considérese a la sucesión $\{ST_nU\}_{n=1}^{\infty}$. Por demostrar que

$$ST_nU \longrightarrow STU.$$

Dados $U \in \mathcal{B}(X)$ y $S \in \mathcal{B}(Y)$ y $\frac{\varepsilon}{\|S\|\|U\|} > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, entonces $\|T_n - T\| < \frac{\varepsilon}{\|S\|\|U\|}$, de ahí que

$$\begin{aligned}
\|ST_nU - STU\| &= \|S(T_n - T)U\| \leq \|S\|\|T_n - T\|\|U\| \\
&< \|S\|\frac{\varepsilon}{\|S\|\|U\|}\|U\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

por lo tanto, el operador $STU \in FA(X,Y)$, como se quería probar.

c) Sean $T \in \mathrm{Com}(X,Y)$, $U \in \mathcal{B}(X)$, $S \in \mathcal{B}(Y)$. Por ser T compacto $\overline{TX_1}$ es compacto en Y y debido a que $S \in \mathcal{B}(Y)$, entonces $S(\overline{TX_1})$ es compacto. Nótese ahora que si $U \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$\overline{STU(X_1)} \subset \overline{ST(\|U\| \cdot X_1)} \subset \|U\| \cdot S(\overline{TX_1})$$

y éste último conjunto es compacto, por lo tanto $STU \in \mathrm{Com}(X,Y)$.

d) Dados $U \in \mathcal{B}(X)$ y $T \in \mathrm{CC}(X,Y)$ se tiene que $TU \in \mathrm{CC}(X,Y)$, pues si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión débilmente convergente en X, entonces Ux_n es débilmente convergente en X: Sea $f \in X^*$. Se define a continuación $g \in X^*$ como $g(x_n) = (f \circ U)x_n$. Como $x_n \xrightarrow{w} x_0$ para algún $x_0 \in X$, se tiene entonces que

$$g(x_n) \xrightarrow{s} g(x_0),$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} f(Ux_n) = f(Ux_0)$. Por ser $f \in X^*$ arbitrario, se ha probado la afirmación. Así pues, TU lleva convergencia débil en convergencia fuerte. Si $S \in \mathcal{B}(Y)$, la continuidad de S asegura que $STU \in \mathrm{CC}(X,Y)$. $\square$

Observación 2.7. Por el teorema anterior, al considerar al espacio $(\mathcal{B}(X), \| \, \|)$ donde $\| \, \|$ es la norma operador, se tiene que $\mathrm{FA}(X)$, $\mathrm{Com}(X)$ y $\mathrm{CC}(X)$ son ideales bilaterales de $\mathcal{B}(X)$, todos ellos cerrados con respecto a la norma operador.

Teorema 2.6. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces*

$$\mathrm{FA}(X,Y) \subset \mathrm{Com}(X,Y) \subset \mathrm{CC}(X,Y).$$

Demostración. Primero se mostrará que $\mathrm{FA}(X,Y) \subset \mathrm{Com}(X,Y)$. Dado un $T \in \mathrm{FA}(X,Y)$ existe una sucesión de operadores de rango finito,$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, que converge a T en $\mathcal{B}(X,Y)$. Cada T_n es tal que $\overline{T_n X_1}$ resulta ser compacto en Y, por el teorema 1.28, pues $\dim \mathcal{R}(T_n) < \infty$, por lo tanto, cada T_n es un operador compacto. Por la proposición 2.8, $T \in \mathrm{FA}(X,Y)$ es compacto.

La segunda relación de contención, $\mathrm{Com}(X,Y) \subset \mathrm{CC}(X,Y)$, se obtiene como consecuencia del teorema 2.1. En general, la contención es propia: como ejemplo se encuentra la propiedad de Schur mencionada en la sección 2.2.1. $\square$

Observación 2.8. Si X es un espacio de Banach. Entonces, haciendo en el teorema anterior $Y = X$, se tiene que

$$\mathrm{FA}(X) \subset \mathrm{Com}(X) \subset \mathrm{CC}(X).$$

El teorema siguiente da las condiciones bajo las que las familias de operadores compactos y completamente continuos coinciden en un espacio de Banach X.

Teorema 2.7. *Sea X un espacio de Banach. Si X es un espacio reflexivo con espacio dual X^* separable, entonces*

$$\mathrm{Com}(X) = \mathrm{CC}(X).$$

Demostración. Como X es un espacio de Banach reflexivo, por el teorema 1.32, X_1 es compacto en la topología $\sigma(X, X^*)$. Debido a la separabilidad de X^*, por el teorema 1.30, la topología débil $\sigma(X, X^*)$ restringida a X_1 es metrizable. Por lo anterior, una función $F : (X_1, \sigma(X, X^*)) \longrightarrow (X_1, \| \, \|)$ es continua si y sólo si $x_n \longrightarrow x$ en $\sigma(X, X^*)$ implica que $F(x_n) \longrightarrow F(x)$ en $(X_1, \| \, \|)$. Como $T \in \mathrm{CC}(X)$, T es continuo en el sentido anterior, por lo tanto $T[X_1]$ es compacto de donde $T \in \mathrm{Com}(X)$. $\square$

Para finalizar esta sección, se estudiará cuando la familia $\mathrm{FA}(X)$ coincide con la familia $\mathrm{Com}(X)$, para X un espacio de Banach.

Definición. Sea X un espacio de Banach. Una **base de Schauder**, es un conjunto $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que para cada $x \in X$ existe una sucesión única $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tal que

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n \to x$$

a medida que $N \to \infty$.

Observación 2.9. El nombre Schauder se debe a J. Schauder, quien introdujo el concepto de base en 1927. Todas las bases consideradas aquí serán bases de Schauder normalizadas, esto es $\|x_n\| = 1$ para todo n. Es importante mencionar también que una base de Schauder es una base ordenada.

Proposición 2.9. *Sea X un espacio de Banach tal que X tiene una base de Schauder. Entonces X es separable.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Schauder en X. Dado $x \in X$, existe una sucesión única, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, en $\mathbb{K}$ tal que

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n,$$

y por tanto, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n\| < \varepsilon.$$

Considere ahora

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \|x - y\| < \varepsilon\}$$

y

$$Q = \{\sum_{n=1}^{N} q_n x_n \mid N \in \mathbb{N},\, q_j \in \mathbb{Q}\ \forall j\}.$$

El conjunto Q es numerable. Así, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ es posible hallar N_ε tal que

$$\begin{aligned}
\|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} q_n x_n\| &= \|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n + \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} q_n x_n\| \\
&\leq \|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n\| + \|\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} q_n x_n\| \\
&\leq \|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n\| + \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |\alpha_n - x_n| \|x_n\|,
\end{aligned}$$

de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{K}$, es posible tomar los $q_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$|\alpha_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon},$$

y por lo tanto, como $\|x_n\| = 1$,

$$\|x - \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \alpha_n x_n\| + \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |\alpha_n - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + N_\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{2N_\varepsilon} = \varepsilon$$

de ahí que $\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} q_n x_n \in B_\varepsilon(x)$ de donde se puede afirmar que el conjunto Q es denso en X. □

Observación 2.10. El recíproco no es cierto. Hay espacios de Banach separables que no tienen una base de Schauder. El lector interesado puede consultar el artículo original de Enflo [18].

Dado un espacio de Banach X equipado con una base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $x \in X$, se tiene por definición que existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ asociada a tal x. Para tal $x \in X$ se define

$$f_n(x) = \alpha_n.$$

Observación 2.11. Note que cada f_n está asociado a un x_n de la base de Schauder $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en el siguiente sentido

$$f_n(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

Sean $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Entonces, existe una sucesión única $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$ tal que

$$x + \alpha y = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \gamma_n x_n.$$

Por otra parte, se tiene que

$$x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n, \text{ mientras que } y = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \beta_n x_n,$$

para ciertas sucesiones $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{K}$. En términos de los f_n podemos escribir

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x+\alpha y)x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n + \alpha \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(y)x_n,$$

de donde,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x+\alpha y)x_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (f_n(x) + \alpha f_n(y))x_n,$$

La unicidad de los coeficientes nos permite afirmar entonces que

$$f_n(x+\alpha y) = f_n(x) + \alpha f_n(y)$$

y por lo tanto, los f_n son funcionales lineales.

Dada una base de Schauder, sea

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n,$$

y defínase

$$\|x\|_S = \sup_N \|S_N(x)\|,$$

note que como $S_N(X) \to x$ cuando $N \to \infty$, los $S_N(x)$ forman una sucesión convergente, y por tanto acotada, de donde se tiene que $\|x\|_S < \infty$ para todo $x \in X$.

Lema 2.2. *$\| \|_S$ es una norma y, para todo $x \in X$, $\|x\| \leq \|x\|_S$.*

Demostración. Se mostrará que $\| \|_S$ es, en efecto, una norma. Note que

$$0 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(0)x_n$$

y como los f_n son lineales se debe cumplir que $f_n(0) = 0$ para todo n, por lo que es claro que $\|0\|_S = 0$. Por otra parte, suponga que $\|x\|_S = 0$ para algún $x \in X$. Entonces

$$\sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| = \sup_N \|S_N(x)\| = 0$$

implica que, para todo N

$$\|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| = 0,$$

de ahí que, en particular, para $N = 1$

$$\|f_1(x)x_1\| = |f_1(x)|\|x_1\| = 0,$$

lo que ocurre si y sólo si $f_1(x) = 0$, pues $\|x_1\| = 1$. Por una aplicación elemental del principio de inducción matemática se concluye que

$$f_n(x) = 0, \text{ para todo } n,$$

y por la unicidad de la expansión de 0 en términos de la base de Schauder, se concluye que $x = 0$.

La homogeneidad se tiene directamente del hecho de ser los f_n lineales: dado $\alpha \in \mathbb{C}$ y $(x \in X, \| \|_S)$

$$\begin{aligned}
\|\alpha x\|_S &= \sup_N \|S_N(\alpha x)\| \\
&= \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(\alpha x)x_n\| \\
&= \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} \alpha f_n(x)x_n\| \\
&= |\alpha| \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| \\
&= |\alpha|\|x\|_S.
\end{aligned}$$

Se mostrará a continuación que $\| \|_S$ satisface la desigualdad del triángulo. Sean $x, y \in (X, \| \|_S)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n + \sum_{n=1}^{N} f_n(y)x_n\| &\leq \sup_N \left(\|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| + \|\sum_{n=1}^{N} f_n(y)x_n\| \right) \\
&\leq \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| + \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(y)x_n\| \\
&= \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\|_S + \|\sum_{n=1}^{N} f_n(y)x_n\|_S
\end{aligned}$$

Para la segunda afirmación, nótese que

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| \\
&= \lim_{N\to\infty} \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| \\
&\leq \sup_N \|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)x_n\| = \sup_N \|S_N(x)\| \\
&= \|x\|_S.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\|x\| \leq \|x\|_S \text{ para todo } x \in X. \qquad \square$$

Lema 2.3. *El espacio* $(X, \| \|_S)$ *es de Banach*

Demostración. Sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \| \|_S)$. Entonces, por el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq N$

$$\|y_m - y_k\| \leq \|y_m - y_k\|_S < \varepsilon,$$

por lo tanto, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también Cauchy en $(X, \| \|)$ el cual es Banach, por lo que la sucesión converge a un punto $y_0 \in (X, \| \|)$, es decir

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y_0.$$

Dado un $x \in (X, \| \|)$, como

$$f_N(x)x_n = S_N(x) - S_{N-1}(x),$$

se tiene que

$$|f_N(x)| = \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\|$$

de ahí que, dados un $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ y una sucesión de Cauchy $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ en $(X, \| \|_S)$, para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$, independiente de N, tal que si $m, n \geq M_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
|f_N(y_n) - f_N(y_m)| &= \|S_N(y_n) - S_{N-1}(y_n) - (S_N(y_m) - S_{N-1}(y_m))\| \\
&= \|S_N(y_n) - S_N(y_m) + S_{N-1}(y_m) - S_{N-1}(y_n)\| \\
&\leq \|S_N(y_n) - S_N(y_m)\| + \|S_{N-1}(y_n) - S_{N-1}(y_m)\| \\
&= \|S_N(y_m - y_n)\| + \|S_{N-1}(y_m - y_n)\| \\
&\leq 2\sup_N \|S_N(y_m - y_n)\| \\
&= 2\|y_m - y_n\|_S < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

por lo que, para un N fijo, la sucesión $\{f_N(y_k)\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y por ser el campo completo, tal sucesión converge a un $\beta_N^{(0)}$, es decir, para $i = 1, \ldots, N$

$$f_i(y_k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \beta_i^{(0)}.$$

De lo que se sigue que

$$S_N(y_k) = \sum_{n=1}^{N} f_n(y_k)x_n \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(0)} x_n \qquad (*)$$

Para probar tal afirmación se observa que dado un $\frac{\varepsilon}{N} > 0$, existen $n_1, n_2, \ldots, n_N \in \mathbb{N}$ tales que, respectivamente para cada $n = 1, 2, \ldots, N$,

$$|f_n(y_k) - \beta_n^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{N},$$

con $k \geq n_j$, $j = 1, 2 \ldots, N$. Por lo tanto, para $\frac{\varepsilon}{N} > 0$ y $k \geq \text{máx}\{n_1, n_2, \ldots, n_N\}$,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=1}^{N} f_n(y_k)x_n - \sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(0)} x_n\| &\leq \sum_{n=1}^{N} \|(f_n(y_k) - \beta_n^{(0)})x_n\| \\
&= \sum_{n=1}^{N} |f_n(y_k) - \beta_n^{0}| \\
&< N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

es decir, se tiene la convergencia puntual. Para ver que la convergencia es uniforme en N, se observa lo siguiente: por ser la $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ de Cauchy, existe una constante $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que si $k, m \geq M_\varepsilon$.

$$\|y_k - y_m\|_S < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \|S_N(y_k) - S_N(y_m)\| &\leq \sup_N \|\sum_{i=1}^{N} f_i(y_k)x_i - \sum_{i=1}^{N} f_i(y_m)x_i\| \\ &= \|y_k - y_m\|_S < \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } k, m \geq M_\varepsilon, \end{aligned}$$

donde M_ε es independiente de N.

De lo anterior y de (*), si $k > M_\varepsilon$,

$$\|\sum_{i=1}^{N} f_i(y_k)x_i - \sum_{i=1}^{N} \beta_i^0 x_i\| = \|\sum_{i=1}^{N} f_i(y_k)x_i - \lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f_i(y_m)x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3};$$

lo que prueba la afirmación.

Como parte de la prueba, el objetivo siguiente es mostrar que en $(X, \| \|)$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(0)} x_n = y_0.$$

Sea pues un $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq K_\varepsilon$, se tiene que

$$\|y_k - y_0\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otra parte, existe M_ε tal que si $k \geq M_\varepsilon$ se tiene que

$$\|\sum_{i=1}^{N} f_i(y_k)x_i - \sum_{i=1}^{N} \beta_i^0 x_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

uniformemente en N. De ahí que, para un $k_0 > \text{máx}\{M_\varepsilon, K_\varepsilon\}$, es posible considerar a un $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $N \geq N_\varepsilon$, entonces

$$\|S_N(y_{k_0}) - y_{k_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(0)} x_n - y_0\| &\leq \|\sum_{n=1}^{N} \beta_n^{(0)} x_n - S_N(y_{k_0})\| + \|S_N(y_{k_0}) - y_{k_0}\| + \|y_{k_0} - y_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Se tiene por lo tanto que

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\beta_n^{(0)}x_n = y_0$$

en $(X, \| \|)$ y, debido a la unicidad de los coeficientes en la expansión en términos de la base de Schauder, se debe cumplir que

$$\beta_n^{(0)} = f_n(y_0)$$

y, por lo tanto,

$$S_N(y_0) = \sum_{n=1}^{N}\beta_n^{(0)}x_n.$$

Finalmente, debido a que la sucesión $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(X, \| \|_S)$, dado un $\varepsilon > 0$ existe un entero M_ε tal que, si $m, k \geq M_\varepsilon$, $\|y_m - y_k\|_S < \varepsilon$. Para tal m se tiene que

$$\|y_m - y_0\|_S = \sup_N \|S_N(y_m - y_0)\| = \sup_N \|S_N(y_m) - S_N(y_0)\|.$$

Como

$$S_N(y_0) = \sum_{n=1}^{N}\beta_n^{(0)}x_n,$$

por (*) se tiene que

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_0\|_S &= \sup_N \|S_N(y_m) - \lim_{k\to\infty} S_N(y_k)\| \\
&= \sup_N \lim_{k\to\infty} \|S_N(y_m) - S_N(y_k)\| \\
&\leq \sup_N \lim_{k\to\infty} \|S_N(y_m - y_k)\| \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en $(X, \| \|_S)$ se tiene

$\lim_{k\to\infty} y_k = y_0,$ y por ser, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy arbitraria, $(X, \| \|_S)$ es completo.

□

Proposición 2.10. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Entonces $\| \|$ y $\| \|_S$ son equivalentes, es decir, si existe C_1 tal que para todo $x \in X$, $\|x\| \leq C_1\|x\|_S$, entonces existe C_2 tal que $\|x\|_S \leq C_2\|x\|$. En particular, existe un $C > 0$ tal que*

$$\sup_N \|S_N(x)\| \leq C\|x\|.$$

Demostración. Considere el operador identidad $I : (X, \| \|_S) \longrightarrow (X, \| \|)$. Por hipótesis, existe C_1 tal que $\|x\| \leq C_1 \|x\|_S$ y por lo tanto

$$\|x\| = \|Ix\| \leq C_1 \|x\|_S,$$

es decir, I es un operador acotado entre espacios de Banach, además sobre e inyectivo, de ahí que, por el teorema 1.4

$$I : (X, \| \|) \longrightarrow (X, \| \|_S)$$

es también un operador acotado, es decir, para todo $x \in (X, \| \|)$ existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$\|x\|_S = \|Ix\|_S \leq C_2 \|x\|.$$

Por las definiciones, es claro que existe un $C > 0$ tal que

$$\sup_N \|S_N(x)\| \leq C\|x\|.$$

□

Proposición 2.11. *Cada f_n es acotado y por lo tanto $f_n \in X^*$.*

Demostración. Como

$$f_N(x)x_n = S_N(x) - S_{N-1}(x),$$

se tiene que,

$$\begin{aligned} |f_N(x)| &= \|S_N(x) - S_{N-1}(x)\| \\ &\leq \|S_N(x)\| + \|S_{N-1}(x)\| \\ &\leq 2\|x\|_S \end{aligned}$$

Por la proposición anterior, existe un $C > 0$ tal que

$$|f_N(x)| \leq 2\|x\|_S \leq 2C\|x\|.$$

Por ser $x \in X$ arbitrario, se tiene que f_N es acotado. □

Teorema 2.8. *Sean X un espacio de Banach con base de Schauder, $S \subset X$ un conjunto compacto en $(X, \| \|)$ y $x \in S$. Entonces, $S_N(x) \to x$ uniformemente.*

Demostración. Sea $C > 0$ tal que

$$\|x\|_S \leq C\|x\|, \forall\, x \in X.$$

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ y considere las bolas centradas respectivamente en x_j

$$B_{\frac{\varepsilon}{3c}}(x_j) = \{x \in X \mid \|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{3C}\}$$

de tal forma que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{\frac{\varepsilon}{3C}}(x_j).$$

Debido a que $S_N(x_j) \to x_j$ a medida que $N \to \infty$, existe un N_0 tal que, si $N > N_0$, entonces $\|S_N(x_j) - x_j\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Esto es posible hacerlo para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Por otra parte, para un $x \in S$, sea j tal que $\|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{3C}$ y observe que

$$\begin{aligned}
\|S_N(x) - x\| &= \|S_N(x) - S_N(x_j) + S_N(x_j) - x_j + x_j - x\| \\
&\leq \|S_N(x) - S_N(x_j)\| + \|S_N(x_j) - x_j\| + \|x_j - x\| \\
&\leq \|S_N(x - x_j)\| + \|S_N(x_j) - x_j\| + \|x_j - x\| \\
&\leq \|x - x_j\|_S + \|S_N(x_j) - x_j\| + \|x_j - x\|_S \\
&\leq C\|x - x_j\| + \|S_N(x_j) - x_j\| + C\|x_j - x\| \\
&= \left(C \cdot \frac{\varepsilon}{3C}\right) + \frac{\varepsilon}{3} + \left(C \cdot \frac{\varepsilon}{3C}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Como $x \in S$ es arbitrario, se ha probado la convergencia uniforme de $S_N(x)$ a x. □

Teorema 2.9. *Sea X un espacio de Banach tal que X tiene una base de Schauder. Entonces*

$$\mathrm{FA}(X) = \mathrm{Com}(X).$$

Demostración. Sea $T \in \mathrm{Com}(X)$ y $S = \overline{T[X_1]}$. Defina $T_N = S_N \circ T$. Por demostrar que T_N es de rango finito. Como cada f_n es acotado, S_N es acotado y, por tanto, $T_N \in \mathcal{B}(X)$. Dado un n fijo, note que

$$T_N[X] = (S_N \circ T)[X] = \mathrm{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_N\},$$

pues dada una combinación lineal finita de los $x_1, x_2, \ldots, x_N$ se tendría que

$$x = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} 0 x_n$$

y por otra parte $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n$ en términos de los elementos de la base de Schauder. De la unicidad de los coeficientes se tiene de inmediato que $\alpha_k = f_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ y por lo tanto $\operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_N\} \subseteq T_N[X]$. Se observa que los elementos de una base de Schauder son linealmente independientes: el vector $0 \in X$ tiene, por definición, una representación única en términos de la base de Schauder y $f_n(0) = 0$ para todo n, de ahí que $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ sea un conjunto linealmente independiente, por lo tanto $\dim \mathcal{R}(T_N) = N < \infty$. Para concluir la demostración, note que, por el teorema anterior, para N suficientemente grande

$$\|T_N - T\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|S_N(Tx) - Tx\| < \varepsilon,$$

ya que $S_N(TX) \to TX$ de manera uniforme en $\overline{T[X_1]}$. $\square$

2.3. Un ejemplo de operador compacto

2.3.1. Operadores de Hilbert-Schmidt

Definición. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert complejo y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Se dice que T es **positivo**, $T \geq 0$, si T es autoadjunto y $\langle x, Tx \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Para todo operador positivo T definido en un espacio de Hilbert se define un análogo de la traza definido para operadores lineales en espacios de dimensión finita.

Definición. Dado un operador lineal acotado definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se define la **traza** de T, denotado como $\operatorname{Tr} T$, por

$$\operatorname{Tr} T = \sum_{n=1}^{\infty} \langle e_n, Te_n \rangle,$$

donde $\{e_1, e_2, \ldots\}$ es una base ortonormal de H.

Observación 2.12. Note que la traza toma valores en $(0, +\infty]$, además, la traza de operadores lineales acotados T, S definidos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ satisface $\operatorname{Tr} T + \operatorname{Tr} S = \operatorname{Tr}(T+S)$ y para un escalar $\alpha > 0$ $\operatorname{Tr}(\alpha T) = \alpha \operatorname{Tr} T$.

Proposición 2.12. *Dado un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, la traza de T no depende de la elección de la base ortonormal de $\mathcal{H}$, es decir, si $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ son bases ortonormales de $\mathcal{H}$,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

Demostración. Sean $\{e_n\}$ y $\{f_n\}$ dos bases ortonormales de $\mathcal{H}$. Entonces, aplicando la identidad de Parseval, para cada n se tiene

$$Te_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle e_j, Te_n \rangle e_j, \; \|Te_n\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, Te_n \rangle|^2;$$

Análogamente, para n y cada j

$$\begin{aligned} \|Te_n\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, Te_n \rangle|^2 \\ \|T^* f_j\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_j \rangle|^2 \\ \|T^* f_j\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_n, T f_j \rangle|^2, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, Tf_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f_j, T^* f_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|T^* f_j\|^2, \end{aligned}$$

de forma similar

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, Te_n \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_j \rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \|T^* f_j\|^2, \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2.$$

□

Definición. Un operador lineal acotado T, definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y que satisface que

$$\operatorname{Tr} T < \infty$$

recibe el nombre de **operador a traza** o bien, que T es un operador de **clase traza**. El conjunto de operadores a traza en un espacio de Hilbert dado se denota por $\mathfrak{J}_1$.

A continuación se presenta un ejemplo de una familia de operadores lineales compactos definida en un espacio de Hilbert.

Definición. Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, una base ortonormal $\{e_1, e_2, \ldots\}$ fija para $\mathcal{H}$ y un operador lineal $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se dice que el operador $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es de **Hilbert-Schmidt** si satisface

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

La clase de operadores de Hilbert-Schmidt definidos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es denotada por $\mathfrak{J}_2$.

Los operadores de Hilbert-Schmidt forman un ideal en la C^*-álgebra de los operadores compactos y si $T \in \mathfrak{J}_2$ entonces

$$\operatorname{Tr} T^*T < \infty$$

donde $\operatorname{Tr} T$ es la **traza** de T y está dada por

$$\operatorname{Tr} T = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle,$$

siendo $\{e_1, e_2, \ldots\}$ una base ortonormal de H.

Teorema 2.10. *Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable y $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un operador de Hilbert-Schmidt. Entonces T es compacto.*

Demostración. La idea de la prueba es mostrar a T como un límite de operadores de rango finito, es decir, que $T \in \operatorname{FA}(\mathcal{H})$. Dada una base ortonormal en $\mathcal{H}$ fija, digamos $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, y tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$, defínase T_n por

$$T_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle Te_k.$$

Por definición, los T_n son operadores lineales y tienen rango finito. Sólo se debe mostrar que $T_n \longrightarrow T$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Nótese que, para $x \in \mathcal{H}$

$$\|(T - T_n)x\| = \|\sum_{k=n+1}^{\infty} \langle e_k, x\rangle Te_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle| \|Te_k\|.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$\|(T - T_n)x\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle e_k, x\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

de donde, mediante una aplicación previa de la identidad de Parseval (teorema 1.13),

$$\|T - T_n\| \leq \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

y como $\sum_{k=1}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty$, entonces $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|Te_k\|^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$. La base ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de Schauder, como consecuencia del teorema 1.13, y $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach. El resultado se sigue del teorema 2.9. $\square$

Capítulo 3

Algunas propiedades espectrales

3.1. Espectro de operadores compactos

La teoría espectral es una de las ramas principales del análisis funcional moderno. Hablando de forma un tanto somera, la teoría espectral se basa en el estudio de cierto operador inverso definido a partir de un operador dado que será objeto de estudio. Las propiedades de ese operador inverso así como la relación que guarda con el operador original a partir del cual fue definido se analizan a partir de la noción de espectro, estableciendo mediante éste un análogo del estudio que se hace en el caso de dimensión finita con los valores propios de un operador lineal.

3.1.1. El espectro de un operador lineal

Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado sobre los complejos y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal. Se asocia a T el operador

$$T_\lambda = T - \lambda I, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{C},$$

e I es el operador identidad en $\mathcal{D}(T)$.

Definición. Si T_λ tiene un operador inverso escribiremos $T_\lambda^{-1} = R_\lambda(T)$, es decir

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Tal operador recibe el nombre de **operador resolvente** de T o **resolvente** de T. Cuando el operador T se sobreentienda del contexto se escribirá, por simplicidad, R_λ.

Nótese que T_λ y $R_\lambda(T)$ son operadores lineales.

Las propiedades de $R_\lambda(T)$ ayudarán a estudiar al operador T. Muchas de las propiedades de R_λ ó T_λ dependen del valor que tome λ.

Definición. Sea $X \neq \{0\}$ un espacio normado sobre los complejos y $T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow X$ un operador lineal con dominio $\mathcal{D}(T) \subset X$. Un **valor regular** λ de T es un número complejo tal que

R1) $R_\lambda(T)$ existe,

R2) $R_\lambda(T)$ es acotado,

R3) $R_\lambda(T)$ es definido en un conjunto denso de X (en cuyo caso se dirá que está **definido densamente**)

El conjunto de todos los valores regulares de T recibe el nombre de **conjunto resolvente** de T, denotado por $\rho(T)$. Se define el **espectro** de T, denotado por $\sigma(T)$ como el complemento de conjunto resolvente, esto es

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T).$$

Cuando $\lambda \in \sigma(T)$, se dirá que λ es un **valor espectral** de T.

Definición. Dado un operador lineal T como en la definición anterior, el espectro asociado $\sigma(T)$ está particionado en tres conjuntos disjuntos.

- El **espectro puntual** (también llamado **espectro discreto**), que se denotará como $\sigma_p(T)$, es el conjunto de valores en el espectro de T donde R_λ no existe. Si $\lambda \in \sigma_p(T)$ se dirá que λ es un **valor propio**.
- El **espectro continuo**, denotado por $\sigma_c(T)$, es el conjunto de valores en el espectro de T tales que R_λ es no acotado (pero satisface las propiedades R1) y R3) de la definición anterior).
- El **espectro residual**, $\sigma_r(T)$, es el conjunto de valores en el espectro de T para los que R_λ existe pero no está definido densamente.

Observación 3.1. Puede ocurrir que alguno de estos subconjuntos sea vacío. Como ejemplo, cuando X tiene dimensión finita se tiene que $\sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$.

Con respecto a lo dicho al inicio de la presente sección, nótese que si existe un $x \in \mathcal{D}(T) \setminus \{0\}$ tal que

$$T_\lambda x = (T - \lambda I)x = 0,$$

entonces λ es un valor propio, por definición, y tal x recibirá el nombre de **vector propio** asociado a λ.

Definición. El subespacio de $\mathcal{D}(T)$ formado por todos los vectores propios asociados a un valor propio λ recibirá el nombre de **espacio propio** correspondiente a λ.

3.1.2. Algunas propiedades espectrales de operadores acotados

Debido a que las propiedades del espectro de un operador lineal T dependen tanto del tipo de operador que sea T, así como del espacio sobre el que T es definido, a continuación se enuncian sin demostración algunas propiedades espectrales para operadores lineales acotados definidos sobre un espacio de Banach X sobre los complejos. Las demostraciones pueden ser consultadas en [1].

Teorema 3.1. *Sean X un espacio de Banach complejo, $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal y $\lambda \in \rho(T)$. Si se satisface cualquiera de las siguientes condiciones*

a) T es cerrado o

b) T es acotado,

entonces $R_\lambda(T)$ es definido en todo el espacio X y es acotado.

Demostración. Ver [1], capítulo 7. □

Teorema 3.2. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$, donde X es un espacio de Banach complejo. Si $\|T\| < 1$, entonces $(I - T)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j = I + T + T^2 + \dots,$$

donde la serie es convergente en la norma definida en $\mathcal{B}(X)$.

Demostración. Ver [1], capítulo 7. □

Teorema 3.3. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$, con X un espacio de Banach complejo. Entonces, el conjunto resolvente de T, $\rho(T)$, es abierto en $\mathbb{C}$ con la topología usual.*

Demostración. Ver [1], capítulo 7. □

Teorema 3.4. *Sea $T \in \mathcal{B}(X)$, con X un espacio de Banach complejo. Entonces, el espectro de T, $\sigma(T)$, es compacto y $\lambda \in \sigma(T)$ satisface*

$$|\lambda| \leq \|T\|.$$

Como consecuencia, el conjunto resolvente $\rho(T)$ es no vacío.

Demostración. Ver [1], capítulo 7. □

3.1.3. Propiedades espectrales de operadores compactos

Siguiendo en su mayoría el desarrollo presentado en [1], se expone a continuación la teoría espectral para operadores compactos.

Teorema 3.5. *Sean X un espacio normado y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto. Entonces, el espectro puntual de T, $\sigma_p(T)$, es numerable (inclusive finito o vacío) y el único posible punto de acumulación es $\lambda = 0$.*

Demostración. Suponga que existe un $k > 0$ tal que la cardinalidad del conjunto de los $\lambda \in \sigma_p(T)$ tales que $|\lambda| > k$ es no numerable. Existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ de valores propios tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$ y $|\lambda_j| \geq k$. Por ser cada λ_j valor propio, cada uno de ellos tiene asociado al menos un vector propio x_j no nulo, es decir, $Tx_j = \lambda_j x_j$. El conjunto $x_1, x_2, \ldots$ es linealmente independiente. Sea

$$M_n = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

El subespacio M_n es de dimensión finita y por lo tanto cerrado. Dado $x \in M_n$ se tiene que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n, \text{ donde } \alpha_j \in \mathbb{C};$$

de ahí que al aplicar el operador lineal T_{λ_n} a ambos lados de la ecuación se obtiene

$$(T - \lambda_n I)x = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda)x_1 + \ldots \alpha_n(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x_{n-1},$$

es decir, $(T - \lambda_n I)x \in M_{n-1}$ para todo $x \in M_n$.

Se usará a continuación el lema de Riesz 1.27: existe una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M_n$ tal que $\|y_n\| = 1$ y

$$\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in M_{n-1}.$$

Así

$$\begin{aligned} Ty_n - Ty_m &= \lambda_n y_n - \lambda_n y_n + Ty_n - Ty_m \\ &= \lambda_n y_n - (\lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m) \\ &= \lambda_n y_n - \bar{x}, \end{aligned}$$

donde $\bar{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m$. Se mostrará que $\bar{x} \in M_{n-1}$. Sea $m < n$. Como $m \leq n-1$, entonces $y_m \in M_m \subset M_{n-1}$ y por lo tanto $Ty_m \in M_{n-1}$ y note además que

$$\lambda_n y_n - Ty_n = -(T - \lambda_n I)y_n \in M_{n-1},$$

de ahí que $\bar{x} \in M_{n-1}$. De lo anterior

$$\|\lambda_n y_n - \bar{x}\| = |\lambda_n| \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda_n| \geq \frac{1}{2}k,$$

donde $x = \lambda_n^{-1}\bar{x}$. Así, se tiene que

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}k,$$

que nos dice en particular que no se tiene una subsucesión convergente, lo que contradice la hipótesis de ser T un operador lineal compacto. $\square$

Observación 3.2. Si $T \in \mathrm{Com}(X)$, donde X en un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $0 \in \sigma(T)$ ya que si $0 \in \rho(T)$, entonces existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ y por el teorema 2.5, $I \in \mathrm{Com}(X)$, lo cual sería una contradicción.

Teorema 3.6. *Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto en un espacio normado X. Entonces, para todo $\lambda \neq 0$*

i) el espacio nulo de T_λ, $\mathcal{N}(T_\lambda)$, es de dimensión finita,

ii) el rango de T_λ, $\mathcal{R}(T_\lambda)$, es cerrado.

Demostración. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$.

i) Para ésta parte, se aplicará el resultado 1.28. Sea una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{N}_1$, la bola unitaria cerrada en $\mathcal{N}(T_\lambda)$. Ésta sucesión es acotada y, por ser T un operador lineal compacto, la sucesión $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{Tx_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ está en $\mathcal{N}(T_\lambda)$, se tiene que $Tx_n - \lambda x_n = 0$, de donde

$$x_n = \frac{Tx_n}{\lambda}, \text{ ya que } \lambda \neq 0,$$

en particular, se tiene que la subsucesión dada por

$$x_{n_k} = \frac{Tx_{n_k}}{\lambda}$$

es convergente, con límite x_{n_0}. Por la proposición 1.5 se cumple que $x_{n_0} \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, más aún, se observa que $x_{n_0} \in \mathcal{N}_1$ pues $\mathcal{N}_1$ es cerrada, Se ha probado así que en $\mathcal{N}_1$ una sucesión acotada posee una subsucesión convergente, o en otras palabras que $\mathcal{N}_1$ es un conjunto secuencialmente compacto en la topología métrica y por ende es compacto en esa topología. Por el teorema 1.28 $\mathcal{N}(T_\lambda)$ es de dimensión finita.

ii) La idea de la demostración es de la referencia [1]. Suponga que $\mathcal{R}(T_\lambda)$ no es cerrado. Entonces existe un $y_0 \in \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)}$ y una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}(T_\lambda)$ tal que $T_\lambda x_n = y_n \to y_0$. Nótese que $y_0 \neq 0$ pues $y_0 \notin \mathcal{R}(T_\lambda)$, por lo que se puede afirmar que, después de cierto índice, $y_n \neq 0$ y por tanto, $x_n \notin \mathcal{N}(T_\lambda)$ para n suficientemente grande. Sin pérdida de generalidad, supóngase que lo anterior ocurre para todo n. Como $\mathcal{N}(T_\lambda)$ es cerrado, por la proposición 1.5, la distancia, δ_n, de x_n a $\mathcal{N}(T_\lambda)$ es positiva, es decir,

$$\delta_n = \inf_{z \in \mathcal{N}(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0.$$

Por definición de ínfimo, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{N}(T_\lambda)$ tal que

$$a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n.$$

Se demostrará a continuación que la sucesión formada por los a_n diverge. Suponga que ocurre lo contrario. Entonces la sucesión $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión acotada. De la compacidad de T se tiene que $\{T(x_n - z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente. Como $T_\lambda = T - \lambda I$, y $\lambda \neq 0$, se puede escribir

$$I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda).$$

Por otra parte, como $z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, $T_\lambda(z_n) = 0$ y en combinación con la reescritura del operador identidad dada anteriormente se tiene

$$x_n - z_n = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) = \frac{1}{\lambda}(T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n).$$

Por hipótesis, $\{T_\lambda(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge, mientras que por la compacidad de T, la sucesión $\{T(x_n - z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, de donde se puede afirmar que la sucesión $\{x_n - z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, $\{x_{n_k} - z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, con límite v. La continuidad de T_λ implica que

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) \to T_\lambda v,$$

de donde, dado que $z_{n_k} \in \mathcal{N}(T_\lambda)$ se tiene que $T_\lambda v = y_0$ pues, como se dedujo al inicio de la prueba

$$T_\lambda x_{n_k} \to y_0,$$

Note que entonces se obtiene que $y_0 \in T_\lambda[X]$, que contradice la suposición inicial que $y_0 \notin T_\lambda[X]$.Tal contradicción se generó de suponer que la sucesión a_n no diverge. Se ha probado pues que

$$a_n = \|x_n - z_n\| \to \infty, \ \ n \to \infty.$$

Como parte final de la prueba, defínase la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dada por

$$w_n = \frac{1}{a_n}(x_n - z_n).$$

Note que $\|w_n\| = 1$ y

$$T_\lambda w_n = \frac{1}{a_n} T_\lambda x_n \longrightarrow 0,$$

ya que $a_n \to \infty$, mientras que $T_\lambda z_n = 0$ y $\{T_\lambda x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge. Usando nuevamente que $I = \frac{1}{\lambda}(T - T_\lambda)$ se obtiene

$$w_n = \frac{1}{\lambda}(T w_n - T_\lambda w_n),$$

y, usando una vez más la hipótesis de compacidad del operador T y que la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, se debe cumplir que la sucesión $\{T w_n\}_{n=1}^{\infty}$ debe tener una subsucesión convergente y como $T_\lambda w_n$ converge, se tiene entonces que w_n tiene una subsucesión convergente, digamos

$$w_{n_k} \longrightarrow w_{n_0}.$$

Nótese que bajo éstas suposiciones se tiene que $T_\lambda w_{n_0} = 0$, pues $T_\lambda w_n \to 0$, de ahí que $w_{n_0} \in \mathcal{N}(T_\lambda)$. Como $z_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$, también se tiene que

$$u_n = z_n + a_n w_{n_0} \in \mathcal{N}(T_\lambda).$$

Por lo tanto se debe tener que

$$\|x_n - u_n\| \geq \delta_n,$$

en otras palabras

$$\begin{aligned}
\delta_n &\leq \|x_n - z_n - a_n w_{n_0}\| \\
&= \|a_n w_n - a_n w_{n_0}\| \\
&= a_n \|w_n - w_{n_0}\| \\
&\leq 2\delta_n \|w_n - w_{n_0}\|,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{2} < \|w_n - w_{n_0}\|$$

que contradice que la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente. □

Corolario 3.1. *Sea X un espacio normado. Si $\underbrace{T_\lambda \circ T_\lambda \circ \ldots T_\lambda}_{r \text{ veces}} = T_\lambda^r$, $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto, entonces*

i) $\mathcal{R}(T_\lambda^r)$ *es cerrado para $r = 1, 2, \ldots$. Más aún, se cumple que*

$$X \supset \mathcal{R}(T_\lambda) \supset \mathcal{R}(T_\lambda^2) \supset \cdots;$$

ii) $\dim \mathcal{N}(T_\lambda^r) < \infty$, *$r = 1, 2, \ldots$, y*

$$\{0\} \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \cdots$$

Demostración. i) Considere que

$$\begin{aligned}
T_\lambda^r &= (T - \lambda I)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} T^k (-\lambda)^{r-k} \\
&= (-\lambda)^r I + T \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{r-k},
\end{aligned}$$

y note que si $S = \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{r-k}$, entonces $ST = TS$ es compacto. Sean $W = TS$ y $\mu = -\lambda^r$, entonces

$$T_\lambda^r = W - \mu I,$$

por el teorema anterior, 3.6, $\mathcal{R}(T_\lambda^r) = \mathcal{R}(W - \mu I)$ es cerrado. La cadena de contenciones se sigue del hecho de que T es compacto. Para la cadena de contenciones basta observar que

$$\mathcal{R}(T_\lambda) \subset X,$$

por lo que $\mathcal{R}(T_\lambda^2) \subset \mathcal{R}(T_\lambda)$. De manera inductiva se tiene entonces que

$$\mathcal{R}(T_\lambda^r) \subset \mathcal{R}(T_\lambda^{r-1}).$$

ii) $T_\lambda 0 = 0$ y por lo tanto $T_\lambda^r x = 0$ implica que $T_\lambda^{r+1} x = 0$ y por lo tanto

$$\{0\} \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \cdots .$$

Para ver que $\dim \mathcal{N}(T_\lambda^r) < \infty$, se hace una construcción similar a la realizada en i). Sean $W = TS$ y $\mu = -\lambda^r$, entonces

$$T_\lambda^r = W - \mu I,$$

como W es compacto, por el teorema anterior, 3.6,

$$\dim \mathcal{N}(W - \mu I) < \infty. \qquad \square$$

Teorema 3.7. *Sean $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto en un espacio normado X y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un entero r_λ, mínimo, tal que si $n \geq r_\lambda$*

$$\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1}) = \dots .$$

Si $r_\lambda > 0$, entonces se tienen las siguientes inclusiones propias

$$\{0\} = \mathcal{N}(T_\lambda^0) \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \ldots \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{r_\lambda}).$$

Demostración. La demostración se llevará a cabo por contradicción. Suponga que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$. Como $\mathcal{N}(T_\lambda^n)$ es un subespacio cerrado para todo n, existe, por el lema de Riesz 1.27, una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ tal que, para cada n

$$y_n \in \mathcal{N}(T_\lambda^n),\ \|y_n\| = 1,\ \|y_n - x\| \geq 1,\ \text{para todo } x \in \mathcal{N}(T_\lambda^n).$$

Como $T_\lambda = T - \lambda I$, entonces $T = T_\lambda + \lambda I$ y por lo tanto

$$Ty_n - Ty_m = (T_\lambda y_n + \lambda y_n) - (T_\lambda y_m + \lambda y_m) = \lambda y_n - \hat{x},$$

donde $\hat{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n$. Si $m < n$, se afirma que $\hat{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$. Para probarlo, se hace la observación que si $m < n$, entonces $m \leq n-1$ y por la suposición inicial, $\mathcal{N}(T_\lambda^m) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^n)$. Por lo tanto, $y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^m) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^n)$ y además

$$T_\lambda^m y_m = T_\lambda^m (T_\lambda^{m-1} y_m) = 0,$$

de donde $T_\lambda y_m \in \mathcal{N}(T_\lambda^{m-1} \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$. De manera análoga, $y_n \in \mathcal{N}(T_\lambda^n)$ implica que $T_\lambda y_n \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$. De lo anterior, $\hat{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$, como se quería probar.

Como $x = \lambda^{-1}\hat{x} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n-1})$ se tiene que

$$\|\lambda y_n - \hat{x}\| = |\lambda|\|y_n - x\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|,$$

es decir

$$\|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2}|\lambda|, \text{ para todo } m, n.$$

Por lo tanto, $\{Ty_n\}_{n=1}^\infty$ no puede tener una subsucesión convergente, lo que contradice la compacidad de T. La contradicción se originó de suponer que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$, por lo tanto, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1}).$$

Resta probar que si $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$, entonces $\mathcal{N}(T_\lambda^n) = \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$ para todo $n > m$. Suponga para tal efecto que no es así. Entonces existe un $n > m$ tal que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$. Sea $x \in \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1}) \setminus \mathcal{N}(T_\lambda^n)$. Por definición se tiene que

$$T_\lambda^n x = 0 \text{ pero } T_\lambda^{n+1} x \neq 0.$$

Como $n - m > 0$, es posible hacer $z = T_\lambda^{n-m} x$ y por lo tanto

$$T_\lambda^{m+1} z = T_\lambda^{n+1} x = 0, \text{ pero } T_\lambda^m z = T_\lambda^n x \neq 0,$$

por lo que se concluye que $z \in \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$ pero $z \notin \mathcal{N}(T_\lambda^m)$ y por lo tanto

$$\mathcal{N}(T_\lambda^m) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1}),$$

que contradice la hipótesis inicial de $\mathcal{N}(T_\lambda^m) = \mathcal{N}(T_\lambda^{m+1})$. Para finalizar la prueba, note que $r_\lambda = m$ sería el mínimo entero que satisface lo enunciado en el teorema y que si $r_\lambda > 0$ las inclusiones deben ser propias. $\square$

Teorema 3.8. *Bajo las hipótesis del teorema 3.7, existe un entero, mínimo, q_λ que si $n \geq q_\lambda$, entonces*

$$\mathcal{R}(T_\lambda^n) = \mathcal{R}(T_\lambda^{n+1}) = \dots.$$

Si $q_\lambda > 0$, entonces se tienen las siguientes inclusiones propias

$$\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}) \subset \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda - 1}) \subset \ldots \subset \mathcal{R}(T_\lambda^0).$$

Demostración. Las ideas son por completo similares a las dadas en la prueba del teorema 3.7. Para ver los detalles, consulte [1], capítulo 8. □

Teorema 3.9. *Sean $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto en un espacio normado X y $\lambda \neq 0$. Entonces los enteros r_λ del teorema 3.7 y q_λ del teorema 3.8 son iguales.*

Demostración. Primero se verá que $r_\lambda \geq q_\lambda$. Como

$$\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda + 1}) = \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}),$$

entonces $T_\lambda[\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})] = \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$, por lo tanto

$$y \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}) \Rightarrow y = T_\lambda x,$$

para algún $x \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$. Por demostrar que, para $x \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$; si $T_\lambda x = 0$, entonces $x = 0$. Suponga lo contrario, esto es, $x \neq 0$. Entonces

$$y = x \Rightarrow x = T_\lambda x_1 \text{ para algún } x_1 \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}),$$

de forma similar se llega a la conclusión que $x_1 = T x_2$ para $x_2 \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$ y de manera inductiva se puede generar la siguiente cadena de igualdades

$$0 \neq x = T_\lambda x_1 = T_\lambda^2 x_2 = T_\lambda^3 x_3 = \ldots = T_\lambda^n x_n,$$

pero $0 = T_\lambda x = T_\lambda^{n+1} x_n$ y por lo tanto $x_n \not in \mathcal{N}(T_\lambda^n)$ pero si ocurre que $x_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)^{n+1}$, lo que implica que $\mathcal{N}(T_\lambda^n) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1})$, como n es arbitrario, esta contención se cumple para todo n lo que da lugar a que

$$\{0\} \subset \mathcal{N}(T_\lambda) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^2) \subset \ldots \subset \mathcal{N}(T_\lambda^n) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{n+1}) \subset \ldots$$

donde todas las contenciones son propias, obteniendo así una contradicción al teorema 3.7. Así pues, si $x \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q\lambda})$ y

$$T_\lambda x = 0 \Rightarrow x = 0. \cdots (*)$$

Se probará a continuación que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda + 1}) = \mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda})$, por lo que se tendrá $r_\lambda \leq q_\lambda$, ya que r_λ es el entero mínimo que satisface la igualdad entre los espacios nulos de $T_\lambda^{r_\lambda + 1}$ y $T_\lambda^{r_\lambda}$. Por el teorema 3.6, se tiene que $\mathcal{N}(T_\lambda^q) \subset$

$\mathcal{N}(T_\lambda^{q+1})$. Se procede a probar la contención en el otro sentido. Suponga que para algún x_0

$$y = T_\lambda^{q_\lambda} x_0 \neq 0 \text{ pero } T_\lambda y = T_\lambda^{q_\lambda+1} x_0 = 0,$$

por lo tanto $y \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$, con $y \neq 0$ y $T_\lambda y = 0$, pero ello contradice $(*)$, haciendo $x = y$ y por lo tanto

$$\mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda+1}) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda}),$$

con lo que se tiene que $r_\lambda \leq q_\lambda$.

Se probará a continuación que $q_\lambda \leq r_\lambda$. Suponga que $q_\lambda > 0$, si $q_\lambda \geq 1$ el resultado es inmediato. De la definición de q_λ, se tiene que $\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}) \subset \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda-1})$ es una contención propia. Tome ahora $\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda} - 1) \setminus \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$, por lo que $y = T_\lambda^{q_\lambda-1} x$ para algún x. Note también que $T_\lambda y \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda+1})$ y por lo tanto, existe algún z tal que $T_\lambda y = T_\lambda^{q_\lambda+1} z$. Dado que $T_\lambda^{q_\lambda} z \in \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$ pero $y \notin \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda})$ se tiene que

$$T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) = y - T_\lambda^{q_\lambda} z \neq 0.$$

Así $x - T_\lambda z \notin \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda-1})$, lo que implica que $\mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda-1}) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{q_\lambda})$ de manera propia, es decir $q_\lambda \leq r_\lambda$ pues r_λ es el entero mínimo tal que

$$\mathcal{N}(T_\lambda^{r_\lambda}) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r_\lambda+1}).$$

Se concluye así que $q_\lambda = r_\lambda$. □

Definición. El mínimo entero r_λ tal que

$$\mathcal{N}(T_\lambda^{r_\lambda}) = \mathcal{N}(T_\lambda^{r_\lambda+1}) = \cdots$$

recibe el nombre de **ascenso** de T_λ. De existir tal entero se dice que T_λ tiene ascenso finito. Análogamente, el mínimo entero q_λ tal que

$$\mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda}) = \mathcal{R}(T_\lambda^{q_\lambda+1}) = \cdots$$

es llamado el **descenso** de T_λ. De existir tal entero se dice que T_λ tiene descenso finito.

Como consecuencia de los teoremas anteriores, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sean $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto en un espacio normado X. Entonces todo valor espectral $\lambda \neq 0$ de T (en caso de existir) es un valor propio de T.*

Demostración. Sea $\lambda \neq 0$ y suponga que λ no es un valor propio de T. Entonces $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$, es decir, T_λ es inyectivo. T_λ no puede ser invertible, puesto que $\lambda \in \sigma(T)$, por hipótesis. Como T_λ no es invertible, tampoco es sobreyectivo (ver el teorema de la inversa acotada, 1.4), por lo tanto $\mathcal{R}(T_\lambda) \subset X$. Pero combinando los teoremas 3.7, 3.8 y 3.9, se tiene una contradicción, pues

$$\{0\} = \mathcal{N}(T_\lambda),\ X \subset \mathcal{R}(T_\lambda)$$

y por tanto, el ascenso y descenso de T_λ difieren. La contradicción se originó al suponer que $\lambda \neq 0$ no es un valor propio, así pues, si $\lambda \in \sigma(T)$, entonces λ es un valor propio. □

Teorema 3.11. *Sean X un espacio normado, $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto, $\lambda \neq 0$ y $r = r_\lambda = q_\lambda$. Entonces X puede ser representado como*

$$X = \mathcal{N}(T_\lambda^r) \oplus \mathcal{R}(T_\lambda^r).$$

Demostración. Ver [1], capítulo 8. □

3.1.4. El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos

Se presenta el teorema espectral para operadores compactos, autoadjuntos y definidos en un espacio de Hilbert. Este teorema tiene aplicaciones en mecánica cuántica. La versión presentada viene en [9], pero el lector puede consultar también [11] o [4].

Teorema 3.12 (Teorema espectral para operadores compactos). *Sea $T \neq 0$ un operador compacto autoadjunto definido en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces existe un conjunto ortonormal de vectores propios $\{\phi_n\}$ de T , a lo más numerable, asociado a los correspondientes valores propios reales $\{\lambda_n\}$ y tal que*

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Demostración. Ver [9] capítulo 4 o [11] capítulo 8. □

Observación 3.3. Cabe mencionar aquí que una versión del teorema espectral para operadores compactos normales (i. e. $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H},\ TT^* = T^*T$) es presentada con detalle en la referencia [12] en el capítulo 3. En el mismo capítulo se presenta el caso general del teorema espectral, con su respectiva demostración.

3.2. La alternativa de Fredholm

Sean X un espacio de Hilbert y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto. Utilizando los resultados de la sección anterior se presenta el conocido teorema llamado la alternativa de Fredholm.

Teorema 3.13 (Alternativa de Fredholm). *Sean X un espacio normado y $T : X \longrightarrow X$ un operador lineal compacto. Entonces, para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, T_λ es inyectivo si y sólo si T_λ es sobre.*

Demostración. Suponga que T_λ es inyectivo, se mostrará que T_λ es sobre. La demostración se llevará a cabo por contradicción, supóngase pues que $\mathcal{R}(T_\lambda) \neq X$. Por la proposición y corolario anteriores, dado que T es compacto, se tiene que

$$X \supset \mathcal{R}(T_\lambda) \supset \mathcal{R}(T_\lambda^2) \supset \dots$$

con cada $\mathcal{R}(T_\lambda^r)$ subespacio cerrado. Aplíquese ahora el lema de Riesz (1.27): Para cada m existe un $x_m \in \mathcal{R}(T_\lambda^m)$ tal que $\|x_m\| = 1$ y $d(x_m, \mathcal{R}(T_\lambda^{m+1})) > \frac{1}{2}$. Sean m, n enteros positivos arbitrarios tales que $m < n$. Por hipótesis $\mathcal{R}(T_\lambda^m) \supset \mathcal{R}(T_\lambda^n)$, de aquí que para x_m, x_n como en el lema de Riesz se tiene que

$$\begin{aligned} Tx_n - Tx_m &= T_\lambda x_n + \lambda x_n - (T_\lambda x_m + \lambda x_m) \\ &= \lambda x_n + (T_\lambda x_n - T_\lambda x_m - \lambda x_m), \end{aligned}$$

nótese ahora que $x_m \in \mathcal{R}(T_\lambda^m)$ y por lo tanto $T_\lambda(x_m) \in \mathcal{R}(T_\lambda^{m+1})$ y, además por ser $m < n$ tanto x_n como $(T_\lambda x_n - T_\lambda x_m - \lambda x_m)$ son elementos de $\mathcal{R}(T_\lambda^{m+1})$. Sea

$$x = x_n + \frac{1}{\lambda}(T_\lambda x_n - T_\lambda x_m).$$

Por construcción $x \in \mathcal{R}(T_\lambda^{m+1})$, de ahí que

$$Tx_n - Tx_m = \lambda x - \lambda x_m = \lambda(x - x_m),$$

y así

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|\lambda x - \lambda x_m\| = |\lambda|\|x - x_m\| > \frac{1}{2}|\lambda|.$$

De lo anterior extraemos en particular que la sucesión $\{x_m\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, pero $\{Tx_m\}_{m=1}^{\infty}$ no puede ser una sucesión de Cauchy y por tanto no tiene una subsucesión convergente; de donde T no es compacto, lo que contradice una de las hipótesis. La contradicción se originó de suponer que $\mathcal{R}(T_\lambda) \neq X$, por lo tanto, no puede ocurrir que $\mathcal{R}(T_\lambda) \neq X$ y entonces T_λ es sobre.

Para probar la parte recíproca, supóngase que el operador T_λ es sobreyectivo; se probará que $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$. Para tal efecto, suponga,por el contrario, que T_λ no es inyectivo; así, existe $x_1 \in \mathcal{N}(T_\lambda) \setminus \{0\}$ y por ser T_λ sobre existe $x_2 \in \mathcal{D}(T_\lambda)$ tal que $T_\lambda x_2 = x_1$. Note ahora que $0 = T_\lambda(x_1) = T_\lambda(T_\lambda x_2) = (T_\lambda \circ T_\lambda)x_2 = T_\lambda^2 x_2$, es decir, $x_2 \in \mathcal{N}(T_\lambda^2)$. Repitiendo el argumento, para $r \geq 2$ podemos seleccionar un x_r tal que $T_\lambda x_r = x_{r-1}$ y como para un entero positivo k arbitrario $T_\lambda^k x = 0$ implica que $T_\lambda^{k+1} x = 0$, se deduce de inmediato que $\mathcal{N}(T_\lambda^k) \subset \mathcal{N}(T_\lambda^{k+1})$. Se afirma que la contención es propia, pues basta notar que

$$T_\lambda^{r-1} x_r = T_\lambda^{r-2} T_\lambda x_r = T_\lambda^{r-2} x_{r-1} = \ldots = T_\lambda x_2 = x_1 \neq 0,$$

es decir, $x_r \in \mathcal{N}(T_\lambda^r)$ pero $x_r \notin \mathcal{N}(T_\lambda^{r-1})$. Aplicando una vez más el lema de Riesz 1.27, es posible escoger un $x_k \in \mathcal{N}(T_\lambda^k)$ tal que

$$\|x_k\| = 1 \text{ y } \|x - x_k\| > \frac{1}{2} \text{ para todo } x \in \mathcal{N}(T_\lambda^{k-1}).$$

De ahí que, por construcción, la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada y, por ser T un operador compacto, la sucesión $\{Tx_k\}_{k=1}^{\infty}$ debe tener una subsucesión convergente $\{x_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, la cual es de Cauchy; pero, dados los enteros positivos m, n tales que $m > n$,

$$\|Tx_{k_m} - Tx_{k_n}\| = \|T_\lambda x_{k_m} + \lambda x_{k_m} - (T_\lambda x_{k_n} + \lambda x_{k_n})\| = \|\lambda x_{k_m} - \lambda x_{k_n}\|,$$

pues

$$T_\lambda x_{k_m} - T_\lambda x_{k_n} = 0, \text{ ya que } x_{k_m}, x_{k_n} \in \mathcal{N}(T_\lambda^{k_m}),$$

y por lo tanto

$$\|Tx_{k_m} - Tx_{k_n}\| > \frac{1}{2\lambda}$$

que es una contradicción al hecho de ser T compacto, la cual se originó al suponer que $\mathcal{N}(T_\lambda) \neq \{0\}$, así pues $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$ y por lo tanto T_λ es inyectivo, como se quería probar. □

Observación 3.4. Si se tiene un operador de la forma $T - \lambda I$ que es sobre e inyectivo no necesariamente se debe cumplir que T es compacto. El siguiente ejemplo está basado en una idea dada en la referencia [14]. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y $Y \subset X$ un subespacio cerrado de dimensión infinita. Sea $Z = X \oplus Y$ y sea $(Z, \| \|_Z)$, donde $\|(x,y)\|_Z = \|x\| + \|y\|$, el espacio de Banach resultante (ver [2], capítulo 3). Defínase $T : Z \longrightarrow Z$ como $T(x,y) = (y,0)$; note que $T \in \mathcal{B}(Z)$ y que T no es compacto: sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en X y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión generada mediante el lema de Riesz 1.27. Tal sucesión es acotada y no tiene una subsucesión convergente. Entonces, la sucesión $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada en Z. Sin embargo, $\{T(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} = \{(y_n, 0)\}_{n=1}^{\infty}$ no tiene una subsucesión convergente.

Por otra parte, para cualquier $\lambda \neq 0$, $T_\lambda(x,y) = 0$ si y sólo si $(x,y) = (0,0)$, es decir, $\mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$. Además T_λ es sobre: dado un $(x_0, y_0) \in Z$, haciendo

$$x = -\frac{x_0}{\lambda} - \frac{y_0}{\lambda^2},\ y = -\frac{y_0}{\lambda},$$

se tiene así que $T_\lambda(x,y) = (x_0, y_0)$. En general, los operadores que satisfacen las siguientes condiciones

a) $T - \lambda I$ tiene ascenso y descenso finito,

b) $\dim \mathcal{N}((T - \lambda I)^r) < \infty$ para $r = 1, 2, \ldots,$

c) $\mathcal{R}((T - \lambda I)^r)$ es cerrado, con codimensión finita para $r = 1, 2, \ldots,$

d) El conjunto $\lambda \in \sigma(T)$ consiste de valores propios de T con $\lambda = 0$ como único punto de acumulación;

reciben el nombre de **operadores de Riesz**. Para mayores detalles, el lector interesado puede consultar [14], capítulo 3.

El siguiente teorema es usado en la última sección del presente capitulo, para la definición de operadores Fredholm.

Teorema 3.14. *Sea X un espacio normado, T un operador compacto en X. Entonces,*

$$\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = \dim \mathcal{N}(T_\lambda^*) < \infty,$$

donde T_λ^* es el adjunto de Banach.

Demostración. Ver [5], capítulo 4 o el capítulo de introducción de [14]. $\square$

3.3. El espectro esencial

En la presente sección se hace un estudio del espectro esencial de un operador lineal T, no necesariamente autoadjunto, definido en un espacio de Banach X.

Es conocido (ver [4], en los comentarios de la sección 3.14) que hay diferentes definiciones de espectro esencial. Cuando estas son aplicadas en un espacio de Hilbert a un operador autoadjunto las definiciones coinciden, al menos las principales. Aunque la noción de espectro esencial tiene aplicaciones a operadores no acotados, en el presente trabajo se mantendrán los resultados presentados para operadores acotados. La relación del espectro esencial con operadores compactos, tema central de éste escrito, es que la definición del espectro esencial manejada se da en términos de operadores compactos.

En espacios de Hilbert, la definición de espectro esencial para un operador autoadjunto $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ es el conjunto de los puntos de acumulación del espectro de T, $\sigma(T)$, unión el conjunto de valores propios de multiplicidad infinita, ver [11]. El objetivo de ésta sección es estudiar una caracterización del espectro esencial para un operador acotado definido en un espacio de Banach, bajo ciertas condiciones.

Sea X un espacio de Banach definido sobre los complejos y $T : X \longrightarrow X$ un operador tal que $T \in \mathcal{B}(X)$ y con $\mathcal{D}(T) = X$. Entonces T es, en particular, un operador cerrado. Por otra parte, por el teorema 3.4, $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ y por lo tanto $\rho(T) \neq \emptyset$.

Definición. Sea X un espacio de Banach definido sobre los complejos y $T : X \longrightarrow X$ un operador tal que $T \in \mathcal{B}(X)$. Se define el **espectro esencial** de T como

$$\sigma_{ess}(T) = \bigcap_{K \in \mathrm{Com}(X)} \sigma(T + K)$$

Observación 3.5. La interpretación de la definición anterior es que el espectro esencial consta de los $\lambda \in \sigma(T)$ que no pueden ser removidos cuando se perturba a T con un operador compacto K. La definición es aplicable para operadores cerrados definidos densamente (es decir, no necesariamente acotados, ver [5], capítulo 7) en tal caso, el espectro es llamado **espectro esencial de Weyl**.

La definición de espectro esencial utilizada da como consecuencia directa el teorema de invarianza de Weyl para operadores acotados perturbados con un operador compacto.

Proposición 3.1. *Sea X un espacio de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X)$ y $K \in$ Com(X), entonces*

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T+K),$$

Demostración. Sean $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$. Por definición

$$\lambda \in \bigcap_{K \in \mathrm{Com}(X)} \sigma(T+K),$$

y así, para un $K_0 \in \mathrm{Com}(X)$ arbitrario,

$$\lambda \in \bigcap_{K \in \mathrm{Com}(X)} \sigma((T+K)+K_0) = \bigcap_{K \in \mathrm{Com}(X)} \sigma((T+(K+K_0))$$

pues $K + K_0 \in \mathrm{Com}(X)$ y por lo tanto $\lambda \in \sigma_{ess}(A+K_0)$, por ser K_0 arbitrario se tiene la contención

$$\sigma_{ess}(T) \subseteq \sigma_{ess}(T+K).$$

Para probar la otra contención, nuevamente de la definición, sea

$$\lambda \in \sigma_{ess}(T+S),$$

con $S \in \mathrm{Com}(X)$ arbitrario pero fijo, entonces

$$\lambda \in \bigcap_{K_0 \in \mathrm{Com}(X)} \sigma((T+S)+K_0).$$

Defínase $\hat{K}$ por $\hat{K} = K_0 - S$. Entonces, $\hat{K} \in \mathrm{Com}(X)$ y en particular

$$\lambda \in \sigma(T+S+\hat{K}) = \sigma(T+S+K_0-S) = \sigma(T+K_0).$$

El operador K_0 es arbitrario y compacto, entonces

$$\lambda \in \bigcap_{K_0 \in \mathrm{Com}(X)} \sigma(T+K_0) = \sigma_{ess}(T).$$

□

Ejemplo 3.1. El espectro esencial de un operador compacto autoadjunto, definido en un espacio de Hilbert de dimensión infinita, consta únicamente del 0.

Antes de dar una caracterización del espectro esencial que se presenta en este trabajo, será necesario dar algunas definiciones y probar unos resultados de tipo técnico.

Definición. Sea X un espacio normado. Se dice que los subespacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ de X son subespacios **algebraicamente complementarios** de X si

i) $X = \mathcal{M} + \mathcal{N}$,

ii) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{0\}$.

Cada $x \in X$ puede ser escrito de manera única como $x = w + z$, con $w \in \mathcal{M}$ y $z \in \mathcal{N}$. Los subespacios $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ se llaman **topológicamente complementarios**, o **complementarios**, si se satisface lo siguiente:

1. El isomorfismo natural dado por $(x, y) \mapsto x + y$ es un homeomorfismo,

2. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios cerrados y la proyección natural $\pi \mid \mathcal{N}$ es un homeomorfismo.

3. $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son subespacios cerrados y la proyección de X en $\mathcal{M}$ a lo largo de $\mathcal{N}$, definida por $Px = w$, resulta ser una proyección acotada.

Observación 3.6. Vale la pena mencionar aquí que las definiciones anteriores tienen como origen el llamado **problema del subespacio complementario**, el cual trata sobre qué subespacios cerrados $\mathcal{M}$ de un espacio de Banach X son complementarios, es decir, ¿Dado un subespacio cerrado $\mathcal{M} \subset X$, existe un subespacio cerrado $\mathcal{N}$ de X tal que $X = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$? una descripción general del problema puede ser leído en [22] y algunos comentarios también pueden encontrarse en [3], secciones 1.7, 5.1, 5.4.

En general, dado un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de un espacio de Banach X no siempre ocurre que sea complementario. Sin embargo, si el subespacio es de dimensión finita, es complementario.

Teorema 3.15. *Sean X un espacio normado y $\mathcal{N} \subset X$ un subespacio cerrado de dimensión finita. Entonces existe un subespacio cerrado X_0 de X tal que*

I) $X_0 \cap N = \{0\}$,

II) Para cada $x \in X$ existe un $w \in X_0$ y un $z \in \mathcal{N}$ tal que $x = w + z$. Tal descomposición es única.

Demostración. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base para $\mathcal{N}$. Es posible encontrar funcionales $f_1, f_2, \ldots, f_n$ en X^* tales que

$$f_j(x_k) = \delta_{jk}, \; 1 \leq j, k \leq n.$$

Sea X_0 el conjunto formado por aquellos $x \in X$ tales que $f_j(x) = 0$ para todo j. De la linealidad de los f_j, X_0 es un subespacio de X. Para probar que X_0 es cerrado, sea $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X_0 y tal que $w_n \to w$ en X. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_j(w_n) = f_j(w) \text{ para cada } j,$$

y por la definición de X_0, $f_j(w) = 0$ para todo $1 \leq j \leq k$, de donde $w \in X_0$.

Se afirma que $X_0 \cap \mathcal{N} = \{0\}$. La veracidad de la afirmación se desprende del hecho que si $x \in \mathcal{N}$, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$$

y por lo tanto $f_j(x) = \alpha_j$ para cada j. Por otra parte, si $x \in X_0$, $\alpha_j = 0$ para todo j. Para concluir la prueba, se probará que todo $x \in X$ puede ser escrito como $x = w + z$, con $w \in X_0$, $z \in \mathcal{N}$. Sean $x \in X$ y

$$z = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k.$$

Es claro que $z \in \mathcal{N}$. Más aún, $f_j(x - z) = f_j(x) - f_j(x) = 0$ para todo j, por lo tanto $x - z \in X_0$. Sea $w = x - z$, entonces

$$x = w + z, \text{ con } w \in X_0, z \in \mathcal{N};$$

como se quería. $\square$

Observación 3.7. Los funcionales $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ tales que

$$f_j(x_k) = \delta_{jk},\ 1 \leq j, k \leq n$$

se dice que son **biortogonales** a los $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ y el sistema $\{x_k; f_k\}_{k=1}^{n}$ recibe el nombre de **sistema biortogonal** en $X \times X^*$.

Definición. Un sistema $\{x_k; f_k\}_{k=1}^{n}$ biortogonal en $X \times X^*$ es llamado una **base de Auerbach** de X si $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ es una base de X y $\|x_j\| = \|f_j\| = 1$ para $1 \leq j \leq n$.

De Auerbach es el siguiente resultado (ver [7]):

Teorema 3.16. *Sea $\mathcal{N}$ un subespacio de un espacio de Banach X con base de Auerbach y tal que $\dim \mathcal{N} < \infty$. Entonces existe una proyección $P : X \longrightarrow \mathcal{N}$ tal que $\|P\| \leq \dim \mathcal{N}$.*

Demostración. Sean $\dim \mathcal{N} = n$ y $\{x_k; f_k\}_{k=1}^n$ la base de Auerbach de X. Cada elemento f_j del sistema de Auebach puede ser extendido a funcionales de norma uno en X. Sea $P : X \longrightarrow \mathcal{N}$ dado por

$$Px = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) x_k.$$

Es claro que P es una proyección para $x \in X$. Por otra parte, si $x \in X$ tal que $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|Px\| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k| \|x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

□

Definición. Sea X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y una sucesión $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ en X. Se dirá que la sucesión es una $W(T, \lambda)$-sucesión si satisface

(a) $\|w_n\| = 1$,

(b) $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ no tiene una subsucesión convergente,

(c) $(T - \lambda I)w_n \to 0$;

Se da a continuación un par de resultados que ayudan a identificar si un escalar λ está en el espectro esencial. Cabe mencionar aquí que los dos teoremas que siguen son una generalización del teorema de caracterización presentado en [6] (teorema 3.6.1).

Teorema 3.17. *Sean X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Si existe una $W(T, \lambda)$-sucesión en X, entonces $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$.*

Demostración. Suponga pues que se tiene en X una $W(T, \lambda)$-sucesión y, por el contrario, asuma que $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$. Entonces, por definición, existe un operador compacto $K \in \mathrm{Com}(X)$ tal que λ es elemento del conjunto resolvente de $T + K$, es decir,

$$\lambda \in \rho(T + K).$$

Ello implica que para tal λ el operador $R_\lambda(T + K)$ existe, es acotado y definido en todo X. Por lo tanto $(T + K)_\lambda$ es uno a uno (ya que $\mathcal{N}((T + K)_\lambda) = \{0\}$) y, dado que $(T + K)_\lambda \in \mathcal{B}(X)$, $(T + K)_\lambda$ es cerrado, por lo tanto, es acotado inferiormente, esto es, existe una constante C tal que

$$\|x\| \leq C \|(T + K)_\lambda x\|, \ x \in X.$$

Por ser K un operador compacto y la $W(T,\lambda)$-sucesión acotada (por la propiedad (a)), se cumple que la sucesión $\{Kw_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos, $\{Kw_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ de aquí que, dado un $\varepsilon > 0$ existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tales que, si $n_j, m_j \geq N(\varepsilon)$

$$\|Kw_{n_j} - Kw_{m_j}\| < \varepsilon.$$

De la condición (c) que satisface la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, para tal $\varepsilon > 0$, existe un entero $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $n_j \geq M(\varepsilon)$

$$\|T_\lambda w_{n_j}\| < \varepsilon$$

Con las condiciones anteriores, sea $N' = \text{máx}\{N(\varepsilon), M(\varepsilon)\}$, entonces, para $n_j, m_j \geq N'$

$$\begin{aligned}
\|w_{n_j} - w_{m_j}\| &\leq C\|(T+K)_\lambda(w_{n_j} - w_{m_j})\| \\
&= C(\|Tw_{n_j} - \lambda w_{n_j} + \lambda w_{m_j} - Tw_{m_j} + Kw_{n_j} - Kw_{m_j}\|) \\
&\leq C(\|Tw_{n_j} - \lambda w_{n_j}\| + \|Tw_{m_j} - \lambda w_{m_j}\| + \|Kw_{n_j} - Kw_{m_j}\|) \\
&< 3C\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pero ello dice en particular que la $W(T,\lambda)$-sucesión $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{w_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$, lo que contradice la propiedad (b). □

Teorema 3.18. *Sean X un espacio de Banach, $T \in \mathcal{B}(X)$. Si $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ y ocurre una de las siguientes posibilidades*

(I) $\dim \mathcal{N}(T_\lambda) = \infty$ *ó*

(II) $\dim \mathcal{N}(T_\lambda) < \infty$ *y* $T_\lambda[X_0] \subseteq X_0$*, donde* X_0 *es tal que*

$$X = \mathcal{N}(T_\lambda) \oplus X_0;$$

entonces existe una $W(T,\lambda)$-sucesión en X.

Demostración. Por hipótesis, $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$, así:

(I) Nótese que $\mathcal{N}(T - \lambda I)$ es un subespacio cerrado. Sea $x_1 \in \mathcal{N}(T_\lambda)$ y sea

$$\mathcal{M}_1 = \text{span}\{x_1\},$$

Ahora considere $x_2 \in \mathcal{N}(T_\lambda) \setminus \mathcal{M}_1$ y sea

$$\mathcal{M}_2 = \text{span}\{x_1, x_2\},$$

tanto $\mathcal{M}_1$ como $\mathcal{M}_2$ son subespacios de $\mathcal{N}(T_\lambda)$ y $\dim \mathcal{M}_i < \infty$ para $i = 1, 2$ y además $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$. Con este mismo proceso, considere

$$\mathcal{M}_k := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$$

donde cada $x_k \in \mathcal{N}(T_\lambda) \setminus \mathcal{M}_{k-1}$. Por construcción, cada $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{N}(T_\lambda)$ y es cerrado por ser un subespacio de dimensión finita para cada k, además $\mathcal{M}_m \subset \mathcal{M}_n$ si $m < n$; entonces, por el lema de Riesz 1.27, para cada n existe $w_n \in \mathcal{M}_n$ tal que $\|w_n\| = 1$ y $d(w_n, \mathcal{M}_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$. Note que la sucesión $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ satisface las propiedades $(a), (b)$ y (c) de una $W(T, \lambda)$-sucesión:

a) $\|w_n\| = 1$, por la aplicación de el lema de Riesz.

b) $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ no tiene una subsucesión convergente: basta observar que

$$\|w_n - w_j\| \geq \frac{1}{2}, \text{ para todo } j < k.$$

c) $(T - \lambda I)w_n \to 0$ pues cada $w_n \in \mathcal{N}(T_\lambda)$.

(II) Suponga ahora que $\dim \mathcal{N}(T_\lambda) < \infty$. Como $\mathcal{N}(T_\lambda)$ es un subespacio cerrado de X, existe un subespacio cerrado $X_0 \subset X$ tal que

$$X = X_0 \oplus \mathcal{N}(T_\lambda),$$

es decir, $\mathcal{N}(T_\lambda)$ es complementario en X. Se afirma que existe una $W(T, \lambda)$-sucesión en X. Tal sucesión $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ no puede tener una subsucesión convergente, pues de tener una, digamos $\{w_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ tal que $w_{n_k} \to w \in X_0$, se tendría que $\lim\limits_{k \to \infty} T_\lambda w_{n_k} = T_\lambda w$ y por la condición (c) de una $W(T, \lambda)$-sucesión, se tendría que $T_\lambda w = 0$ y por lo tanto $w = 0$, ya que $X_0 \cap \mathcal{N}(T_\lambda) = \{0\}$, de donde, por la condición (a),

$$1 = \lim_{k \to \infty} \|w_{n_k}\| = \|w\| = 0,$$

que es una contradicción. Suponga pues que tal sucesión no existe, y considere el operador T_λ restringido a X_0, i.e. $(T - \lambda I)\mid_{X_0}$. Note que T_λ es inyectivo en X_0 pues $\mathcal{N}(T_\lambda \mid_{X_0}) = \{0\}$, por lo que existe una constante C tal que

$$\|x\| \leq C\|T_\lambda x\| \text{ para } x \in X_0.$$

Obsérvese lo siguiente: para $x \in X$, por la equivalencia entre las normas $\| \|_P$ y $\| \|$ en X (ver sección 1.3.1, teorema 1.7) y dado que $(I-P)x \in X_0$

$$\begin{aligned}
\|x\| &\leq K(\|(I-P)x\| + \|Px\|) \\
&\leq K(C\|(T-\lambda I)(I-P)x\| + \|Px\|) \\
&\leq M(\|(T-\lambda I)(I-P)x\| + \|Px\|)
\end{aligned}$$

Donde M es una constante escogida de tal modo que la desigualdad se preserva, usando la propiedad arquimediana de los números reales. Defínase así $v = (T-\lambda I)x + Px$. Como $T_\lambda[X_0] \subseteq X_0$, v está expresado como un elemento de $X_0 + \mathcal{N}(T_\lambda)$. Nuevamente, utilizando la equivalencia de normas dadas en [4] se tiene que

$$\begin{aligned}
M(\|(T-\lambda I)(I-P)x\| + \|Px\|) &\leq DM\|v\| \\
&= DM\|(T-\lambda+P)x\|,
\end{aligned}$$

se tiene de lo anterior que $\lambda \in \rho(T+P)\mid_{X_0} \subseteq \rho(T+P)$ lo que contradice la hipótesis que $\lambda \in \sigma(T+P)$. La contradicción se originó de suponer que no existe una $W(T,\lambda)$ sucesión en X, por lo tanto existe al menos una de tales sucesiones, como se quería probar. $\square$

3.4. Operadores Fredholm

Si X es un espacio de Banach y $K \in \mathrm{Com}(X)$, en las secciones anteriores se probó que $K-\lambda I$ tiene rango cerrado (teorema 3.6) y que los subespacios $\mathcal{N}(T_\lambda)$ y $\mathcal{N}(T_\lambda^*)$ son de dimensión finita. Operadores que satisfacen tales condiciones forman la clase de los operadores de Fredholm. En la presente sección, a menos que se indique otra cosa, X, Y, Z serán espacios de Banach complejos.

Definición. Sean X, Y espacios de Banach. Un operador $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es **Fredholm** de X a Y si

a) $\alpha(T) = \dim \mathcal{N}(T) < \infty$,

b) $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y,

c) $\beta(T) = \dim Y/\mathcal{R}(T) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(T) < \infty$.

El conjunto de los operadores Fredholm de X a Y es denotado como $\Phi(X,Y)$.

Si $T \in \mathrm{Com}(X)$, es claro que $T_\lambda \in \Phi(X) = \Phi(X, X)$. En algunos textos, $\beta(T)$ recibe el nombre de **defecto** de T.

Definición. Se define el **índice** de un operador Fredholm T, denotado $i(T)$, como

$$i(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Definición. Dado un operador $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, se define el **Φ-conjunto** de T, como

$$\Phi_T := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \in \Phi(X, Y)\}.$$

Para continuar la exposición son necesarios los siguientes lemas.

Lema 3.1. *Sean X un espacio normado, $X_1 \subset X$ un subespacio cerrado y $M \subset X$ un subespacio de dimensión finita tal que*

$$M \cap X_1 = \{0\}.$$

Entonces,

$$X_2 = X_1 \oplus M$$

es un subespacio cerrado de X. Cada elemento $x \in X_2$ es escrito de manera única como $x = x_M + z, x_M \in M,\ z \in X_1$. El operador proyección $P : X_2 \longrightarrow M$ dado por $Px = x_M$ es acotado, i. e. $P \in \mathcal{B}(X_2)$.

Demostración. Por ser M de dimensión finita, tiene una base de Auerbach. Por el teorema 3.16, P es acotada en X_2. Para probar que X_2 es cerrado, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de X_2 tal que $x_n \to x \in X$. Como P es acotado en X_2, $\{Px_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Como P es compacto (por ser acotado y de rango finito) $Px_n \to Px \in M$. Por lo tanto, se tiene una sucesión $\{(I - P)x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X_1 y tal que $(I - P)x_n \to z \in X_1$. Así

$$Px_n + (I - P)x_n = x_n \to x = Px + (I - P)x \in X_2,$$

es decir, X_2 es cerrado. $\square$

Lema 3.2. *Sean X un espacio normado, $R \subset X$ un subespacio cerrado y tal que R^o es de dimensión finita n. Entonces, existe un subespacio n-dimensional $M \subset X$ tal que*

$$X = R \oplus M.$$

Demostración. Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n$ una base de R^o. Como R es cerrado, se tiene que $R = {}^o(R^o)$. Por definición $x \in R$ si y sólo si $f_j(x) = 0$ para cada j. Existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en X tales que $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (ver lema 4.14 de [5]). Los x_j son linealmente independientes, pues si

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0, \text{ entonces } f_i(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0,$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea M el subespacio n-dimensional de X generado por los x_j. Entonces

$$R \cap M = \{0\}$$

pues si $x \in (R \cap M) \setminus 0$ entonces $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ para algunos $\alpha_j \in \mathbb{C}$ pero, por la independencia lineal de los x_j, se tendría que $\alpha_j = 0$, de ahí que $M \cap R = \{0\}$. Por otra parte, sean $x \in X$ y

$$w = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) x_j.$$

Entonces, $w \in M$ y $f_j(x - w) = f_j(x) - f_j(x) = 0$ para cada j. Por lo tanto $x - w \in R$ y se tiene la descomposición deseada. □

De fundamental importancia para las pruebas siguientes es el teorema siguiente.

Teorema 3.19. *Sea $T \in \Phi(X, Y)$. Entonces*

(a) Existe un subespacio cerrado $X_0 \subset X$ tal que

$$X = X_0 \oplus \mathcal{N}(T)$$

(b) Existe un subespacio Y_0 de Y de dimensión $\beta(T)$ tal que

$$Y = \mathcal{R}(T) \oplus Y_0$$

(c) Existe un operador $T_0 \in \mathcal{B}(Y, X)$ tal que

i) $\mathcal{N}(T_0) = Y_0$

ii) $\mathcal{R}(T_0) = X_0$

iii) $T_0 T = I$ *en* X_0

iv) $T T_0 = I$ *en* $\mathcal{R}(T)$

Demostración. La parte (a) es probado en el teorema 3.15. La parte (b) se sigue de los lemas 3.1 y 3.2. Para (c), en $\mathcal{R}(T)$ se define T_0 como el inverso de T y $T_0 = 0$ en Y_0. Sólo resta probar que $T_0 \in \mathcal{B}(Y, X)$: esto es consecuencia del teorema de la gráfica cerrada 1.5, pues $\mathcal{R}(T)$ es un espacio de Banach, al ser cerrado y como $\mathcal{D}(T_0) = \mathcal{R}(T)$, T_0 es cerrado, por tanto $T_0 \in \mathcal{B}(Y, X)$. Como $T_0 = T^{-1}$ en $\mathcal{R}(T)$ se siguen las afirmaciones $i), ii), iii)$ y $iv)$. □

Lema 3.3. *El operador T_0 definido en el teorema anterior 3.19 satisface, adicionalmente,*

1) $T_0T = I - F_1$ *en* X,

2) $TT_0 = I - F_2$ *en* Y,

donde $F_1 \in \mathcal{B}(X)$ es tal que $\mathcal{R}(F_1) = \mathcal{N}(T)$ y $F_2 \in \mathcal{B}(Y)$ es tal que $\mathcal{R}(F_2) = Y_0$. Por lo tanto, F_1 y F_2 son operadores de rango finito.

Demostración. Sea $F_1 = I - T_0T$. Entonces $F_1 = I$ en $\mathcal{N}(T)$, pues dado $x \in \mathcal{N}(T)$ $F_1x = (I - T_0T)x = x$. Por otra parte, si $x \in X_0$, entonces $F_1x = (I - T_0T)x = 0$. Note que F_2 es entonces una proyección en $\mathcal{N}(T)$ y por el lema 3.1 es acotado, es decir $F_1 \in \mathcal{B}(X)$. Un razonamiento por completo análogo prueba 2). □

Teorema 3.20. *Suponga que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y asuma que existen operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(X, Y)$, $K_1 \in \mathrm{Com}(X)$, $K_2 \in \mathrm{Com}(Y)$ tales que*

(a) $T_1T = I - K_1$ *en* X,

(b) $TT_2 = I - K_2$ *en* Y.

Entonces, $T \in \Phi(X, Y)$.

Demostración. Se probará que T satisface la definición de un operador de Fredholm. Por el corolario 3.1, $\alpha(T) \leq \alpha(I - K) < \infty$, ya que $\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T_1T)$. De igual manera $\mathcal{R}(T) \supset \mathcal{R}(TT_2) = \mathcal{R}(I - K_2)$ y por lo tanto $\mathcal{N}(T^*) \subset \mathcal{N}(I - K_2)$ y así $\beta(T) \leq \alpha(I - K_2^*) < \infty$. Resta probar que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. Por el lema 3.2, es posible escribir

$$Y = \mathcal{R}(I - K_2) \oplus Y_1,$$

donde $Y_1 \subset Y$ es de dimensión finita y es tal que $\mathcal{R}(I - K_2) \cap Y_1 = \{0\}$. Sea $M = Y_1 \cap \mathcal{R}(T)$. Entonces

$$\mathcal{R}(T) = \mathcal{R}(I - K_2) \oplus M,$$

debido al lema 3.1. Por lo tanto, $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. □

Teorema 3.21. *Si $T \in \Phi(X,Y)$ y $S \in \Phi(Y,Z)$, entonces $ST \in \Phi(X,Z)$ y*

$$i(ST) = i(S) + i(T).$$

Demostración. Por el lema 3.3, existen $T_0 \in \mathcal{B}(X,Y)$, $S_0 \in \mathcal{B}(Y,Z)$, $F_1 \in \mathrm{Com}(X)$, $F_2, F_3 \in \mathrm{Com}(Y)$, $F_4 \in \mathrm{Com}(Z)$ tales que

$$T_0T = I - F_1 \text{ en } X,\ TT_0 = I - F_2 \text{ en } Y$$

y

$$S_0S = I - F_3 \text{ en } Y,\ SS_0 = I - F_4 \in Z;$$

por lo tanto

$$T_0S_0ST = T_0(I - F_3)T = I - F_1 - T_0F_3T = I - F_5 \text{ en } X,$$

y

$$STT_0S_0 = S(I - F_2)S_0 = I - F_4 - SF_2S_0 = I - F_6 \text{ en } Z,$$

donde $F_5 \in \mathrm{Com}(X)$ y $F_6 \in \mathrm{Com}(Z)$. Aplicando el teorema 3.20, se obtiene que $ST \in \Phi(X,Z)$. Resta probar que $i(ST) = i(S) + i(T)$. Considérese el espacio $Y_1 = \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{N}(S)$. Debido a los lemas 3.15 y 3.2es posible hallar subespacios Y_2, Y_3, Y_4 tales que

$$\mathcal{R}(T) = Y_1 \oplus Y_2,$$

$$\mathcal{N}(S) = Y_1 \oplus Y_3,$$

$$Y = \mathcal{R}(T) \oplus Y_3 \oplus Y_4,$$

donde Y_1, Y_3, Y_4 son subespacios de dimensión finita y Y_2 es cerrado. Sea $d_i = \dim Y_i$ con $i = 1, 3, 4$. Note que

$$\mathcal{N}(ST) = \mathcal{N}(T) \oplus X_1,$$

$$\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(ST) \oplus Z_4,$$

donde $X_1 \subset X_0$ es tal que $T[X_1] = Y_1$ y $Z_4 = S[Y_4]$. Se afirma, por la proposición 1.2, que

$$\dim X_1 = d_1,\ \dim Z_4 = d_4.$$

Se tiene, por lo anterior,

$$\alpha(ST) = \alpha(T) + d_1,$$

$$\beta(ST) = \beta(S) + d_4,$$

$$\alpha(S) = d_1 + d_3,$$

$$\beta(T) = d_3 + d_4.$$

de donde, de las dos últimas igualdades, $d_1 = \alpha(S) - d_3$, $d_4 = \beta(T) - d_3$. Sustituyendo en las dos primeras igualdades se obtiene

$$i(ST) = i(S) + i(T).$$ □

Corolario 3.2. *Sean $T \in \Phi(X,Y)$ y T_0 un operador que satisface 1) y 2) del lema 3.3. Entonces $T_0 \in \Phi(Y,X)$ y*

$$i(T_0) = -i(T).$$

Demostración. Por hipótesis,

$$T_0T = I - F_1, \text{ en } X, \; TT_0 = I - F_2 \text{ en } Y,$$

donde $F_1 \in \mathrm{Com}(X)$ y $F_2 \in \mathrm{Com}(Y)$. Aplicando el teorema 3.20 al operador T_0, se concluye que $T_0 \in \Phi(Y,X)$. Como consecuencia del teorema anterior, 3.21,

$$i(T_0) + i(T) = i(I - F_1) = 0,$$

y por lo tanto $i(T_0) = -i(T)$, como se quería demostrar. □

Teorema 3.22. *Si $T \in \Phi(X,Y)$ y $K \in \mathrm{Com}(X,Y)$, entonces $T + K \in \Phi(X,Y)$ y*

$$i(T + K) = i(T).$$

Demostración. Por el lema 3.3, existen $T_0 \in \mathcal{B}(Y,X)$, $F_1 \in \mathrm{Com}(X)$, $F_2 \in \mathrm{Com}(Y)$ tales que

$$T_0T = I - F_1 \text{ en } X, \; TT_0 = I - F_2 \text{ en } Y.$$

Así, por propiedades de los operadores compactos,

$$T_0(T + K) = (I - F_1) + T_0K = I - K_1 \text{ en } X$$

y

$$(T + K)T_0 = (I - F_2) + KT_0 = I - K_2 \text{ en } Y,$$

donde $K_1 \in \mathrm{Com}(X)$ y $K_2 \in \mathrm{Com}(Y)$. Aplicando el teorema 3.20, $T + K \in \Phi(X, Y)$. Ahora, por el teorema 3.21 se tiene que

$$i[T_0(T + K)] = i(T_0) + i(T + K) = i(I - K_1) = 0,$$

pues $K_1 \in \mathrm{Com}(X)$. Aplicando el corolario 3.2, $i(T_0) = -i(T)$ por tanto

$$i(T) = i(T + K),$$

finalizando así la demostración. □

Corolario 3.3. *Sean $T \in \mathcal{B}(X)$. Entonces, para todo $K \in \mathrm{Com}(X)$ se cumple que $\Phi_{T+K} = \Phi_T$ y, además*

$$i(T + K - \lambda I) = i(T - \lambda I) \text{ para todo } \lambda \in \Phi_T.$$

Demostración. Por el teorema anterior, 3.22, sólo hay que probar la igualdad $\Phi_{T+K} = \Phi_T$. Sea $\lambda \in \Phi_{T+K}$. Entonces, $T + K - \lambda I \in \Phi(X)$ y por lo tanto $T - \lambda I = T + K - \lambda I - K \in \Phi(X)$, lo que implica que $\lambda \in \Phi_T$, por lo tanto $\Phi_{T+K} \subseteq \Phi_T$. La otra contención es consecuencia directa del teorema anterior 3.22. □

Definición. Se define el siguiente conjunto en el plano complejo: Dado $T \in \mathcal{B}(X)$,

$$\Delta_4(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda I \in \Phi(X) \text{ y } i(T - \lambda I) = 0\}.$$

Observación 3.8. En general, dado un espacio de Banach X y un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ no acotado, se han definido conjuntos $\Delta_i(T)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ para familias relacionadas a los operadores Fredholm; esto con la finalidad de dar definiciones del espectro esencial de T

$$\sigma_{ess,i}(T) = \mathbb{C} \setminus \Delta_i(T), \; i = 1, 2, 3, 4, 5,$$

Mayor información puede ser encontrada en el artículo [21] así como en las respectivas referencias dadas en el mismo. El caso $i = 4$ corresponde al espectro esencial de Weyl.

Teorema 3.23. *Si $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$, entonces $\lambda \in \Phi_T$ y el $i(T - \lambda I) = 0$. Dicho de otra manera, $\sigma_{ess}(T) = \mathbb{C} \setminus \Delta_4(T)$.*

Demostración. Dado que, por hipótesis, $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$, entonces existe un $K \in \mathrm{Com}(X)$ tal que $\lambda \in \rho(T + K)$, es decir, existe $(T + K - \lambda)^{-1}$, lo que implica, por el teorema 1.4, que $\mathcal{N}(T + K - \lambda I) = \{0\}$ y $\mathcal{R}(T + K - \lambda I)$ es cerrado. Por el teorema 3.1, $\mathcal{R}(T+K-\lambda I) = \mathcal{D}((T+K-\lambda I)^{-1}) = X$ y por lo tanto $\beta(T+K-\lambda I) = 0$, así $i(T+K-\lambda I) = 0$. Por el teorema 3.22

$$T - \lambda I = T + K - \lambda I - K \in \Phi(X),$$

y por lo tanto $\lambda \in \Phi_T$. Por el corolario 3.3 se tiene el resultado. □

Observación 3.9. Como consecuencia directa del teorema 3.22 y la proposición anterior 3.23 se tiene otra prueba para el teorema 3.1, sobre la invarianza del espectro esencial bajo una perturbación compacta: Sea X un espacio de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X)$ y $K \in \mathrm{Com}(X)$, entonces

$$\sigma_{ess}(T) = \sigma_{ess}(T+K),$$

pues, por el corolario 3.3 y la proposición anterior 3.23 se tiene que $\Delta_4(T) = \Delta_4(T+K)$, para $K \in \mathrm{Com}(X)$, por lo tanto

$$\sigma_{ess}(T) = \mathbb{C} \setminus \Delta_4(T) = \mathbb{C} \setminus \Delta_4(T+K) = \sigma_{ess}(T+K).$$

Proposición 3.2. *Sea $\lambda \in \Phi_T$ y tal que $i(T-\lambda I) = 0$. Entonces $T - \lambda I$ cumple al alternativa de Fredholm.*

Demostración. Suponga $T - \lambda I$ es inyectivo, entonces $\mathcal{N}(T-\lambda) = \{0\}$ y por lo tanto $\dim \mathcal{N}(T-\lambda I) = 0$. Como por hipótesis, el índice es cero, se tiene que

$$0 = i(T-\lambda I) = \alpha(T-\lambda I) - \beta(T-\lambda I),$$

por lo tanto $\beta(T-\lambda I) = 0$. Como $\mathcal{R}(T-\lambda I)$ es cerrado, por ser Fredholm, entonces $\mathcal{R}(T-\lambda I) = X$.

Recíprocamente, suponga que $T - \lambda I$ es sobre. Entonces $\beta(T-\lambda I) = 0$ y nuevamente, como $i(T-\lambda I) = 0$ se tiene que $\alpha(T-\lambda I) = 0$ y por lo tanto $T - \lambda I$ es inyectivo. □

Apéndice A

Algunos resultados y definiciones de análisis y topología

Teorema A.1. *Sea X un un espacio métrico completo. Un subespacio $M \subset X$ es completo si y sólo si M es cerrado en X.*

Teorema A.2. *Dado un espacio vectorial normado X, entonces todo subespacio $Y \subset X$ de dimensión finita es completo.*

Teorema A.3. *Sea X un espacio vectorial normado de dimensión finita. Entonces, cualquier subconjunto $M \subset X$ es compacto si y sólo si M es cerrado y acotado.*

Teorema A.4. *Sean X, Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ un mapeo entre ellos. Entonces, f es continuo si y sólo si*

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

para cualquier subconjunto $A \subset X$.

Definición. Sean (X, d) un espacio métrico y $W \subset X$ un subconjunto no vacío. Se dice que W es **denso** en X si $\overline{W} = X$, esto es, si todo $x \in X$ es punto límite de elementos de W.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que X es separable si existe $M \subset X$ tal que M es denso en X y numerable.

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico.

- Sean B un subconjunto de X y un $\varepsilon > 0$ dado. Un conjunto $M_\varepsilon \subset X$ es llamado una ε-**red** (también llamada ε-**malla**) para B si para todo $z \in B$ existe un $x \in M_\varepsilon$ tal que $d(z, x) < \varepsilon$.
- El subconjunto $B \subset X$ se dice que es **totalmente acotado** si para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red $M_\varepsilon \subset X$ de cardinalidad finita para B.

Observación A.1. Que un subconjunto B de un espacio métrico sea totalmente acotado significa que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto B está contenido en la unión de una cantidad finita de bolas con radio ε.

La demostración del siguiente resultado puede ser consultado en [1], sección 8.2.

Teorema A.5. *Sean X un espacio métrico y $B \subset X$. Entonces*

i) *Si B es relativamente compacto, entonces B es totalmente acotado.*

ii) *Si B es totalmente acotado y X es un espacio métrico completo, entonces B es relativamente compacto.*

iii) *Si B es totalmente acotado, para todo $\varepsilon > 0$ existe una ε-red M_ε tal que $M_\varepsilon \subset B$.*

iv) *Si B es totalmente acotado, entonces B es separable.*

Teorema A.6 (Teorema de Arzela-Ascoli). *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ una familia equicontinua para la cual existe una constante $M > 0$ que satisface, para todo n, que $\|x_n\| \leq M$. Entonces, tal familia tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente.*

Bibliografía

[1] Kreyszig E. *Introductory functional analysis with applications. Estados Unidos de América: John Wiley and sons*

[2] Reed M., Simon B. *Methods of modern mathematical Physics I: Functional analysis. Reino Unido: Academic Press Inc (London)*

[3] Simon B. *Real Analysis, A comprehensive course in analysis, Part 1. Estados Unidos de América: AMS*

[4] Simon B. *Operator theory, A comprehensive course in analysis, Part 4. Estados Unidos de América: AMS*

[5] Schechter M. *Principles of functional Analysis. India: AMS*

[6] Schechter M. *Operator Methods in Quantum Mechanics. North-Holland: Elsevier*

[7] Fabian M., P.Habala, P. Hájek, V. Montesinos, V. Zizler *Banach Space Theory The Basis for Linear and Nonlinear Analysis. Canada: Springer-Verlag New York*

[8] Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. *An invitation to operator Theory. Estados Unidos de América: AMS*

[9] MacCluer B. *Elementary Functional Analysis. Estados Unidos de América: Springer-Verlag New York*

[10] Kress R. *Linear integral equations. : Springer-Verlag New York*

[11] Oliveira C. R. *Intermediate spectral theory and quantum dynamics. Alemania: Birkhäuser*

[12] Kubrusly C. S. *Spectral theory of Operators on Hilbert Spaces. Estados Unidos de América: Birkhäuser*

[13] Diestel J. *Sequences and series in Banach spaces. Estados Unidos de América: Springer-Verlag New York*

[14] Caradus S., Pfaffenberger W., Yood B. *Calkin Algebras and algebras of operators in Banach Spaces. Estados Unidos de América: Marcel Dekker Inc. New York*

[15] Davies E. B *Spectral Theory and differential operators. Gran Bretaña: Cambridge Studies in advanced Mathematics*

[16] Prieto de Castro C. *Topología Básica. México: FCE*

[17] Conway J. B. *A course in point set topology. India: Springer International Publishing*

[18] Enflo P. *(1973). A counterexample to the approximation problem in Banach spaces. Acta Math. Vol. 130, pp. 309-317.*

[19] Schechter M. *(1964, noviembre 30). Invariance of the essential spectrum. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 71, pp. 365-367.*

[20] Schechter M. *(1966, febrero). On the essential Spectrum of an arbitrary operator. Journal of Mathematical Analysis and applications, Vol. 13, pp. 205-215.*

[21] Gustafson K., Weidmann J. *(1969). On the essential Spectrum. Journal of Mathematical Analysis, Vol. 25, pp. 121-127.*

[22] Moslehian *(2006, junio 1). A survey of the complemented subspace problem. Trends in mathematics Information Center for Mathematical Science, Vol. 9, pp 91-98.*