

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
IIMAS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA EL ALUMNO:

SERGIO FUENTES MARTÍNEZ.

**" COEXISTENCIA DE TIPOS
ESPECTRALES PARA
OPERADORES
AUTOADJUNTOS "**

CIUDAD UNIVERSITARIA
Enero 2013

" POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU "

ÍNDICE

| | |
|---|-----|
| 1. Introducción | 3 |
| 2. Preliminares | 13 |
| 2.1 <i>EL OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE</i> | 13 |
| 2.2 <i>MEDIDA</i> | 14 |
| 2.3 <i>ANÁLISIS DE MEDIDAS</i> | 20 |
| 2.4 <i>FUNCIONES DE PICK</i> | 26 |
| 3. Resultado Principal | 30 |
| 4. Aplicaciones del resultado principal (Coexistencia de espectros) | 51 |
| 4.1 <i>APLICACIÓN 1: Construcción de una familia de medidas con partes singular y absolutamente continua no nulas a partir de una familia arbitraria de medidas puramente singulares.....</i> | 51 |
| 4.2 <i>APLICACIÓN 2: Generación de situaciones de espectro mixto a partir de medidas simples.....</i> | 54 |
| 4.3 <i>APLICACIÓN 3: Obtención de un componente singular de la medida sólo para la mitad de las constantes β consideradas</i> | 65 |
| 4.4 <i>APLICACIÓN 4: Método iterativo generador de situaciones de espectro mixto para operadores de Sturm-Liouville a partir de una medida simple</i> | 68 |
| 4.5 <i>APLICACIÓN 5: Relaciones integrales entre las medidas μ_β y ν_α</i> | 96 |
| 5. Apéndice | 99 |
| 6. Referencias | 101 |

1. INTRODUCCIÓN

Hay una relación estrecha entre los siguientes tres objetos matemáticos:

- Operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert,
- Funciones analíticas que transforman el semiplano superior en él mismo, llamadas funciones de Pick o de Herglotz,
- Medidas positivas.

Tal vez la manera más directa de ver éstas relaciones sea a través del teorema espectral.

Si $A : H \rightarrow H$ es un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert H separable o sabemos que para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (\mathbb{R} representa a los reales y \mathbb{C} a los complejos) existe $(A - z)^{-1}$ como operador acotado, entonces si $\varphi \in H$, sabemos por el teorema espectral que existe una medida μ_φ tal que

$$F_\varphi(z) := \langle \varphi, (A - z)^{-1} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\varphi(\lambda)}{\lambda - z}. \quad \text{La función } F_\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ es una función de Pick.}$$

Si $\varphi \in H$ es un vector cíclico para A , es decir, si las combinaciones lineales finitas de elementos de $\{A^n \varphi\}_{n=0}^\infty$ son densas en H entonces resulta que existe un operador unitario $U : H \rightarrow L^2(\mathbb{R}, d\mu_\varphi)$ tal que $(UAU^{-1}f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, es decir A es unitariamente equivalente al operador de multiplicación por la variable en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\varphi)$. El operador A en este caso, queda completamente descrito si se conoce la medida μ_φ .

Si consideramos la familia de operadores $A_\lambda = A + \lambda \langle \varphi, \bullet \rangle \varphi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, generados por perturbaciones de rango uno donde φ es un vector cíclico de A , entonces las funciones de Pick

$$F_\varphi^\lambda(z) = \langle \varphi, (A_\lambda - z)^{-1} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu_\varphi^\lambda(t)}{t - z} \text{ satisfacen relaciones del estilo } F_\varphi^\lambda(z) = f_\lambda(F_\varphi^0(z)), \text{ donde}$$

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{1 + \lambda z} \text{ que también es de Pick.}$$

Si φ es un vector cíclico para A , resulta que φ es un vector cíclico para A_λ y entonces para describir A_λ basta conocer $d\mu_\varphi^\lambda$ que es la medida que aparece en la representación integral de la función $F_\varphi^\lambda(z)$. Análogamente cuando se consideran problemas de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} |u &= -u'' + q(x)u(x), \\ \cos(\theta)u(0) + \sin(\theta)u'(0) &= 0, \quad \theta \in [0, \pi), \end{aligned}$$

que generan operadores en el espacio $L^2(\mathbb{R}^+)$, aparecen las funciones $m_\theta(z)$ de Weyl-Titchmarsh, funciones de Pick que juegan un papel análogo a la función $F_\varphi^\lambda(z)$ considerada arriba. En la

representación integral de las funciones $m_\theta(z)$ aparecen medidas μ_θ tales que el operador de Sturm-Liouville resulta ser unitariamente equivalente a la multiplicación por la variable en $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\theta)$ y es de interés poder describir éstas medidas μ_θ . Tanto las medidas μ_λ asociadas a $F_\varphi^\lambda(z)$ como las medidas μ_θ asociadas a $m_\theta(z)$, pueden verse como las medidas correspondientes a operadores generados por una perturbación de rango uno en el primer caso, o una perturbación introducida al cambiar condiciones de frontera, en el segundo caso. Entender cómo cambian μ_λ o μ_θ cuando los parámetros $\lambda \in \mathbb{R}$ o $\theta \in [0, \pi)$ varían, es equivalente a conocer cómo cambian los respectivos operadores bajo las perturbaciones mencionadas.

Usando el teorema de descomposición de Lebesgue sabemos que una medida μ_λ se puede descomponer en su parte absolutamente continua y en su parte singular, así $\mu_\lambda = \mu_\lambda^{ac} + \mu_\lambda^s$.

Es bien conocido en el caso de las perturbaciones que estamos considerando que la parte a.c. de las medidas es estable y que la parte singular es en general inestable.

Uno de los problemas centrales estudiados en ésta tesis está relacionado con saber si para un conjunto grande de $\lambda \in \mathbb{R}$ puede suceder que $\mu_\lambda^{ac} \neq 0$ y $\mu_\lambda^s \neq 0$, es decir, si la coexistencia de diferentes tipos espectrales es posible para ciertos conjuntos de $\lambda \in \mathbb{R}$.

Para esto se considera la composición de funciones de Pick y las medidas que aparecen en la representación integral de esta composición.

Este trabajo está organizado como sigue:

En el apartado 2: "Preliminares" se exponen las definiciones, teoremas y resultados conocidos, necesarios para el desarrollo subsecuente de todo el trabajo.

En el apartado 3: "Resultado Principal" se expone la parte medular de éste trabajo:

Tomamos una función de Pick $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ tal que $0 < \text{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) < \pi$ con $\mu_{\pi/2}$ como su medida asociada. Con ésta función generamos 2 familias de funciones de Pick de la siguiente manera:

1) con ayuda de la familia de funciones de Pick

$$f_\theta(z) = \frac{\cos(\theta) + z \sin(\theta)}{\sin(\theta) - z \cos(\theta)}, \quad z = x + iy, \quad y > 0, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2]$$

(para la cual se demuestran 3 propiedades importantes en la proposición 1), definimos, mediante una composición de funciones de Pick, otra familia de funciones de Pick:

$$K_{\mu_{\beta}}(z) = f_{\beta}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) = \frac{\cos(\beta) + K_{\mu_{\pi/2}}(z) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta)}, \quad 0 < \operatorname{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2],$$

con μ_{β} como la medida asociada a $K_{\mu_{\beta}}(z)$.

2) con ayuda de la función exponencial $\exp(z)$, $z = x + iy$, $0 < y < \pi$ generamos la función $K_{\nu_{\pi/2}}(z) = \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z))$ y con ella definimos, otra vez mediante una composición con la familia de funciones de Pick

$$f_{\theta}(z) = \frac{\cos(\theta) + z \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - z \cos(\theta)}, \quad z = x + iy, \quad y > 0, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2],$$

la familia

$$K_{\nu_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{\nu_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha}(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z))) = \frac{\cos(\alpha) + \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \cos(\alpha)},$$

$$\alpha \in (-\pi/2, \pi/2],$$

con ν_{α} como la medida asociada a $K_{\nu_{\alpha}}(z)$.

Una vez hecha tal construcción de familias de funciones de Pick, nuestro resultado principal, enunciado en el teorema 1, nos muestra de manera explícita la relación que guardan entre sí las partes singulares de las medidas μ_{β} y ν_{α} , a saber, si α y β son tales que $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta)))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, entonces $\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(E)$, para cada conjunto de Borel E . La demostración de éste teorema requiere de la demostración de la proposición 2 que nos indica que si $\exp(\operatorname{tg}(\beta)) > 0$, entonces $\alpha(\beta) \in (0, \pi/2)$, así como la de los lemas 1 y 2 que nos hablan respectivamente, de la igualdad de los soportes mínimos de las partes singulares de las medidas μ_{β} y ν_{α} , y de las respectivas representaciones en términos de $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ y $K_{\nu_{\pi/2}}(z)$ de las partes imaginarias de las funciones $K_{\mu_{\beta}}(z)$ y $K_{\nu_{\alpha}}(z)$:

$$\text{A) } \operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(z) = \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z)}{(\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta))^2 + (\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta))^2}$$

$$\text{B) } \operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(z) = \frac{\operatorname{Im} K_{\nu_{\pi/2}}(z)}{(\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{Re} K_{\nu_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha))^2 + (\operatorname{Im} K_{\nu_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha))^2}.$$

La demostración de nuestro resultado principal, se desarrolla en 3 etapas:

En la primera se demuestra que

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \alpha'(\beta), \quad \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x,$$

haciendo notar al final de la demostración, que la $\alpha'(\beta)$ es positiva y finita.

En la segunda etapa se prueba que

$$\lim_{\gamma \downarrow 0} \frac{\mu_\beta \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{v_\alpha \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = \alpha'(\beta), \quad \mu_\beta^s - \text{a. e. } x.$$

En la tercera etapa se muestra que para nuestras medidas μ_β y v_α tiene lugar el hecho de que siendo μ_β y v_α dos medidas regulares de Borel sobre \mathbb{R}^n , finitas sobre conjuntos acotados de Borel y tales que si $\mu_\beta(E) = \int_E f(x) dv_\alpha + \sigma(E)$, $\sigma \perp v_\alpha$ es la descomposición de μ_β en sus partes absolutamente continua y singular con respecto a v_α , entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu_\beta \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{v_\alpha \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = f(x), \quad v_\alpha - \text{a. e. } x, \quad \text{y } \sigma(A^c) = 0,$$

donde $A = \{ x : f(x) = 0 \text{ ó } f(x) = +\infty \}$, lo que en nuestro caso se traduce en que para x en el soporte mínimo de la parte singular de μ_β , tenemos que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu_\beta \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{v_\alpha \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = \alpha'(\beta)$, de

donde, en combinación con los resultados obtenidos en las 2 primeras etapas y de la igualdad de los soportes mínimos de las partes singulares de las medidas μ_β y v_α , se obtiene finalmente la aseveración de nuestro teorema principal, es decir, que $\mu_\beta^s(E) = \alpha'(\beta) v_\alpha^s(E)$, para cada conjunto de Borel E .

Una vez demostrado nuestro resultado principal, se demuestra (Teorema 1A) formalmente cómo en nuestro teorema 1 es posible sustituir la función $\exp(w)$ por la función $F(w) = aw$, $a > 0$, con $\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(a \text{tg}(\beta))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ o por la función $F(w) = w + c$, con c real y con $\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(c + \text{tg}(\beta))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ obteniendo la misma conclusión, es decir, que $\mu_\beta^s(E) = \alpha'(\beta) v_\alpha^s(E)$, para cada conjunto de Borel E . De hecho, en lugar de la función $\exp(w)$ en el teorema 1, se pueden utilizar otras funciones analíticas más generales.

En el apartado 4.1: "Aplicación 1: Construcción de una familia de medidas con partes singular y absolutamente continua no nulas a partir de una familia arbitraria de medidas puramente singulares", se muestra cómo a partir de una familia de medidas puramente singulares se puede construir una familia de medidas que tengan partes singular y absolutamente continua al mismo tiempo: Se considera cierto intervalo I y se toma una medida $v_{\pi/2}$ que sea puramente singular en éste intervalo I , es decir, $v_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y $v_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$. Después consideramos una función de Pick $K_{v_{\pi/2}}(z)$ tal que $\text{Im } K_{v_{\pi/2}}(z) > 0$, $z = x + iy$ con $y > 0$ y definimos con ella la función $K_{\mu_{\pi/2}}(z) = \log(K_{v_{\pi/2}}(z))$. Generamos, como antes, a las familias de

funciones $K_{\mu_{\beta}}(z) = f_{\beta}(K_{\mu_{\pi/2}}(z))$ y $K_{v_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{v_{\pi/2}}(z))$. Entonces, con ayuda de nuestro teorema 1, demostramos (teorema 2) que para cada subintervalo $J \subset I$ se tiene que $\mu_{\beta}^s(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ y $\mu_{\beta}^{ac}(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Así, dada una familia arbitraria de medidas puramente singulares $\{v_{\alpha}\}$, es posible construir una familia de medidas $\{\mu_{\beta}\}$ con partes singulares equivalentes a las de las medidas anteriores pero además con componentes absolutamente continuos no nulos.

En el apartado 4.2: " Aplicación 2: Generación de situaciones de espectro mixto a partir de medidas simples", se demuestra cómo medidas simples pueden generar situaciones de espectro mixto: Se considera un intervalo dado I y se toma un conjunto $E \subset I$, tal que para cada subintervalo $J \subset I$ se tenga que $0 < |E \cap J| < |J|$, donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue. Se considera la función $u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \in E^c, \end{cases}$ y se define la función

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu_{\pi/2}(\lambda),$$

donde $d\mu_{\pi/2} = u dx$. Se toma $\mu_{\pi/2}$ fuera de I tal, que se cumpla $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu_{\pi/2}(\lambda) < \infty$, o con el decaimiento necesario requerido por el teorema inverso de Gelfand - Levitan, con el propósito de obtener un problema de Sturm-Liouville. Ver [11]. Entonces nuestro teorema 1 nos permite demostrar (Teorema 3) que

- A) $\mu_{\beta}^s(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$,
- B) $\mu_{\beta}^{ac}(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I, \beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

En el teorema anterior se demuestra coexistencia para todas las β 's con excepción de una: $\beta = \pi/2$, así que para concluir el apartado, se muestra todo un análisis que nos lleva a la obtención de una familia de medidas μ_{β}^* que satisface las aseveraciones en los incisos A) y B) del teorema 3 para cada $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$ (¡ incluyendo $\pi/2$!) de modo que se construye una familia de medidas μ_{β}^* con partes absolutamente continua y singular para toda $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

En el apartado 4.3: "Aplicación 3: Obtención de un componente singular de la medida sólo para la mitad de las constantes β consideradas", se muestra que si multiplicamos la medida $\mu_{\pi/2}$ usada en el teorema 3 por una constante menor que 1, entonces obtendremos un componente singular de la medida sólo para la mitad de las constantes β consideradas: Se considera, como en el apartado 4.1, cierto intervalo I y se toma una medida $v_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y $v_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$. Se toma $K_{v_{\pi/2}}(z)$ una función de Pick del tipo que hemos venido considerando, es

decir, tal que $\text{Im } K_{\nu_{\pi/2}}(z) > 0$, $z = x + iy$ con $y > 0$ y se define la función $K_{\mu_{\pi/2}}(z) := \log(K_{\nu_{\pi/2}}(z))$. En el teorema 1 tomamos, en lugar de la función $F(w) = \exp(w)$, la función $F(w) = aw$ y definimos la función $K_{\nu_{\alpha}^*}(z) := f_{\alpha}(K_{\mu_{\pi/2}}(z))$, obteniendo entonces que $\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^{*s}(E)$ para cada conjunto de Borel E y donde $\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(a \text{tg}(\beta))$, $\alpha, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aplicando el teorema 2 inciso A, se sigue que $\mu_{\beta}^s(J) > 0$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, lo que, por la relación anterior y debido a que la derivada de α con respecto a β es positiva, nos indica que $\nu_{\alpha}^{*s}(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I$. Se considera ahora la función $K_{\gamma_{\beta^*}}(z) := f_{\beta^*}(\exp(K_{\nu_{\pi/2}}^*(z)))$, con $\beta^* \in (-\pi/2, \pi/2]$ y aplicando nuevamente nuestro teorema 1, se demuestra (teorema 4) que para la familia de medidas γ_{β^*} tenemos que $\gamma_{\beta^*}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ si y sólo si $\beta^* \in (0, \pi/2)$. Si $\beta^* \in (-\pi/2, 0]$, entonces γ_{β^*} tiene sólo parte absolutamente continua.

En el apartado 4.4: "Aplicación 4: Método iterativo generador de situaciones de espectro mixto para operadores de Sturm-Liouville a partir de una medida simple", se muestra cómo, utilizando el resultado del apartado anterior se puede desarrollar un método iterativo que nos genere situaciones de espectro mixto para operadores de Sturm-Liouville a partir de una medida simple: Se toma un intervalo $I = [0, 1]$ y se toma un conjunto $E \subset I$, tal que para cada subintervalo $J \subset I$ tengamos $0 < |E \cap J| < |J|$, donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

El método se desarrolla en 3 etapas:

En la primera etapa consideramos una función $u(x)$ tal que :

$$A) u(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \in E^c. \end{cases}$$

B) Se toma $d\mu_{\pi/2} = u dx$ y $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ la función asociada a ésta medida, como en la aplicación 2.

Tomamos μ_{β} y ν_{α} las familias de medidas como en el teorema 1 con $\alpha(\beta)$ y β relacionadas como ahí se indica. Entonces, por el teorema 1 y el teorema 4 (donde α juega el papel de β^*), se tiene que $\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(E)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, es decir, la partes singulares de las medidas son equivalentes: $\nu_{\alpha}^s \sim \mu_{\beta}^s$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$. A continuación, se genera la familia de medidas $\mu_{\pi/2}^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, de la siguiente forma: Definimos la medida $\mu_{\pi/2}^1 := (\pi/4)\nu_{-\pi/4}$, con su función de Pick asociada $K_{\mu_{\pi/2}^1}(z)$. Definimos la función $K_{\nu_{\pi/2}^1}(z) := \exp\{K_{\mu_{\pi/2}^1}(z)\}$ y con ella generamos la familia de funciones $K_{\nu_{\alpha}^1}(z) := f_{\alpha}(K_{\nu_{\pi/2}^1}(z))$, donde ν_{α}^1 es la familia de medidas asociadas a ésta familia de funciones. El siguiente paso es, con ayuda de ν_{α}^1 , definir la medida $\mu_{\pi/2}^2 := (\pi/4)\nu_{-\pi/4}^1$, con la que, siguiendo la misma idea que se

acaba de explicar, se genera la familia de medidas V_{α}^2 , tales que $K_{V_{\alpha}^2}(z) := f_{\alpha}(K_{V_{\pi/2}^2}(z))$. Repitiendo i veces el procedimiento, tendremos que, en general, $\mu_{\pi/2}^i = (\pi/4) V_{-\pi/4}^{i-1}$, para $i = 1, 2, 3, \dots$, con $V_{-\pi/4}^0 = V_{-\pi/4}$ (la original) y tales que $K_{V_{\pi/2}^i}(z) := \exp\{K_{\mu_{\pi/2}^i}(z)\}$. Se demuestra entonces (Lema 3) que si $\mu_{\pi/2}^i = (\pi/4) V_{-\pi/4}^{i-1}$, para $i = 1, 2, 3, \dots$, con $V_{-\pi/4}^0 = V_{-\pi/4}$ (la original), entonces $0 < \text{Im } K_{\mu_{\pi/2}^i}(z) < \pi/4$, $i = 1, 2, 3, \dots$.

Una vez hecha ésta construcción, se comienza con las iteraciones:

Primera iteración: Aquí se define, en dos etapas, una nueva medida, absolutamente continua, de la siguiente manera $\mu_{\pi/2}^1 = (\pi/4) V_{-\pi/4}$, para la cual se demuestra el cumplimiento de la relación $V_{\alpha^1}^{s \wedge + \pi/4}$, $\alpha^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$ y luego con su ayuda, se construye la función $K_{V_{\pi/2}^1}(z) = \exp\{K_{\mu_{\pi/2}^1}(z)\}$, donde, si α^1 es el subíndice de la familia generada por $V_{\pi/2}^1$, $\text{tg}(\beta^1) = \ln(\text{tg}(\alpha^1))$, $\beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$, $\alpha^1 \in (0, \pi/2)$. Aplicamos ahora nuestro teorema 1 y obtenemos que las partes singulares de las medidas $V_{\alpha^1}^1$ y $\mu_{\beta^1}^1$ son equivalentes, es decir, $V_{\alpha^1}^{1s} \sim \mu_{\beta^1}^{1s}$, donde $\beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$, lo que implica que $\alpha^1 \in (\arctg(1/e), \arctg(e))$. De este modo, se obtiene una familia de medidas $\{V_{\alpha^1}^1\}_{\alpha^1 \in (0, \pi/2)}$, tales que $V_{\alpha^1}^{1s}(J) > 0$ y $V_{\alpha^1}^{1a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\alpha^1 \in (\arctg(1/e), \arctg(e))$.

Segunda iteración: Con los mismos fundamentos utilizados en la primera iteración, aquí se define una nueva medida $\mu_{\pi/2}^2 = (\pi/4) V_{-\pi/4}^1$, obteniendo una familia de medidas $\{V_{\alpha^2}^2\}_{\alpha^2 \in (0, \pi/2)}$, tales que $V_{\alpha^2}^{2s}(J) > 0$ y $V_{\alpha^2}^{2a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\alpha^2 \in (\arctg(e^{-T(1)}), \arctg(e^{T(1)}))$, donde $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Tercera iteración: Análogamente se define una nueva medida $\mu_{\pi/2}^3 = (\pi/4) V_{-\pi/4}^2$, obteniendo ahora una familia de medidas $\{V_{\alpha^3}^3\}_{\alpha^3 \in (0, \pi/2)}$, tales que $V_{\alpha^3}^{3s}(J) > 0$ y $V_{\alpha^3}^{3a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\alpha^3 \in (\arctg(\exp\{-T^2(1)\}), \arctg(\exp\{T^2(1)\}))$, donde $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $T^2(x) = T(T(x))$.

Iteración $i+1$: Del mismo modo, se define la medida $\mu_{\pi/2}^{i+1} = (\pi/4) V_{-\pi/4}^i$, obteniendo una familia de medidas $\{V_{\alpha^{i+1}}^{i+1}\}_{\alpha^{i+1} \in (0, \pi/2)}$, tales que $V_{\alpha^{i+1}}^{i+1s}(J) > 0$ y $V_{\alpha^{i+1}}^{i+1a.c.}(J) > 0$ para todo

subintervalo $J \subset I$, siempre que $\alpha^{i+1} \in (\arctg(\exp\{-T(1)\}), \arctg(\exp\{T(1)\}))$, donde $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $T^i(x) = \underbrace{T(T(\dots(T(x))))}_{i \text{ - veces}}$.

Infinitésima Iteración (Si hacemos que $i \rightarrow +\infty$): En el límite al infinito, habremos entonces encontrado una familia de medidas $\{V_{\alpha^*}^*\}_{\alpha^* \in (0, \pi/2)}$, tales que $V_{\alpha^*}^{*s}(J) > 0$ y $V_{\alpha^*}^{*a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\alpha^* \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon)$, para toda $\varepsilon > 0$.

En la segunda etapa, después de hacer todas las iteraciones y el límite al infinito en la primera etapa y obtener la función de Pick $K_{V_{\pi/2}^*}(z)$, se muestra cómo hacer que ésta función corresponda

a algún operador de Sturm-Liouville: Se debe, en su representación de Pick, adicionar la constante necesaria C que haga que dicha representación corresponda, ahora sí, a algún operador de Sturm-Liouville. Se tiene entonces definida la función $K_{\phi_{\pi/2}}(z) = F(K_{V_{\pi/2}^*}(z)) = K_{V_{\pi/2}^*}(z) + C$. Se

definen, como en el teorema 1, las familias de medidas ϕ_η y $V_{\alpha^*}^*$ se define la función

$K_{\phi_{\pi/2}}(z) := F(K_{V_{\pi/2}^*}(z))$, donde $F(w) = w + C$, $C \in \mathbb{R}$, es decir $K_{\phi_{\pi/2}}(z) := F(K_{V_{\pi/2}^*}(z)) = K_{V_{\pi/2}^*}(z) + C$, con η y α^* relacionadas de la siguiente manera: $\text{tg}(\eta) = C + \text{tg}(\alpha^*)$,

$\eta, \alpha^* \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon)$, para toda $\varepsilon > 0$. Entonces, por el teorema 1A inciso B), se puede concluir que las partes singulares de las medidas son equivalentes, es decir, que $\phi_\eta^s \sim V_{\alpha^*}^{*s}$, y como

$\alpha^* \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon)$, entonces $\eta \in (\arctg(1 + C), \arctg(\frac{1 + \text{tg}(\varepsilon)}{1 - \text{tg}(\varepsilon)} + C))$,

si $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$. De este modo se obtiene una familia de medidas $\{\phi_\eta\}_{\eta \in (-\pi/2, \pi/2)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville, tales que $\phi_\eta^s(J) > 0$ y $\phi_\eta^{a.c.}(J) > 0$ para

todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta \in (\arctg(1 + C), \arctg(\frac{1 + \text{tg}(\varepsilon)}{1 - \text{tg}(\varepsilon)} + C))$, $C \in \mathbb{R}$.

En la tercera etapa se hace un análisis sobre cómo afectan los posibles valores y signos que pudiera adoptar la constante C que se utiliza en la etapa anterior: Se consideran los siguientes tres casos extremos para C :

Cuando $C \rightarrow -\infty$, se obtiene que, siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una familia de medidas $\{\xi_{\eta'}\}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = (-\pi + a, -\pi + a + \varepsilon]$, con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

Cuando $C \rightarrow -\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)}$, se obtiene que, siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una familia de

medidas $\{\xi_{\eta'}\}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = [-\pi/2 + a, -\pi/2 + a + \varepsilon)$, con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

Y finalmente, cuando $C \rightarrow \infty$, se obtiene que, siendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una familia de medidas $\{\xi_{\eta'}\}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = [\pi - a - \varepsilon, \pi - a)$, con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

Así, generalizando todos los casos anteriores e intermedios, se obtiene el resultado principal de éste apartado: Para $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe una familia de medidas $\{\xi_{\eta'}\}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = \pm[\pi - a - \varepsilon, \pi - a)$, (donde $-[b, c) = (-c, -b]$), con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

En el último de los apartados, el 4.5: "Aplicación 5: Relaciones integrales entre las medidas μ_β y ν_α ", se aplica el teorema 1 para encontrar 3 relaciones integrales (lema 3) que relacionan a las medidas μ_β y ν_α definidas en el mismo primer apartado de éste trabajo y que fueron objeto de estudio durante todo el desarrollo del mismo: Se toman las medidas μ_β y ν_α como en el teorema 1. Si α y β son tales que $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta)))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \text{A) } \int_{-\pi/2}^0 \mu_\beta^s(A) d\beta &= \int_0^{\pi/4} \nu_\alpha^s(A) d\alpha \\ \text{B) } \int_0^{\pi/2} \mu_\beta^s(A) d\beta &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \nu_\alpha^s(A) d\alpha \\ \text{C) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu_\beta^s(A) d\beta &= \int_0^{\pi/2} \nu_\alpha^s(A) d\alpha \end{aligned}$$

En el apéndice (Apartado 5) se presenta la demostración de la proposición 1 de nuestro trabajo, referente a las propiedades que tiene la función $f_\theta(z) = \frac{\cos(\theta) + z \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - z \cos(\theta)}$, $z = x + iy$, $y > 0$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$: Si $f_\theta(z)$ es la función justo antes definida, entonces se cumple que:

A) $f_{\beta}(f_{\alpha}(z)) = f_{\alpha+\beta-\pi/2}(z)$.

B) $f_{\theta}(z) = f_{\theta+\pi}(z)$

C) $f_{\pi/2}(z) = z$.

Finalmente, nuestro apartado 6: "Referencias", contiene las referencias bibliográficas que sirven como material teórico indispensable en la realización de ésta investigación.

Parte de los resultados obtenidos en esta tesis fueron publicados en los siguientes trabajos :

1. R. del Río, S. Fuentes, and A. Poltoratski, "*Families of Spectral Measures with Mixed Types*" *Operator Theory: Advances and Applications*, Vol. 132, 131-140 c 2002 Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland.
2. R. del Río, S. Fuentes and A. Poltoratski, "*Coexistence of Spectra in Rank-One Perturbation Problems*". *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3) Vol. 8, 2002.

2. PRELIMINARES

En éste capítulo se presentan los conceptos y resultados indispensables para el desarrollo de ésta tesis. El material presentado en cada sección fue tomado de las referencias que se mencionan al final del trabajo.

2.1 EL OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE (Ver [1], págs. 3-4.)

Definición 2.1 (*vector propio y valor propio* de un operador L) Sea L un operador lineal definido en un espacio vectorial H . Un vector $y \neq 0$ es llamado un *vector propio* de L si $Ly = \lambda y$, λ es el *valor propio* correspondiente de L .

Uno de los operadores frecuentemente usados en aplicaciones es

$$L = -(d^2/dx^2) + q(x),$$

donde $q(x)$ es una función real , localmente integrable en un intervalo $[a , b]$. El conjunto de elementos (o funciones) $y(x)$ que están en el dominio de L están determinados por condiciones de diferenciabilidad y por ciertas condiciones en los puntos extremos a y b .

Definición 2.2 (*problema de Sturm-Liouville*) El problema con condiciones de frontera

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y , \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha &= 0 , \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 , \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde α y β son dos números reales arbitrarios, es conocido como el *problema de Sturm-Liouville*.

Definición 2.3 (*Problema de Sturm-Liouville regular y singular*) Se dice que un problema de Sturm-Liouville es *regular* si el intervalo $[a , b]$ es finito y la función $q(x)$ es sumable en él. Si por el contrario, el intervalo $[a , b]$ es infinito, o si la función $q(x)$ no es sumable en el intervalo, o ambas cosas, se dice que el problema de Sturm-Liouville es *singular*.

Sin pérdida de generalidad se puede considerar el problema de frontera (2.1), (2.2) asumiendo que $a = 0$ y $b = \pi$. En efecto, el intervalo $[a , b]$ se mapea al intervalo $[0 , \pi]$ por medio de la sustitución $t = \frac{\pi(x-a)}{x-b}$, la cual no altera la forma del problema (2.1), (2.2).

Definición 2.4 (*valor propio y función propia* del problema de Sturm-Liouville (2.1), (2.2))
Si el problema de frontera tiene una solución no trivial $y(x, \lambda_1) \neq 0$ para cierta λ_1 , entonces λ_1 es un *valor propio* y $y(x, \lambda_1)$ es una *función propia* del problema (2.1), (2.2).

2.2 MEDIDA (Ver [2], págs. 6-11.)

La medida es una generalización de la idea de longitud.

Definición 2.5 (σ -álgebra) Una colección de subconjuntos de un conjunto dado X forma una σ -álgebra cuando

- i) los conjuntos X y el vacío \emptyset pertenecen a la colección,
- ii) para cualquier conjunto A de la colección, su complemento $A^c = X \setminus A$ también pertenece a la colección,
- iii) si $\{ A_n \}$ es una secuencia infinita de elementos de la colección, entonces la unión $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es también un miembro de la colección.

Definición 2.6 (*Medida*) Sea X un conjunto y sea A una σ -álgebra en X . Una *medida* en A es una función $\mu : A \rightarrow [0, \infty]$ que satisface:

- i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ para cada secuencia infinita $\{ A_n \}$ de conjuntos disjuntos que pertenecen a A . (Como $\mu(A_n)$ es no negativa para cada n , la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ siempre existe, ya sea como un número real o como $+\infty$).

Una medida asigna a cada conjunto A de la σ -álgebra un número real extendido no negativo $\mu(A)$ que es la *medida* del conjunto A . Decir que un número real es *extendido* significa que $\mu(A) = \infty$ es posible. La medida μ debe ser (contablemente) aditiva.

Más formalmente, una medida en un conjunto X es una función extendida real en una σ -álgebra de subconjuntos de X , que satisface

- i) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(A) \geq 0$ para todo A en la σ -álgebra (obviamente el punto ∞ adicionado a \mathbb{R} es considerado mayor que cualquier número real).

ii) si $\{A_n\}$ es una secuencia disjunta finita o numerable de conjuntos en la σ -álgebra (es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$), entonces

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n)$$

(en el lado derecho escribimos $\sum_n \mu(A_n) = \infty$ si y sólo si alguno de los conjuntos A_n tiene

medida ∞ o la secuencia $\{A_n\}$ es una secuencia infinita para la cual la serie $\sum_n \mu(A_n)$ diverge).

Definición 2.7 (Medida finita y σ -finita) La medida μ es finita si $\mu(X) < \infty$, y σ -finita si X es una unión de una cantidad numerable de conjuntos, cada uno de los cuales tiene medida finita.

Definición 2.8 (Conjuntos medibles) Usualmente en aplicaciones, X puede ser \mathbb{R} o \mathbb{R}^+ o \mathbb{R}^n . En general, no es posible asignar una medida a cada subconjunto de X , por lo que la σ -álgebra será la colección de conjuntos a los cuales se les puede asignar una medida, es decir, la colección de *conjuntos medibles*.

Definición 2.9 (Álgebra de Borel) En el caso $X = \mathbb{R}$ la σ -álgebra debería ser lo suficientemente grande para contener a todos los intervalos. Existe una σ -álgebra mínima con esta propiedad. Esta σ -álgebra es llamada *álgebra de Borel* y puede ser definida como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a los intervalos. Dicho de otro modo, es la σ -álgebra generada por la colección de todos los subconjuntos abiertos de \mathbb{R} .

El álgebra de Borel es una colección muy grande de conjuntos que contiene mucho más que simples uniones e intersecciones de un número contable de intervalos. Resulta difícil dar una caracterización precisa del álgebra de Borel; cualquier conjunto "normal" va a pertenecer a esta σ -álgebra, y de hecho, construir subconjuntos de \mathbb{R} que no pertenezcan al álgebra de Borel no es trivial.

Definición 2.10 (Conjunto de Borel) Todo conjunto que pertenezca al álgebra de Borel es llamado *conjunto de Borel*. Es de utilidad saber que todo conjunto abierto es un conjunto de Borel ya que cualquier conjunto abierto es la unión de un número contable de intervalos abiertos (disjuntos).

Definición 2.11 (Medida de Borel de un intervalo) La *medida de Borel* de un intervalo $(a, b]$ se define como la longitud del intervalo :

$$\mu\{(a, b]\} = b - a.$$

Como un solo punto tiene medida de Borel cero, es irrelevante que en ésta fórmula cerremos el intervalo en a o lo abramos en b .

Definición 2.12 (*Funciones medibles*) La función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una *función medible*, sí para cada α real el conjunto $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$ es medible, en otras palabras, la imagen inversa de cada intervalo abierto (α, ∞) debe ser medible.

Existen algunas formas equivalentes de enunciar ésta definición. Por ejemplo, los intervalos abiertos pueden ser reemplazados por intervalos cerrados $[\alpha, \infty)$, o por $(-\infty, \alpha)$ o $(-\infty, \alpha]$, o se puede simplemente decir que la imagen inversa de cada intervalo abierto debe ser medible. Sumas y productos de funciones medibles son medibles, así como el valor absoluto $|f|$ de cualquier función medible f , y también el producto de cualquier constante por una función medible f .

Una función $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es medible siempre que las partes real e imaginaria de f sean medibles.

Definición 2.13 (*Función característica*) Si A es cualquier conjunto medible, entonces la *función característica* $\chi_A(x)$ de A es:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A, \\ 0, & \text{si } x \notin A, \end{cases}$$

Ésta función característica de A es medible.

Definición 2.14 (*Función Borel-medible*) En el caso $X = \mathbb{R}$ con el álgebra de Borel, una función medible se dice que es *Borel-medible*. Ejemplos de funciones Borel-medibles son las funciones continuas, las funciones monótonas. Resulta complicado definir funciones que no sean Borel-medibles.

Definición 2.15 (*Medida de Borel-Stieltjes*) Ésta medida se define en el álgebra de Borel de la siguiente manera: Dada alguna medida μ en el álgebra de Borel, ponemos

$$\mu\{(a, b]\} = \rho(b) - \rho(a),$$

de modo que la función ρ está determinada de manera única, excepto por adición de una constante. Supongamos que todo intervalo finito tiene μ -medida finita, en cuyo caso ρ es una función real en vez de una función real extendida. Entonces ρ tiene dos propiedades

- i) $\rho(\lambda)$ es una función no decreciente de λ ,
- ii) $\rho(\lambda)$ es continua por la derecha, es decir

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho(\lambda + \varepsilon) = \rho(\lambda)$$

(La primera aseveración se sigue de que $\mu \geq 0$; la segunda se sigue del hecho de que $\mu\{ (a, b] \}$ converge a cero cuando b se aproxima a a). Y viceversa, dada cualquier función real ρ que satisfaga los puntos i) y ii) anteriores, se puede probar la existencia de una única medida μ en el álgebra de Borel que satisfaga la relación $\mu\{ (a, b] \} = \rho(b) - \rho(a)$ para los intervalos $(a, b]$. Existe entonces una correspondencia entre medidas sobre los subconjuntos de Borel de \mathbb{R} y las funciones que satisfacen las condiciones i) y ii) anteriores. Llamaremos a μ la medida de Borel-Stieltjes generada por la función ρ . La medida de Borel corresponde al caso especial $\rho(\lambda) = \lambda$.

Definición 2.16 (*Medida de Borel-Stieltjes estrictamente positiva*) Para una medida de Borel-Stieltjes, un sólo punto λ_0 tendrá medida estrictamente positiva si y sólo si la función $\rho(\lambda)$ es discontinua en el punto $\lambda = \lambda_0$. La medida del punto λ_0 está dada por

$$\mu\{ \lambda_0 \} = \rho(\lambda_0) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \rho(\lambda_0 - \varepsilon),$$

Definición 2.17 (*Puntos discretos de la Medida de Borel-Stieltjes*) Los puntos que tienen medida estrictamente positiva serán referidos como los puntos discretos de la medida. Para una medida de Borel-Stieltjes existen a lo más una cantidad numerable de puntos discretos.

Definición 2.18 (*Medida continua de Borel-Stieltjes*) Si no hay puntos discretos de la medida de Borel-Stieltjes, porque la función $\rho(\lambda)$ es continua, nos referiremos entonces a una medida continua.

Definición 2.19 (*Conjuntos de Medida de Borel-Stieltjes cero*) Cualquier conjunto numerable de puntos tiene medida de Borel cero. En forma más general, para cualquier medida continua de Borel-Stieltjes la medida de cualquier conjunto numerable de puntos es cero. Siempre habrá, sin embargo, muchos conjuntos no numerables de puntos que tengan medida cero.

Definición 2.20 (*Cumplimiento μ -casi siempre (μ -a.e.) de cierta propiedad P*) Una propiedad P se cumple μ -casi siempre (μ -a.e.) en \mathbb{R} si la propiedad se cumple para toda λ perteneciente a algún conjunto Σ y la medida μ del complemento de Σ es cero.

Definición 2.21 (*Medida completa*) Una característica de la medida de Borel que es en algunas ocasiones inconveniente, es que frecuentemente podemos encontrar subconjuntos de

conjuntos de medida cero que no son medibles. Nos gustaría poder decir que cualquier subconjunto de un conjunto de medida cero es medible y que tiene medida cero. Una medida con ésta propiedad es una medida *completa*, y la medida de Borel-Stieltjes no es completa.

Definición 2.22 (*Medida de Lebesgue-Stieltjes (extensión de una medida)*) Para que la medida de Borel-Stieltjes deje de no ser completa, deberemos agrandar la colección de conjuntos medibles, es decir, agrandando la σ -álgebra. Esto se hace aunando a la σ -álgebra original todos los conjuntos de la forma $\Sigma \cup \Sigma'$, donde Σ pertenece a la σ -álgebra original y Σ' es un subconjunto de algún conjunto de μ -medida cero. Se puede verificar que ésta colección agrandada de conjuntos constituye una σ -álgebra y utilizando la notación anterior extendemos la medida hacia una nueva σ -álgebra definiendo

$$\mu(\Sigma \cup \Sigma') = \mu(\Sigma).$$

Cualquier medida de Borel-Stieltjes extendida de ésta manera es llamada *medida de Lebesgue-Stieltjes* y es completa.

Hablaremos también de la medida de Lebesgue-Stieltjes generada por la función $\rho(\lambda)$. Note que, para estas medidas completas, la colección de conjuntos medibles depende mucho de la elección de la función $\rho(\lambda)$. Por ejemplo, si $\rho(\lambda)$ es constante sobre un intervalo abierto, entonces cualquier subconjunto de ese intervalo será medible, y claramente tendrá medida cero. Podemos decir que no hay contribución alguna a la medida por parte de los puntos de constancia de $\rho(\lambda)$.

Definición 2.23 (*Medida de Lebesgue*) La extensión de la medida de Borel se llama *medida de Lebesgue*.

Definición 2.24 (*Cumplimiento casi siempre (a. e.) de cierta propiedad P*) Una propiedad P se cumple casi siempre (a. e.) si la propiedad se cumple μ -casi siempre donde μ es la medida de Lebesgue (o equivalentemente donde μ es la medida de Borel).

Definición 2.25 (*Continuidad absoluta de una medida con respecto a otra medida*) En vista de la importancia del concepto de conjuntos de medida cero, una noción básica es la de continuidad absoluta de una medida con respecto a otra medida. Diremos que *la medida μ_1 es absolutamente continua con respecto a la medida μ_2* si cualquier conjunto que tenga μ_2 -medida cero también tiene μ_1 -medida cero, y escribiremos $\mu_1 \ll \mu_2$.

Definición 2.26 (*Medida absolutamente continua*) Una medida de Lebesgue-Stieltjes o de Borel-Stieltjes que es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue (respectivamente a la medida de Borel) se dice simplemente que es absolutamente continua.

Definición 2.27 (*Medidas equivalentes*) Si $\mu_1 \ll \mu_2$ y $\mu_2 \ll \mu_1$, entonces diremos que las dos medidas μ_1 y μ_2 son equivalentes. Cualesquiera dos medidas equivalentes tendrán la misma colección de conjuntos de medida cero, y la propiedad P se cumplirá μ_1 -a.e. si y sólo si se cumple μ_2 -a.e.

Definición 2.28 (*Singularidad de una medida con respecto a otra medida*) Un concepto relacionado al concepto de continuidad absoluta es la relación entre dos medidas que se obtiene cuando una medida es singular con respecto a la otra medida. Para dos medidas μ_1 y μ_2 definidas sobre subconjuntos de un conjunto X diremos que μ_1 es singular con respecto a μ_2 si existen dos conjuntos disjuntos Σ_1 y Σ_2 , con $X = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, donde

$$\mu_1(\Sigma_2) = 0, \quad \mu_2(\Sigma_1) = 0.$$

Como la relación es simétrica, podemos decir equivalentemente que μ_2 es singular con respecto a μ_1 o que μ_1 y μ_2 son mutuamente singulares. Podemos escribir $\mu_1 \perp \mu_2$.

Definición 2.29 (*Medida singular*) Una medida de Lebesgue-Stieltjes (o de Borel-Stieltjes) que sea singular con respecto a la medida de Lebesgue (respectivamente a la medida de Borel) se dice simplemente que es una medida *singular*.

Definición 2.30 (*Medida concentrada en un conjunto*) Diremos que una medida μ está concentrada en un conjunto Σ si la μ -medida del complemento $X \setminus \Sigma$ de Σ es cero. De las relaciones $\mu_1(\Sigma_2) = 0$, $\mu_2(\Sigma_1) = 0$, se desprende que la medida μ_1 será singular con respecto a la medida μ_2 si μ_1 está concentrada en Σ_1 y μ_2 está concentrada en Σ_2 , donde $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$. En otras palabras, medidas mutuamente singulares están concentradas en conjuntos mutuamente disjuntos.

Definición 2.31 (*Medida discreta*) Una medida μ es *discreta* si μ está concentrada en un conjunto finito o numerable de puntos (los puntos discretos de la medida). Tal medida será ciertamente singular, ya que este conjunto de puntos necesariamente tendrá medida de Lebesgue cero. Las medidas discretas no son, sin embargo, los únicos ejemplos de medidas singulares.

Definición 2.32 (*Medida singular continua*) Una medida continua que sea singular es descrita como una medida singular continua.

2.3 ANÁLISIS DE MEDIDAS (Ver [2] págs. 33-54).

Sean μ_1 y μ_2 dos medidas de Borel-Stieltjes. De la definición de continuidad absoluta se sigue que

$$\mu_1 \ll \mu_1 + \mu_2 .$$

Entonces el teorema de Radon-Nikodym nos garantiza la existencia de una función $(\mu_1 + \mu_2)$ -medible no negativa f , tal que, para cualquier conjunto de Borel E

$$\mu_1(E) = \int_E f(\lambda) d(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)) \quad (2.3.1)$$

donde ρ_1 y ρ_2 generan las medidas μ_1 y μ_2 respectivamente. Denotemos A al conjunto de Borel de las λ tales que $f(\lambda) < 1$. Denotemos también $\mu_1|_A$ a la restricción de μ_1 sobre el conjunto A , es decir, $(\mu_1|_A)(E) = \mu_1(A \cap E)$.

Sea E_ε El conjunto de las $\lambda \in E$ para las cuales $f(\lambda) < 1 - \varepsilon$. De (2.3.1) se sigue que, con $0 < \varepsilon < 1$

$$\mu_1(E_\varepsilon) = \int_{E_\varepsilon} f(\lambda) d(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)) \leq \int_{E_\varepsilon} (1 - \varepsilon) d(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)) = (1 - \varepsilon) (\mu_1(E_\varepsilon) + \mu_2(E_\varepsilon)) \quad (2.3.2)$$

Entonces

$$\mu_1(E_\varepsilon) \leq ((1 - \varepsilon) / \varepsilon) \mu_2(E_\varepsilon).$$

En particular, si $\mu_2(E) = 0$ entonces $\mu_1(E_\varepsilon) = 0$, así que

$$(\mu_1|_A)(E) = \mu_1\left(\bigcup_{\varepsilon} E_\varepsilon\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mu_1(E_\varepsilon) = 0.$$

Esto significa que $\mu_1|_A$ es absolutamente continua con respecto μ_2 .

Sea ahora F_ε el conjunto de las $\lambda \in E$ para las cuales $f(\lambda) \geq 1 + \varepsilon$. Entonces, como en (2.3.2), tendremos

$$\mu_1(F_\varepsilon) \geq (1 + \varepsilon) (\mu_1(F_\varepsilon) + \mu_2(F_\varepsilon)),$$

de donde tendremos que $\mu_1(F_\varepsilon) = \mu_2(F_\varepsilon) = 0$. Así que, casi siempre con respecto a μ_1 y μ_2 , tendremos que $f(\lambda) \leq 1$. Como los puntos λ para los cuales $f(\lambda) > 1$ no contribuyen al lado derecho de (2.3.1), podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que el complemento A^c de A consiste en aquellos puntos λ para los cuales $f(\lambda) = 1$. Tendremos entonces que

$$\mu_1(A^c) = \int_{A^c} f(\lambda) d(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)) \leq \int_{A^c} (1) d(\rho_1(\lambda) + \rho_2(\lambda)) = \mu_1(A^c) + \mu_2(A^c),$$

así que $\mu_2(A^c) = 0$.

Entonces $\mu_1|_{A^c}$ está concentrada en el conjunto A^c que tiene μ_2 -medida cero.

Obtenemos entonces una descomposición única de la medida μ_1 en sus partes absolutamente continua y singular

$$\mu_1 = \mu_1|_A + \mu_1|_{A^c},$$

donde las medidas en el lado derecho son respectivamente absolutamente continua y singular con respecto a μ_2 .

Una de las aplicaciones más importantes de ésta idea es la descomposición de una medida de Borel-Stieltjes μ en sus partes absolutamente continua y singular. En éste caso escribiremos

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s.$$

El componente singular μ_s puede, a su vez, ser descompuesto en sus partes singular continua μ_{sc} y discreta μ_d . De éste modo μ_{sc} es una medida singular que es también continua en el sentido de que a puntos simples les da medida cero o, lo que es lo mismo, $\mu_{sc}(a, x]$ es una función continua de x . Por otro lado, la componente discreta μ_d está concentrada en aquellos puntos (finitos o en número contable) que tienen medida estrictamente positiva. Tales puntos son llamados puntos discretos de la medida. Hablamos entonces de la siguiente descomposición

$$\mu_s = \mu_{sc} + \mu_d,$$

De ésta manera obtenemos la descomposición completa de la medida μ

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d. \tag{2.3.3}$$

La descomposición anterior nos permite escribir $\mathbb{R} = \Sigma_{ac} \cup \Sigma_{sc} \cup \Sigma_d$ donde los conjuntos Σ son conjuntos disjuntos de Borel en los cuales están respectivamente concentradas cada una de las componentes de la medida. Estos conjuntos de Borel no son únicos (por ejemplo un conjunto arbitrario de Lebesgue puede ser removido de Σ_{ac} e incorporado a Σ_{sc}); son útiles para mostrar que la descomposición (2.3.3) determina una partición de la recta real en conjuntos de puntos que pueden ser caracterizados respectivamente como absolutamente continuos, singular continuos

y discretos. El siguiente lema nos muestra una manera de describir ésta clasificación comparando la medida μ con la medida de Lebesgue ℓ .

Lema 2.3.1.

Sea μ una medida de Borel sobre \mathbb{R} , y sea \mathcal{L}_m un conjunto de Borel tal que para cada $\lambda \in \mathcal{L}_m$ y para $\delta > 0$ suficientemente pequeña (qué tan pequeña depende de λ),

$$\mu(\mathcal{J}) \leq m \ell(\mathcal{J}),$$

para cada subintervalo \mathcal{J} del intervalo $[\lambda - \delta, \lambda + \delta]$. Entonces

$$\mu(\mathcal{L}_m) \leq m \ell(\mathcal{L}_m),$$

Lema 2.3.2.

Diremos que $\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ es acotado, para alguna λ fija, si existe $m > 0$, que puede ser diferente para diferentes λ , tal que $\mu(\mathcal{J}_\lambda) \leq m \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ para todos los intervalos \mathcal{J}_λ que contengan λ y tales que $\ell(\mathcal{J}_\lambda) < \text{const}$. Diremos que el límite $\lim_{\ell(\mathcal{J}_\lambda) \rightarrow 0} (\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)) = c_\lambda$ si el límite existe y es el mismo para cualquier sucesión de intervalos $\mathcal{J}_\lambda^{(n)}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(\mathcal{J}_\lambda^{(n)}) = 0$.

Lo anterior es posible si y sólo si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu\{(\lambda, \lambda + \varepsilon]\}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu\{(\lambda - \varepsilon, \lambda]\}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mu\{(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon]\}}{2\varepsilon} = c_\lambda. \quad (2.3.4)$$

En otras palabras, para cualquier constante c la función $\mu\{(c, \lambda]\}$ debe ser diferenciable en el punto λ . Esta función es (localmente) de variación acotada y entonces es diferenciable para casi todos los valores de λ . Se sigue entonces que $\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ converge a un límite y por consiguiente, en particular, es acotada para casi toda λ .

Podemos ahora dar una caracterización local de los respectivos soportes de las medidas μ_{ac} y μ_s :

Teorema 2.3.1

Para una medida μ de Borel-Stieltjes sea \mathcal{L} el conjunto de valores de las λ en las cuales $\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ es acotado. Entonces

(i) La parte absolutamente continua de μ está dada por la restricción de μ sobre \mathcal{L} :

$$\mu_{ac} = \mu|_{\mathcal{L}}$$

μ_{ac} tiene una función de densidad $f(\lambda)$ dada, para casi toda λ , por

$$f(\lambda) = \lim_{\ell(\mathcal{J}_\lambda) \rightarrow 0} (\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)),$$

y cualquier conjunto de Borel de puntos λ para los cuales éste límite sea cero tiene μ -medida cero ;

(ii) La parte singular de μ está dada por la restricción de μ sobre el complemento de \mathcal{L} :

$$\mu_{ac} = \mu|_{\mathcal{L}^c}.$$

Más aún, la medida μ es singular (es decir $\mu = \mu_s$) si y sólo si

$$\lim_{\ell(\mathcal{J}_\lambda) \rightarrow 0} (\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)) = 0$$

para casi todos los valores de λ .

Este teorema nos da la condición necesaria y suficiente para que una medida sea singular, pero además nos da una condición suficiente para que la medida sea absolutamente continua. La condición es la siguiente, la medida μ es absolutamente continua si pasa que $\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ es acotado para todo valor de λ . Por otro lado, si $\mu(\mathcal{J}_\lambda) / \ell(\mathcal{J}_\lambda)$ es acotado para todo λ excepto un conjunto numerable de valores de λ , podemos deducir que $\mu_{sc} = 0$, ya que una medida singular continua restringida a un conjunto discreto de puntos debe anularse. En tal caso la medida μ se descompone en una parte absolutamente continua y otra parte discreta y nada más.

A menudo y específicamente para medidas relativas a operadores diferenciales de segundo orden, la información concerniente a una medida debe ser obtenida en forma indirecta con la ayuda de alguna transformada de la medida. Una de esas transformadas es la denominada *transformada de la resolvente*. A continuación se muestra cómo con ayuda de la transformada de la resolvente, y a través de su conexión con la resolvente de un operador autoadjunto, se puede obtener un análisis de la medida.

LA TRANSFORMADA DE LA RESOLVENTE

Consideremos una medida de Borel-Stieltjes μ sobre \mathbb{R} , generada por $\rho(\lambda)$, y supongamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\rho(\lambda) < \infty \quad (2.3.5)$$

La parte imaginaria de la transformada de la resolvente de μ es la función v de x y y , definida para $y > 0$ por

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda) \quad (2.3.6)$$

Nos interesa especialmente el límite de v cuando y tiende a cero. La expresión $\frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2}$ considerada como una función de x con λ fija, converge puntualmente a cero cuando y tiende a cero, excepto en el punto $x = \lambda$, en el cual la función diverge en el límite. Para valores pequeños de y tenemos una función que es pequeña excepto en la vecindad de $x = \lambda$, mientras que para todos los valores positivos de y tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} dx = [\tan^{-1}((x - \lambda)/y)]_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

En otras palabras, cuando y tiende a cero, la función $y / [(\lambda - x)^2 + y^2]$ se comporta como la función delta $\pi \delta(\lambda - x)$. En ese caso debemos esperar que, para una gran clase de funciones f ,

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(x)}{(\lambda - x)^2 + y^2} dx = \pi f(\lambda). \quad (2.3.7)$$

El siguiente lema nos indica que existen al menos tres sentidos en los cuales se justifica el límite en (2.3.7).

Lema 2.3.3.

1. La ecuación (2.3.7) tiene lugar para cualquier función continua f tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Más aún, para una f dada, la convergencia es uniforme con respecto a λ en este caso.

2. La ecuación (2.3.7) tiene lugar para cualquier función $f \in L^1(\mathbb{R})$, donde el límite se define en el sentido de la convergencia en la norma de L^1 .

3. La ecuación (2.3.7) tiene lugar para cualquier función $f \in L^2 (\mathbb{R})$, donde el límite se define en el sentido de la convergencia en la norma de L^2 .

Ahora bien, nos interesa saber a qué tiende la integral en el lado derecho de (2.3.6) cuando $y \rightarrow 0+$. Por lo estudiado anteriormente podríamos pensar que la integral en cuestión converge a $\pi d\rho(\lambda) / dx$ cuando $y \rightarrow 0+$ si el límite existe. Si esto es así, tomando de (2.3.4) la expresión final para $d\rho(\lambda) / d\lambda$, tendremos, para alguna x tal que $d\rho(x) / dx$ exista ,

$$\lim_{y \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda) = \pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{\mu\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon}. \quad (2.3.8)$$

Ésta igualdad se justifica con el siguiente lema

Lema 2.3.4.

Sea μ una medida de Borel-Stieltjes sobre \mathbb{R} , generada por la función $\rho(\lambda)$, y supongamos que (2.3.5) se cumple. Entonces, para una x dada,

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda)$ es acotada (para $0 < y < 1$) si y sólo si $\frac{\mu\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon}$ es acotado (para $0 < \varepsilon < 1$).

(ii) La igualdad en (2.3.8) se cumple en el sentido de que ambos límites existen y son iguales.

Veamos ahora lo que realmente representa la relación en (2.3.8). Sea μ una medida de Borel-Stieltjes, generada por la función $\rho(\lambda)$, y supongamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda| + 1} d\rho(\lambda) < \infty$$

Entonces, una función analítica en todo el plano complejo fuera del eje $\text{Im}(z) = 0$ puede ser definida por la fórmula

$$m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} d\rho(\lambda) \quad (2.3.9)$$

Poniendo $z = x + iy$, tendremos

$$\operatorname{Im}(m(z)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda) \quad (2.3.10)$$

$$\operatorname{Re}(m(z)) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - x}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda) \quad (2.3.10)'$$

Entonces la relación en (2.3.8) es una fórmula para el valor de frontera (valor límite) de la parte imaginaria de $m(z)$, cuando $z = x + iy$ tiende al eje real por arriba. Notemos que para una medida de Stieltjes dada, la condición (2.3.5) garantiza la convergencia de la integral en (2.3.10), pero no garantiza que la integral en (2.3.10)' sea finita; ésta última requiere la integrabilidad de $(|\lambda| + 1)^{-1}$.

En ocasiones resulta útil evaluar el valor de frontera (valor límite) de la parte real de $m(z)$. Para esto necesitaremos definir lo que es el valor principal de una integral. El valor principal de la integral de una función $\Phi(t)$ se define como

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{|t| > h} \Phi(t) dt,$$

es decir

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{-\infty}^{-h} \Phi(t) dt + \int_h^{\infty} \Phi(t) dt \right\}$$

A diferencia de la integral de Lebesgue, la cual requiere de integrabilidad absoluta, el valor principal de la integral permite cancelaciones entre contribuciones a la integral cerca de $t = 0$, de $t < 0$ y $t > 0$ respectivamente. Entonces

$$P \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{|t| > h} \frac{1}{t} dt = 0,$$

ya que el integrando es una función impar. El valor principal de la integral se define de forma similar para funciones con singularidades en otros puntos diferentes de $t = 0$. Por ejemplo, si consideramos la función $(t - 1)^{-1}(t^2 + 1)^{-1}$, veremos que es singular en el punto $t = 1$; definimos entonces

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t - 1)(t^2 + 1)} dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{|t-1| > h} \frac{1}{(t - 1)(t^2 + 1)} dt$$

En general, para un integrando con singularidad en el punto $t = a$, una forma conveniente de expresar el valor principal de la integral es

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) dt = \int_a^{\infty} (\Phi(t) - \Phi(2a - t)) dt ,$$

siempre y cuando la integral de la derecha exista en el sentido de Lebesgue.

Así pues, podemos ahora evaluar la parte real de $m(z)$ en el límite $\text{Im}(z) \rightarrow 0$. Este resultado se enuncia en el siguiente lema :

Lema 2.3.5.

Sea la función $m(z)$ dada por (2.3.9). Supongamos que, para una x dada, el valor de frontera (límite) $\lim_{y \rightarrow 0^+} m(x + iy) \equiv m_+(x)$ existe. Entonces

$$\text{Re}(m_+(x)) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - x}{(\lambda - x)^2 + y^2} d\rho(\lambda) = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - x} d\rho(\lambda).$$

2.4 FUNCIÓNES DE PICK (Ver [3], págs. 18-20)

Definición 2.33 (*Función de Pick*) Por clase de Pick entenderemos la clase de funciones $K(z) = U(z) + iV(z)$ analíticas en el semiplano superior con parte imaginaria positiva; entendiéndose que si $z = x + iy$, entonces $V(z) \geq 0$ si $y > 0$. La clase de Pick se denota con la letra P . Si una función pertenece a P , diremos que es una función de Pick. En otras palabras, $K(z)$ es una función de Pick si es una función holomorfa tal que $\text{Im}K(z) \geq 0$ para z en el semiplano superior y que transforma el semiplano superior sobre el mismo semiplano superior.

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE PICK

1. Las funciones de Pick forman un cono convexo, es decir, si a y b son números positivos y $K_1(z)$ y $K_2(z)$ son dos funciones en P , entonces la función $aK_1(z) + bK_2(z)$ es también una función de Pick.
2. La clase P es también cerrada bajo la composición: la función compuesta $(K_2 \circ K_1)(z) = K_2(K_1(z))$ es analítica para $y > 0$ y tiene ahí parte imaginaria positiva.

Como la función $-1/z$ está en P , se sigue que si $K(z)$ es de Pick, entonces también lo es $-1/K(z)$.

Sea $K(z) = U(z) + iV(z)$ una función de Pick la cual es real en alguna z en el semiplano superior. Es claro que entonces la función armónica positiva $V(z)$ se anula en ése punto y entonces, por la propiedad del valor principal de las funciones armónicas, $V(z) \equiv 0$ (idénticamente). De éste modo $K(z)$ es una constante real. Vemos entonces que una función de Pick no trivial, no es nunca real en el semiplano superior abierto.

Consideremos aquella determinación de la raíz cuadrada que es positiva sobre el semieje derecho: la función así obtenida es de Pick ya que el argumento de $K(z) = \sqrt{z}$ es la mitad del argumento de z y entonces, el número $K(z)$ está en el semiplano superior, más aún, el número $K(z)$ cae en el cuadrante superior derecho del plano complejo. Tales consideraciones hacen posible entender que para $0 < m < 1$, la función $K(z) = z^m$ es una función de Pick.

Se obtiene también una función de Pick si consideramos aquella determinación del logaritmo que es real sobre el semieje derecho: En el semiplano superior la parte imaginaria del logaritmo toma valores en el intervalo $[0, \pi]$.

La tangente es otra de las funciones de Pick fundamentales. Para convencernos de que realmente pertenece a P , tomemos las conocidas relaciones $\tan(x + iy) = \frac{\tan(x) + \tan(iy)}{1 - \tan(x)\tan(iy)}$ y $\tan(iy) = i \tanh(y)$ para obtener que $\tan(z) = \frac{\tan(x) + i \tanh(y)}{1 - i \tan(x) \tanh(y)}$. Se sigue entonces que la parte imaginaria está dada por $\tanh(y) \frac{1 + \tan^2(x)}{1 + \tan^2(x) \tanh^2(y)}$ es positiva si y lo es.

REPRESENTACIÓN INTEGRAL DE UNA FUNCIÓN DE PICK

Teorema 2.4.1

Una función $K(z)$ en la clase de Pick admite una única representación integral canónica de la forma

$$K(z) = \alpha z + \beta + \int \left[\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right] d\mu(\lambda)$$

donde $\alpha \geq 0$, β es real y $d\mu(\lambda)$ es una medida de Borel positiva sobre el eje λ -real, para la cual la integral $\int \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu(\lambda)$ es finita. Recíprocamente, toda función de ésta forma es de Pick.

TEOREMA DE FATOU.

Sea

$$V(z) = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2 + \gamma^2} d\mu(t), \quad \gamma > 0,$$

donde μ es una medida de Borel no negativa sobre $(-\infty, \infty)$, que satisface $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t) < \infty$.

Si $d\mu = Fdx + d\mu_s$ es la descomposición de Lebesgue de μ , entonces $\lim_{z \rightarrow x} V(z) = F(x)$ no tangencialmente a.e. sobre $(-\infty, \infty)$.

3. RESULTADO PRINCIPAL

Consideremos la familia de funciones de Pick

$$\text{Sea } f_{\theta}(z) = \frac{\cos(\theta) + z \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - z \cos(\theta)}, \quad z = x + iy, \quad y > 0, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2]. \quad (0)$$

Proposición 1:

Sea $f_{\theta}(z)$ la función definida en (0). Entonces :

A) $f_{\beta}(f_{\alpha}(z)) = f_{\alpha+\beta-\pi/2}(z)$.

B) $f_{\theta}(z) = f_{\theta+\pi}(z)$

C) $f_{\pi/2}(z) = z$.

La demostración de ésta proposición se realiza en el apéndice.

Sea $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ una función de Pick tal que $0 < \operatorname{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) < \pi$ y $\mu_{\pi/2}$ la medida asociada a ésta función.

Definamos una familia de funciones de Pick para cada $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$, de la siguiente manera

$$K_{\mu_{\beta}}(z) = f_{\beta}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)),$$

es decir

$$K_{\mu_{\beta}}(z) = f_{\beta}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) = \frac{\cos(\beta) + K_{\mu_{\pi/2}}(z) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta)}, \quad 0 < \operatorname{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)), \beta \in (-\pi/2, \pi/2], \quad (1)$$

donde μ_{β} denota la medida asociada a $K_{\mu_{\beta}}(z)$ de acuerdo con la representación integral de una función de Pick (ver **Teorema 2.4.1**). $K_{\mu_{\beta}}(z)$ es una función de Pick ya que se obtiene como la composición de funciones de Pick (ver [16]).

Consideremos ahora la función $\exp(z)$. Ésta función no es de Pick ya que cualquier franja de ancho 2π , por ejemplo de 0 a 2π , la transforma en todo el plano complejo y no en el semiplano superior como hace cualquier función de Pick. Para solucionar éste problema y poder utilizar la función exponencial en nuestro trabajo, vamos a tomar la función $\exp(z)$, $z = x + iy$ con

$0 < \gamma < \pi$, franja que la función $\exp(z)$ transforma en todo el semiplano superior. Definamos ahora la función

$$K_{V_{\pi/2}}(z) = \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \quad (2)$$

Ésta $K_{V_{\pi/2}}(z)$ es una función de Pick ya que $0 < \text{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) < \pi$.

Definamos la familia de funciones

$$K_{V_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{V_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha}(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z))) = \frac{\cos(\alpha) + \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \cos(\alpha)},$$

$$\alpha \in (-\pi/2, \pi/2], \quad (3)$$

donde v_{α} denota la medida asociada a $K_{V_{\alpha}}(z)$ de acuerdo con la representación integral para una función de Pick.

El siguiente teorema nos muestra de manera explícita la relación que guardan entre sí las partes singulares de las medidas μ_{β} y v_{α} .

Teorema 1:

Sean μ_{β} y v_{α} las medidas definidas por las relaciones (1) y (3). Si α y β son tales que

$$\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(\exp(\text{tg}(\beta))), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (4)$$

entonces

$$\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) v_{\alpha}^s(E),$$

para cada conjunto de Borel E .

Para la demostración del teorema necesitaremos los siguientes resultados

Proposición 2:

Para α y β tales que

$$\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(\exp(\text{tg}(\beta))), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

el que $\exp(\operatorname{tg}(\beta)) > 0$, implica que $\alpha(\beta) \in (0, \pi/2)$.

DEMOSTRACIÓN

Tenemos que $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta)))$, es decir $\operatorname{tg}(\alpha(\beta)) = \exp(\operatorname{tg}(\beta))$ siempre que $\alpha(\beta) \in (-\pi/2, \pi/2)$. Pero como $\exp(\operatorname{tg}(\beta)) > 0$, entonces $\operatorname{tg}(\alpha(\beta)) > 0$, lo cual sólo pasa cuando $\alpha(\beta) \in (0, \pi/2)$.

Q.E.D.

Lema 1:

Consideremos los siguientes conjuntos

$$S = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_\beta}(x+i\varepsilon) = \infty \},$$

$$\hat{S} = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\nu_\alpha}(x+i\varepsilon) = \infty \},$$

donde la relación entre α y β está dada por (4), es decir

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta))), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

entonces

$$S = \hat{S}.$$

DEMOSTRACIÓN

De la definición de $f_\theta(z)$ en (0), tenemos que

$$f_\beta(z) = \frac{\cos(\beta) + z \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - z \cos(\beta)}, \quad z = x + iy, \quad y > 0, \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2],$$

de donde, despejando z , se tiene

$$z = \frac{-\cos(\beta) + f_\beta(z) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) + f_\beta(z) \cos(\beta)}, \quad z = x + iy, \quad y > 0, \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2].$$

De la relación para $f_\beta(z)$, si $\beta \neq \pi/2$, se sigue que

$$f_\beta(z) \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad z \rightarrow \operatorname{tg}(\beta). \tag{5}$$

Usando lo anterior vemos que, para una $x \in S$ arbitraria, tendremos

$$K_{\mu_\beta}(z) \rightarrow +\infty,$$

$$\gamma \downarrow 0$$

sí y sólo sí, por (1) ,

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{\gamma \downarrow 0} \operatorname{tg}(\beta) ,$$

sí y sólo sí^{*)}, por (2) y (4)

$$\exp (K_{\mu_{\pi/2}}(z)) = K_{\nu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{\gamma \downarrow 0} \operatorname{tg}(\alpha) ,$$

sí y sólo sí, por (3) , (o bien de la relación (5))

$$K_{\nu_{\alpha}}(z) \xrightarrow{\gamma \downarrow 0} +\infty ,$$

lo que implica que $x \in \hat{S}$. De éste modo queda demostrado que $S = \hat{S}$.

Q.E.D.

De manera alternativa, podríamos sugerir la demostración siguiente para el mismo lema 1:

De las relaciones obtenidas para una $x \in S$ arbitraria en la demostración anterior, tenemos que los conjuntos S y \hat{S} se pueden escribir

$$S = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\beta}}(x+i\varepsilon) = \infty \} = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon) = \operatorname{tg}(\beta) \} \quad (6)$$

y

$$\hat{S} = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\nu_{\alpha}}(x+i\varepsilon) = \infty \} = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon)) = \operatorname{tg}(\alpha) \} . \quad (7)$$

De éste modo, si $x \in S$, por la continuidad de la función exponencial, por (6) y por la definición de α en (4),

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon)) = \exp(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon)) = \exp(\operatorname{tg}(\beta)) = \operatorname{tg}(\alpha).$$

^{*)} Aquí necesitamos considerar una rama de la función $\log(w)$, que es la inversa de la función $\exp(z)$, restringida a la franja $-\pi + \gamma < \operatorname{Im}(w) \leq \pi + \gamma$, donde $0 < \gamma < \pi$, con el objetivo de que, utilizando la continuidad del logaritmo, tenga sentido lo siguiente

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon))) = \log(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+i\varepsilon))) = \log(\operatorname{tg}(\alpha)) = \operatorname{tg}(\beta)$$

Así, por (7), si una $x \in S$, entonces necesariamente esa $x \in \hat{S}$, con lo que queda demostrado que $S \subseteq \hat{S}$.

Nos falta probar que $\hat{S} \subseteq S$. Haciendo la misma consideración que en la nota al pié de página de la página anterior, para la función $\log(w)$, podemos escribir que

$$K_{\mu_{\pi/2}}(x + i\varepsilon) = \log(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x + i\varepsilon))).$$

De la continuidad del logaritmo, de (7) y de la definición de α en (4), tenemos que, tomando el límite a ambos lados cuando $\varepsilon \downarrow 0$, $\forall x \in \hat{S}$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\pi/2}}(x + i\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \log(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x + i\varepsilon))) = \log(\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x + i\varepsilon))) = \log(\operatorname{tg}(\alpha)) = \operatorname{tg}(\beta)$$

Así, por (6), si una $x \in \hat{S}$, entonces necesariamente esa $x \in S$, con lo que queda demostrado que $\hat{S} \subseteq S$.

Por lo tanto concluimos que $\hat{S} = S$.

Q.E.D.

Los conjuntos S y \hat{S} son los soportes mínimos de las partes singulares de las medidas μ_β y ν_α respectivamente. Ver [10].

Lema 2:

Para las familias $K_{\mu_\beta}(z)$ y $K_{\nu_\alpha}(z)$ descritas en (1) y (3), se cumple

$$A) \operatorname{Im} K_{\mu_\beta}(z) = \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z)}{(\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta))^2 + (\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta))^2}$$

$$B) \operatorname{Im} K_{\nu_\alpha}(z) = \frac{\operatorname{Im} K_{\nu_{\pi/2}}(z)}{(\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{Re} K_{\nu_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha))^2 + (\operatorname{Im} K_{\nu_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha))^2}$$

DEMOSTRACIÓN

Poniendo $K_{\mu_{\pi/2}}(z) = a + ib$, $b \geq 0$, en (1), tendremos que

$$K_{\mu_\beta}(z) = \frac{\cos(\beta) + (a + ib) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - (a + ib) \cos(\beta)},$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(z) &= \frac{(\cos(\beta) + a \operatorname{sen}(\beta))(b \cos(\beta)) + (b \operatorname{sen}(\beta))(\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))}{(\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))^2 + (b \cos(\beta))^2} = \\ &= \frac{b}{(\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))^2 + (b \cos(\beta))^2} , \end{aligned}$$

que directamente nos da la afirmación A) del lema.

De manera análoga se obtiene la parte B) del lema.

Q.E.D.

Pasemos ahora a la demostración del Teorema 1, la cual constará de tres etapas :

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1 :

Primera etapa

Demostremos que

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \alpha'(\beta) , \quad \mu_{\beta}^S - a. e. x .$$

▲

Si $K_{\mu_{\pi/2}}(z) = a + ib$ y $K_{\nu_{\pi/2}}(z) = c + id$ en A) y B) del lema 2, tendremos

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \lim_{y \downarrow 0} \frac{b[(\operatorname{sen}(\alpha) - c \cos(\alpha))^2 + (d \cos(\alpha))^2]}{d[(\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))^2 + (b \cos(\beta))^2]} \quad (8)$$

Sabemos que el conjunto S es el soporte de μ_{β}^S , luego tenemos

$$K_{\mu_{\beta}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} +\infty , \quad \mu_{\beta}^S - a. e. x ,$$

entonces, por (1) ,

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\beta) , \quad \mu_{\beta}^S - a. e. x ,$$

(lo que implica que $\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0$, μ_{β}^S - a. e. x.),

de donde, por (2) y (4)

$$K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\alpha) , \mu_{\beta}^S - \text{a. e. x.}$$

(lo que implica que $\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0$, μ_{β}^S - a. e. x.).

$$\text{Así que } a = \operatorname{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\beta) , b = \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0 , \quad (9)$$

$$c = \operatorname{Re} K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\alpha) , d = \operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0 ,$$

todo μ_{β}^S - a. e. x.

Notemos lo siguiente ($|\cdot|$ significa el módulo de un complejo) :

$$\begin{aligned} & | \operatorname{sen}(\alpha) - K_{v_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha) |^2 = | \operatorname{sen}(\alpha) - (c + i d) \cos(\alpha) |^2 = \\ & = | \operatorname{sen}(\alpha) - c \cos(\alpha) - i d \cos(\alpha) |^2 = ([(\operatorname{sen}(\alpha) - c \cos(\alpha))^2 + (d \cos(\alpha))^2]^{\frac{1}{2}})^2 = \\ & = (\operatorname{sen}(\alpha) - c \cos(\alpha))^2 + (d \cos(\alpha))^2 . \end{aligned}$$

De forma análoga

$$\begin{aligned} & | \operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\beta) |^2 = | \operatorname{sen}(\beta) - (a + i b) \cos(\beta) |^2 = \\ & = | \operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta) - i b \cos(\beta) |^2 = ([(\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))^2 + (b \cos(\beta))^2]^{\frac{1}{2}})^2 = \\ & = (\operatorname{sen}(\beta) - a \cos(\beta))^2 + (b \cos(\beta))^2 . \end{aligned}$$

De éste modo, el límite (8) queda

$$\begin{aligned} & \lim_{y \downarrow 0} \frac{b | \operatorname{sen}(\alpha) - K_{v_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha) |^2}{d | \operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta) |^2} = \\ & = \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(x + iy)} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{| \operatorname{sen}(\alpha) - K_{v_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha) |^2}{| \operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta) |^2} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)}{\operatorname{Im} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy))} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|(\operatorname{sen}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)) \cos(\alpha))|^2}{|(\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy) \cos(\beta))|^2} \right) \quad (10)$$

Estudiamos el segundo de los límites en (10) :

$$\begin{aligned} \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|(\operatorname{sen}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)) \cos(\alpha))|^2}{|(\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy) \cos(\beta))|^2} \right) &= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\cos(\alpha) [\operatorname{tg}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy))]|^2}{|\cos(\beta) [\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)]|^2} \right) = \\ &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{tg}(\alpha) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy))|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)|^2} = \end{aligned}$$

lo que, por (4), nos da

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\exp(\operatorname{tg}(\beta)) - \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy))|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)|^2} = \\ &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)) - \exp(\operatorname{tg}(\beta))|^2}{|K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy) - \operatorname{tg}(\beta)|^2} = \end{aligned}$$

pero, por (1), tenemos que $K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\beta)$, μ_{β}^s -a. e. x., así que éste último límite nos representa la derivada de la exponencial con respecto a $\operatorname{tg}(\beta)$, así que la última relación, tomando el límite, queda, μ_{β}^s -a. e. x :

$$= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 |(\exp(\operatorname{tg}(\beta)))'|^2 = \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 (\exp(\operatorname{tg}(\beta)))^2 =$$

lo que, por (4), nos da finalmente

$$= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \operatorname{tg}^2(\alpha), \quad \mu_{\beta}^s \text{-a. e. x.}$$

Veamos ahora el primero de los límites en (10) :

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy)}{\operatorname{Im} \exp(K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy))} =$$

si $K_{\mu_{\pi/2}}(x+iy) = a+ib$, entonces

$$= \lim_{y \downarrow 0} \frac{b}{\operatorname{Im} \exp(a+ib)} =$$

pero $\operatorname{Im} \exp(a+ib) = \operatorname{Im} e^{a+ib} = \operatorname{Im} e^a e^{ib} = \operatorname{Im} e^a (\cos(b) + i \operatorname{sen}(b)) = e^a \operatorname{sen}(b)$, por lo que el límite queda

$$= \lim_{y \downarrow 0} \frac{b}{e^a \operatorname{sen}(b)} =$$

pero como $\lim_{y \downarrow 0} \frac{b}{\operatorname{sen}(b)} = 1$, entonces, por la relaciones (9) y por la relación (4), tendremos que el límite queda

$$= \frac{1}{\exp(\operatorname{tg}(\beta))} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}, \mu_{\beta}^s - a. e. x.$$

De éste modo nuestro límite (10) queda, finalmente, igual a

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \operatorname{tg}^2(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \quad (11)$$

Derivemos ahora $\alpha(\beta)$ en (4). Tenemos que

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta))), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

de donde

$$\alpha'(\beta) = \frac{1}{1 + \exp^2(\operatorname{tg}(\beta))} \exp(\operatorname{tg}(\beta)) \frac{1}{\cos^2(\beta)} =$$

pero, por (4), $\exp(\operatorname{tg}(\beta)) = \operatorname{tg}(\alpha)$, así que

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)} \operatorname{tg}(\alpha) \frac{1}{\cos^2(\beta)} = \frac{1}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}} \operatorname{tg}(\alpha) \frac{1}{\cos^2(\beta)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha)} \operatorname{tg}(\alpha) \frac{1}{\cos^2(\beta)} = \\
 &= \operatorname{tg}(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2. \tag{12}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de (11) y (12), obtenemos lo que queríamos demostrar en la primera etapa, es decir

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_\beta}(x+iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_\alpha}(x+iy)} = \alpha'(\beta), \quad \mu_\beta^s - \text{a. e. } x.$$

NOTA 1: La derivada $\alpha'(\beta)$ es positiva ($\alpha'(\beta) > 0$) y es finita ($\alpha'(\beta) < +\infty$).
 Demostremos esto :

Como, de (4), $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta)))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, tendremos lo siguiente :

A) De (12), $\alpha'(\beta) = \operatorname{tg}(\alpha) \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 = \frac{\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos^2(\beta)}$. Ahora bien, como

$\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, entonces $\cos(\beta) \neq 0$, por lo que $\cos^2(\beta) \neq 0$. Además sabemos que $|\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)| \leq 1$. Por lo tanto se concluye que $\alpha'(\beta)$ es finita, es decir, $\alpha'(\beta) < +\infty$.

B) Por el lema 0, tenemos que $\alpha \in (0, \pi/2)$, lo que implica que $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$ y $\cos(\alpha) > 0$. Además $\cos^2(\beta) > 0$. Por lo tanto la derivada $\alpha'(\beta) = (\operatorname{sen}(\alpha) \cos(\alpha)) / \cos^2(\beta)$ es positiva, es decir, $\alpha'(\beta) > 0$.

Segunda etapa

Probemos ahora que

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\mu_\beta \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{\nu_\alpha \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = \alpha'(\beta), \quad \mu_\beta^s - \text{a. e. } x. \tag{13}$$

Sabemos, por el resultado de la primera etapa, que :

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \alpha'(\beta) , \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x .$$

entonces, si demostramos que

$$\left| \frac{\text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon)}{\text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + i\varepsilon)} - \frac{\mu_{\beta}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{\nu_{\alpha}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}} \right| \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 , \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x ,$$

obtendremos directamente la aseveración (13).

Veamos entonces

$$\left| \frac{\text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon)}{\text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + i\varepsilon)} - \frac{\mu_{\beta}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{\nu_{\alpha}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}} \right| = \left| \frac{\text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon)}{\text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + i\varepsilon)} - \frac{\frac{\pi \mu_{\beta}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon}}{\frac{\pi \nu_{\alpha}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon}} \right| \quad (14)$$

Por [2] sabemos que, si los límites existen,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon) = \pi \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu_{\beta}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon} ,$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + i\varepsilon) = \pi \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\nu_{\alpha}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\}}{2\varepsilon} ,$$

así que, poniendo $h(\varepsilon) = \text{Im}K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon)$, podemos escribir

$$(\pi/2\varepsilon) \mu_{\beta}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} = h(\varepsilon) + o(\varepsilon), \text{ donde } o(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 .$$

Análogamente, si $g(\varepsilon) = \text{Im}K_{\nu_{\alpha}}(x + i\varepsilon)$, podemos escribir

$$(\pi/2\varepsilon) \nu_{\alpha}\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} = g(\varepsilon) + p(\varepsilon), \text{ donde } p(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0 .$$

De éste modo, de (14), tendremos que

$$\left| \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} - \frac{h(\varepsilon) + o(\varepsilon)}{g(\varepsilon) + p(\varepsilon)} \right| = \left| \frac{h(\varepsilon)[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)] - [h(\varepsilon) + o(\varepsilon)]g(\varepsilon)}{g(\varepsilon)[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)]} \right| =$$

$$= \left| \frac{h(\varepsilon)g(\varepsilon) + h(\varepsilon)p(\varepsilon) - h(\varepsilon)g(\varepsilon) - o(\varepsilon)g(\varepsilon)}{g(\varepsilon)[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)]} \right| = \left| \frac{h(\varepsilon)p(\varepsilon) - o(\varepsilon)g(\varepsilon)}{g(\varepsilon)[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)]} \right| =$$

pero sabemos que, μ_β^s - a. e. x ,

$$\begin{matrix} h(\varepsilon) \rightarrow \infty, & g(\varepsilon) \rightarrow \infty, & o(\varepsilon) \rightarrow 0, & p(\varepsilon) \rightarrow 0, \\ \varepsilon \downarrow 0 & \varepsilon \downarrow 0 & \varepsilon \downarrow 0 & \varepsilon \downarrow 0 \end{matrix}$$

$$(h(\varepsilon)/g(\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} \alpha'(\beta)$$

por lo que finalmente tendremos :

$$= \left| \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \left(\frac{p(\varepsilon) - \frac{o(\varepsilon)g(\varepsilon)}{h(\varepsilon)}}{[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)]} \right) \right| = \left| \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \left(\frac{p(\varepsilon)}{g(\varepsilon) + p(\varepsilon)} - \frac{o(\varepsilon)g(\varepsilon)}{h(\varepsilon)[g(\varepsilon) + p(\varepsilon)]} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \left(\frac{p(\varepsilon)}{g(\varepsilon) + p(\varepsilon)} - \frac{o(\varepsilon)}{h(\varepsilon)} \left(\frac{g(\varepsilon)}{g(\varepsilon) + p(\varepsilon)} \right) \right) \right| \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0, \mu_\beta^s - a. e. x ,$$

lo que da como resultado la afirmación (13). Demostración concluida. ▲

Tercera etapa

Nuestras funciones $K_{\mu_\beta}(z)$ y $K_{\nu_\alpha}(z)$ son de Pick, entonces, por [3] pág. 20, sabemos que tienen una única representación integral canónica de la forma:

$$K_{\mu_\beta}(z) = \eta z + \nu + \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_\beta(\lambda),$$

donde $\eta \geq 0$, ν es un real y $d\mu_\beta(\lambda)$ es una medida positiva de Borel sobre el eje λ -real, para la cual

$$\int \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu_\beta(\lambda) < +\infty .$$

Esta última relación implica que μ_β es una medida regular. (Análogo para ν_α).

Demostremos esto . (la demostración es análoga para ν_α) :

▲

Sea $I \subset \mathbb{R}$. Sea χ_I la función característica de I . Entonces existe una constante $C > 0$, tal que

$$+\infty > \int \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu_\beta(\lambda) > \int_I \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu_\beta(\lambda) > \int_I \frac{\chi_I}{C} d\mu_\beta(\lambda) > (1/C) \int_I 1 d\mu_\beta(\lambda) = (1/C) \mu_\beta(I),$$

lo que implica que $\mu_\beta(I) < +\infty$. Entonces, por [15] pág. 50, concluimos que μ_β es una medida regular. Demostración concluida.

▲

Consecuentemente, para nuestras medidas μ_β y ν_α , tiene lugar el siguiente resultado (ver [14] pág. 189-190) :

Sea E un conjunto acotado de Borel. Si μ_β y ν_α son dos medidas regulares de Borel sobre \mathbb{R}^n , finitas sobre conjuntos acotados de Borel y tales que si

$$\mu_\beta(E) = \int_E f(x) d\nu_\alpha + \sigma(E) , \quad \sigma \perp \nu_\alpha \quad (15)$$

es la descomposición de μ_β en sus partes absolutamente continua y singular con respecto a ν_α , entonces

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu_\beta \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{\nu_\alpha \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = f(x) , \quad \nu_\alpha - \text{a. e. } x. \quad (16)$$

y

$$\sigma(A^c) = 0, \quad (17)$$

donde

$$A = \{ x : f(x) = 0 \text{ ó } f(x) = +\infty \}.$$

Sabemos que el conjunto

$$S = \{ x \mid \lim_{\varepsilon \downarrow 0} K_{\mu_{\beta}}(x + i\varepsilon) = +\infty \}$$

es el soporte mínimo de la parte singular de la medida μ_{β} , ver [10], de modo que

$$\mu_{\beta}^S(E) = \mu_{\beta}(E \cap S). \quad (18)$$

En nuestro caso, para $x \in S$, por (13), tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\mu_{\beta} \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}}{\nu_{\alpha} \{ (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \}} = \alpha'(\beta),$$

de donde se sigue que, como $\alpha'(\beta) > 0$ y $\alpha'(\beta) < +\infty$ (ver nota 1), $S \cap A = \emptyset$, lo que implica que $S \subset A^c$ y como, por (17), $\sigma(A^c) = 0$, entonces $\sigma(E \cap S) = 0$ para cualquier E . Por esto, por (18) y (15) y ya que $\alpha'(\beta) = f(x)$, ν_{α} - a.e. x , obtenemos la siguiente relación

$$\mu_{\beta}^S(E) = \mu_{\beta}(E \cap S) = \int_{E \cap S} \alpha'(\beta) d\nu_{\alpha}(x) + \sigma(E \cap S) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}(E \cap S).$$

Como, por el lema 1, $S = \hat{S}$ y \hat{S} es el soporte mínimo de la parte singular de la medida ν_{α} , finalmente obtenemos

$$\mu_{\beta}^S(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^S(E),$$

lo que culmina la demostración del teorema.

Q.E.D.

En el teorema anterior es posible sustituir la función $\exp(w)$ por la función $F(w) = aw$, $a > 0$, con $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(a \operatorname{tg}(\beta))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, obteniendo la misma conclusión. Es posible también sustituir en el teorema anterior la función $\exp(w)$ por la función $F(w) = w + c$, con c real y con $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(c + \operatorname{tg}(\beta))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ y obtendremos de nuevo la misma conclusión. Este resultado lo enunciaré en el teorema 1A, cuya demostración es análoga a la del teorema 1. Veamos pues, de manera explícita, cómo es que podemos hacer éstos cambios :

A) Sea μ_{β} la medida definida por la relación (1).

Consideramos ahora, en lugar de la función $\exp(w)$, la función de Pick no constante $F(w) = aw$, $a > 0$, $w = x + iy$, $y \geq 0$ y definimos la función

$$K_{\nu_{\pi/2}}(z) = a K_{\mu_{\pi/2}}(z). \quad (19)$$

Esta $K_{V_{\pi/2}}(z)$ es también una función de Pick ya que es composición de funciones de Pick.

Y ahora definimos la familia de funciones

$$K_{V_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{V_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha}(a K_{\mu_{\pi/2}}(z)) = \frac{\cos(\alpha) + a K_{\mu_{\pi/2}}(z) \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) - a K_{\mu_{\pi/2}}(z) \cos(\alpha)}, \quad \alpha \in [0, \pi), \quad (20)$$

donde ν_{α} denota la medida asociada a $K_{V_{\alpha}}(z)$ de acuerdo con la representación integral para funciones de Pick (ver [3] pág. 20). $f_{\theta}(z)$ es la función definida en (0).

B) Sea μ_{β} la medida definida por la relación (1).

Consideramos ahora, en lugar de la función $\exp(w)$, la función de Pick no constante $F(w) = w + c$, $c \in \mathbb{R}$, $w = x + iy$, $y \geq 0$ y definimos la función

$$K_{V_{\pi/2}}(z) = K_{\mu_{\pi/2}}(z) + c. \quad (21)$$

Esta $K_{V_{\pi/2}}(z)$ es una función de Pick ya que es composición de funciones de Pick.

Y ahora definimos la familia de funciones

$$K_{V_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{V_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha}(K_{\mu_{\pi/2}}(z) + c) = \frac{\cos(\alpha) + (K_{\mu_{\pi/2}}(z) + c) \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) - (K_{\mu_{\pi/2}}(z) + c) \cos(\alpha)}, \quad \alpha \in [0, \pi), \quad (22)$$

donde ν_{α} denota la medida asociada a $K_{V_{\alpha}}(z)$ de acuerdo con la representación integral para funciones de Pick (ver [3] pág. 20). $f_{\theta}(z)$ es la función definida en (0).

Entonces, para los incisos A) y B) tendremos el siguiente teorema :

Teorema 1A:

A) Sean μ_{β} y ν_{α} las medidas definidas por las relaciones (1) y (20) respectivamente. Si α y β son tales que

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(a \operatorname{tg}(\beta)), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (23)$$

entonces

$$\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(E),$$

para cada conjunto de Borel E .

B) Sean μ_{β} y ν_{α} las medidas definidas por las relaciones (1) y (22) respectivamente. Si α y β son tales que

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(c + \operatorname{tg}(\beta)), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2), \quad (24)$$

entonces

$$\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(E),$$

para cada conjunto de Borel E .

DEMOSTRACIÓN

Primera etapa

Demostremos en ambos casos (inciso A) e inciso B) que

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \alpha'(\beta), \quad \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x.$$

▲

Tanto la función $F(w) = aw$, $a > 0$ del inciso A), como la función $F(w) = w + c$, $c \in \mathbb{R}$, del inciso B), cumplen, cada una en su caso, con las mismas condiciones que la función $\exp(w)$ utilizada en el teorema 1, es decir, tenemos que

$$K_{\mu_{\beta}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} +\infty, \quad \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x.,$$

entonces, por (1),

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\beta), \quad \mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x.,$$

(lo que implica que $\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0$, $\mu_{\beta}^s - \text{a. e. } x.$),

de donde, por (19) en el inciso A) ((21) en el inciso B)) y (23) en el inciso A) ((24) en el inciso B)),

$$K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} \operatorname{tg}(\alpha), \quad \mu_{\beta}^s - \text{a. e. x.}$$

(lo que implica que $\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z) \xrightarrow{y \downarrow 0} 0, \mu_{\beta}^s - \text{a. e. x.}$),

de modo que, haciendo el mismo análisis que en la demostración de la primera etapa de la demostración del teorema 1, tendremos, para cada uno de las incisos de éste teorema, lo siguiente :

Para el inciso A) :

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{v_{\alpha}}(x + iy)} &= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(x + iy)} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - K_{v_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} \right) = \\ &= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im}(a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy))} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Estudiamos el segundo de los límites en (25) :

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\cos(\alpha) [\operatorname{tg}(\alpha) - a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)]|^2}{|\cos(\beta) [\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)]|^2} = \\ &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{tg}(\alpha) - a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2} = \end{aligned}$$

lo que, por (23), nos da

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|a \operatorname{tg}(\beta) - a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2} = \\ &= \left(a \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2} = \end{aligned}$$

$$= a^2 \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2, \mu_\beta^s - a. e. x.$$

Veamos ahora el primero de los límites en (25) :

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\text{Im } K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\text{Im}(a K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy))}$$

Si $K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) = p + iq$, entonces

$$= \lim_{y \downarrow 0} \frac{q}{\text{Im}(a(p + iq))} =$$

pero $\text{Im}(a(p + iq)) = \text{Im}(ap + iaq) = aq$, por lo que el límite queda

$$= \lim_{y \downarrow 0} \frac{q}{aq} = \frac{1}{a}, \mu_\beta^s - a. e. x.$$

De éste modo nuestro límite (25) queda, finalmente, igual a

$$\frac{1}{a} a^2 \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 = a \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \quad (26)$$

Derivemos ahora $\alpha(\beta)$ en (23). Tenemos que

$$\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(a \text{tg}(\beta)), \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

es decir,

$$\text{tg}(\alpha(\beta)) = a \text{tg}(\beta)$$

de donde, derivando con respecto a β , tendremos

$$\sec^2(\alpha(\beta)) \alpha'(\beta) = a \sec^2(\beta),$$

lo que finalmente nos da que

$$\alpha'(\beta) = a \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2. \quad (27)$$

Por lo tanto, de (26) y (27), obtenemos lo que queríamos demostrar en la primera etapa para el inciso A), es decir

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} = \alpha'(\beta) , \mu_{\beta}^s - a. e. x .$$

NOTA 2: La derivada $\alpha'(\beta)$ es positiva ($\alpha'(\beta) > 0$) y es finita ($\alpha'(\beta) < +\infty$). Demostremos esto :

Como, de (23), $\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(a \operatorname{tg}(\beta))$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, tendremos lo siguiente :

De (27), $\alpha'(\beta) = a \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2$. Ahora bien, como $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, entonces, $\cos(\beta) \neq 0$, por lo que $\cos^2(\beta) \neq 0$. Además sabemos que $|\cos(\alpha)| \leq 1$. Por lo tanto se concluye, ya que a es finita, que $\alpha'(\beta)$ es finita, es decir, $\alpha'(\beta) < +\infty$.

Por (23), tenemos que también $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, lo que implica que $\cos(\alpha) > 0$. Además sabemos que $|\cos(\beta)| \leq 1$. Por lo tanto se concluye, ya que a es positiva, que la derivada $\alpha'(\beta) = a \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2$ es positiva, es decir, $\alpha'(\beta) > 0$.

Para el inciso B):

$$\begin{aligned} \lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\beta}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\alpha}}(x + iy)} &= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_{\pi/2}}(x + iy)} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - K_{\nu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} \right) = \\ &= \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c)} \right) \left(\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - (K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} \right) \quad (28) \end{aligned}$$

Estudiamos el segundo de los límites en (28) :

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{sen}(\alpha) - (K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c) \cos(\alpha)|^2}{|\operatorname{sen}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) \cos(\beta)|^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\cos(\alpha) [\operatorname{tg}(\alpha) - (K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c)]|^2}{|\cos(\beta) [\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)]|^2} = \\
 &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|\operatorname{tg}(\alpha) - (K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c)|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2} =
 \end{aligned}$$

lo que, por (24), nos da

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2 \lim_{y \downarrow 0} \frac{|c + \operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) - c|^2}{|\operatorname{tg}(\beta) - K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)|^2} = \\
 &= \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2, \mu_{\beta}^s - \text{a. e. x.}
 \end{aligned}$$

Veamos ahora el primero de los límites en (28) :

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy)}{\operatorname{Im}(K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) + c)}$$

Si $K_{\mu_{\pi/2}}(x + iy) = p + iq$, entonces

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{q}{\operatorname{Im}((p + iq) + c)} = \\
 &= \lim_{y \downarrow 0} \frac{q}{q} = 1, \mu_{\beta}^s - \text{a. e. x.}
 \end{aligned}$$

De éste modo nuestro límite (28) queda, finalmente, igual a

$$\left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2. \tag{ 29 }$$

Derivemos ahora $\alpha(\beta)$ en (24). Tenemos que

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\operatorname{tg}(\beta) + c), \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

es decir,

$$\operatorname{tg}(\alpha(\beta)) = c + \operatorname{tg}(\beta),$$

de donde, derivando con respecto a β , tendremos

$$\sec^2(\alpha(\beta)) \alpha'(\beta) = \sec^2(\beta),$$

lo que finalmente nos da que

$$\alpha'(\beta) = \left(\frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)} \right)^2. \quad (30)$$

Por lo tanto, de (29) y (30), obtenemos lo que queríamos demostrar en la primera etapa para el inciso B), es decir

$$\lim_{y \downarrow 0} \frac{\operatorname{Im} K_{\mu_\beta}(x+iy)}{\operatorname{Im} K_{\nu_\alpha}(x+iy)} = \alpha'(\beta), \quad \mu_\beta^s - a. e. x.$$

NOTA 3: La derivada $\alpha'(\beta)$ es positiva ($\alpha'(\beta) > 0$) y es finita ($\alpha'(\beta) < +\infty$). La demostración es la misma que en la nota 2, sin hacer caso de lo referente a la constante a .

▲

Segunda y tercer etapas

Las demostraciones de éstas etapas para ambos incisos del teorema son exactamente las mismas que en la segunda y tercera etapas del teorema 1.

El teorema 1A queda entonces totalmente demostrado.

Q.E.D.

De hecho, en lugar de la función $\exp(w)$ en el teorema 1 se pueden tomar otras funciones analíticas más generales.

4. APLICACIONES DEL RESULTADO PRINCIPAL

(COEXISTENCIA DE ESPECTROS).

4.1 APLICACIÓN 1 :

Construcción de una familia de medidas con partes singular y absolutamente continua no nulas a partir de una familia arbitraria de medidas puramente singulares.

A continuación mostraremos cómo es posible construir familias de medidas que tengan partes singular y absolutamente continua al mismo tiempo. En la siguiente proposición se hacen algunas observaciones conocidas, que serán de utilidad en el subsecuente desarrollo de éste trabajo.

Sea μ_β la familia de medidas generadas por μ a través de las funciones f_θ definidas en (0), es decir $K\mu_\beta(z) = f_\beta(K\mu_{\pi/2}(z))$. Nótese que en nuestro trabajo $\mu = \mu_{\pi/2}$.

Proposición 3:

Sea J un intervalo abierto.

- A) La función $K\mu(z)$ puede ser continuada analíticamente a través de J sí y sólo sí $\mu(J) = 0$,
- B) $\mu^{ac}(J) > 0$ sí y sólo sí $\mu_\beta^{ac}(J) > 0$ para toda $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$,
- C) $\mu(J') > 0$ para todo subintervalo $J' \subset J$ sí y sólo sí $\mu_\beta(J') > 0$ para cada subintervalo $J' \subset J$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Para la prueba de A) ver [9, p. 32], para B) ver [13, teorema 2.1] y para C) ver [9, p. 38, teorema 2.52].

Consideremos cierto intervalo I y tomemos una medida $\nu_{\pi/2}$ que sea puramente singular en éste intervalo I , es decir, $\nu_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y $\nu_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$. Sea $K\nu_{\pi/2}(z)$ una función de Pick del tipo que hemos venido considerando, es decir, tal que $\text{Im } K\nu_{\pi/2}(z) > 0$, $z = x + iy$ con $y > 0$ y definamos

$$K\mu_{\pi/2}(z) = \log(K\nu_{\pi/2}(z)). \quad (31)$$

Sea, como antes,

$$K_{\mu_{\beta}}(z) = f_{\beta}(K_{\mu_{\pi/2}}(z)) \quad y$$

$$K_{\nu_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(K_{\nu_{\pi/2}}(z)),$$

donde $f_{\theta}(z)$ es la función definida en (0).

Teorema 2:

Para cada subintervalo $J \subset I$ tendremos

A) $\mu_{\beta}^s(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$

B) $\mu_{\beta}^{ac}(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2].$

DEMOSTRACIÓN

A) La medida $\nu_{\pi/2}$ es puramente singular en el intervalo I , es decir, $\nu_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y $\nu_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$. De la Proposición 1 inciso B), sabemos que la parte absolutamente continua de la medida es estable, lo que significa que, como $\nu_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$, entonces $\nu_{\alpha}^{ac}(I) = 0$ para $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$, lo que implica que la medida ν_{α} es puramente singular en el intervalo I para $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2]$, es decir

$$\nu_{\alpha}^s(J) > 0 \text{ para cada subintervalo } J \subset I \text{ y } \nu_{\pi/2}^{ac}(I) = 0, \alpha \in (-\pi/2, \pi/2].$$

Como

$$K_{\nu_{\alpha}}(z) = f_{\alpha}(\exp(K_{\mu_{\pi/2}}(z))),$$

podemos entonces aplicar el teorema 1 para obtener que

$$\mu_{\beta}^s(J) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(J), \quad J \subset I,$$

para cada $\beta \in (-\pi/2, \pi/2), \alpha \in (0, \pi/2)$. Y entonces, debido a que $\alpha'(\beta) > 0$ (ver nota 1), tendremos lo que queríamos demostrar en éste inciso, es decir, que $\mu_{\beta}^s(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

B) Como $K_{\nu_{\pi/2}}(z) \in \mathbb{C}^+$, entonces $0 < \arg K_{\nu_{\pi/2}}(z) < \pi$ y por lo tanto $0 \leq \arg K_{\nu_{\pi/2}}(x + i0) \leq \pi$. De éste modo si la función logaritmo se determina de manera que sea real en el eje positivo, entonces tendremos que

$$\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + i0) = \operatorname{Im} \log(K_{\nu_{\pi/2}}(x + i0)) = \arg K_{\nu_{\pi/2}}(x + i0),$$

es acotada por π y esto significa que la medida $\mu_{\pi/2}$ es absolutamente continua ya que el soporte de su parte singular es el conjunto

$$\{ x : \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(x + i0) = \infty \}, \text{ ver [17] y [2].}$$

Si existe un intervalo $J \subset I$ tal que $\mu_{\pi/2}(J) = 0$, entonces, por la proposición 1 inciso A), sabemos que $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ puede ser continuada analíticamente a través de J y, de la relación (31), tendríamos que también $K_{\nu_{\pi/2}}(z)$ podría ser continuada analíticamente a través de J . Esto implicaría, de nuevo por la proposición 1 inciso A), que $\nu_{\pi/2}(J) = 0$ lo que contradice la construcción de $\nu_{\pi/2}$, es decir, contradice que $\nu_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$. De éste modo tenemos que $\mu_{\pi/2}(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y, de la estabilidad de la parte absolutamente continua de la medida, proposición 1 inciso B), tendremos finalmente lo que deseábamos demostrar en éste inciso, es decir, que $\mu_{\beta}^{ac}(J) > 0$, para $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

Q.E.D.

Así, dada una familia arbitraria de medidas puramente singulares $\{ \nu_{\alpha} \}$, es posible construir una familia de medidas $\{ \mu_{\beta} \}$ con partes singulares equivalentes a las de las medidas anteriores pero además con componentes absolutamente continuos no nulos. Esto completa los resultados de [7] donde se mostró que la coexistencia de las partes absolutamente continua y singular de una medida es posible sólo para un conjunto de β 's de medida de Lebesgue positiva.

4.2 APLICACIÓN 2 :

Generación de situaciones de espectro mixto a partir de medidas simples.

En el siguiente teorema demostraremos cómo medidas simples pueden generar situaciones de espectro mixto.

Sea I un intervalo dado y tomemos un conjunto $E \subset I$, tal que para cada subintervalo $J \subset I$ tengamos

$$0 < |E \cap J| < |J|,$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue. Tales conjuntos pueden ser construidos, ver [12] y [2, ejemplos 4 y 5].

Consideremos la función $u(x)$:

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \in E^c. \end{cases}$$

Definamos la función

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} d\mu_{\pi/2}(\lambda)$$

donde

$$d\mu_{\pi/2} = u dx,$$

y sea $\mu_{\pi/2}$ fuera de I tal, que se cumpla

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\mu_{\pi/2}(\lambda) < \infty,$$

o con el decaimiento necesario requerido por el teorema inverso de Gelfand - Levitan, con el propósito de obtener un problema de Sturm-Liouville. Ver [11].

Teorema 3:

C) $\mu_{\beta}^s(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$,

D) $\mu_{\beta}^{ac}(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

DEMOSTRACIÓN

A) Definamos la función

$$K_{\nu\pi/2}(z) := \exp(K_{\mu\pi/2}(z)). \quad (32)$$

Haciendo la consideración para la función $\exp(z)$ que se hizo antes de la relación (2), tendremos que ésta función $K_{\nu\pi/2}(z)$ es de Pick ya que $0 < \text{Im } K_{\mu\pi/2}(z) < \pi$.

Demostremos esto :

▲

Definamos la función de Pick

$$K_{\mu\pi/2}(z) = \int \frac{1}{\lambda - z} d\mu_{\pi/2}(\lambda).$$

Poniendo $z = a + ib$ con $b > 0$, tendremos

$$\begin{aligned} K_{\mu\pi/2}(z) &= \int \frac{1}{\lambda - (a + ib)} d\mu_{\pi/2}(\lambda) = \\ &= \int \frac{(\lambda - a) + ib}{(\lambda - (a + ib))((\lambda - a) + ib)} d\mu_{\pi/2}(\lambda) = \int \frac{(\lambda - a) + ib}{(\lambda - a)^2 + b^2} d\mu_{\pi/2}(\lambda), \end{aligned}$$

de donde obtenemos, ya que $b = \text{Im}(z) > 0$,

$$\begin{aligned} 0 < \text{Im } K_{\mu\pi/2}(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{b}{(\lambda - a)^2 + b^2} d\mu_{\pi/2}(\lambda) = \int_{\mathbb{E}} \frac{bu}{(\lambda - a)^2 + b^2} d\lambda = \\ &= b \int_{\mathbb{E}} \frac{1}{b^2 \left[\frac{(\lambda - a)^2}{b^2} + 1 \right]} d\lambda < (1/b) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{(\lambda - a)^2}{b^2} + 1} d\lambda = \end{aligned}$$

haciendo la sustitución $x = \frac{(\lambda - a)}{b} \Rightarrow dx = d\lambda / b \Rightarrow d\lambda = bdx$, tendremos

$$= (1/b) \int_{\mathbb{R}} \frac{b}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t \frac{1}{x^2 + 1} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} (\arctan(x)|_{-t}^t) = (\pi/2 - (-\pi/2)) = \pi.$$

De éste modo obtuvimos que $0 < \text{Im } K_{\mu_{\pi/2}}(z) < \pi$ lo que implica que la función $K_{\nu_{\pi/2}}(z)$ es de Pick.

Primero probaremos que $\nu_{\alpha}^s(J) > 0$ para cualquier intervalo $J \subset I$.

Tenemos, de (32), que

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) = \log(K_{\nu_{\pi/2}}(z)), \quad -(33)$$

ahora, por el lema de Fatou, ver [3], sabemos que

$$u(x) = (1/\pi) \arg(K_{\nu_{\pi/2}}(x+i0)), \text{ a.e. } x \in I$$

pero como $u(x)$ toma únicamente los valores 1 y 0 , se sigue que $\arg(K_{\nu_{\pi/2}}(x+i0))$ toma únicamente los valores π y 0 , por lo que deducimos que

$$\text{Im}(K_{\nu_{\pi/2}}(x+i0)) = 0, \text{ a.e. } x \in I.$$

Esto implica que ν_{α} no tiene parte absolutamente continua ya que un soporte de la parte absolutamente continua de ν_{α} es el conjunto, ver [10]

$$\{x \in E : 0 < \text{Im}(K_{\nu_{\pi/2}}(x+i0))\}$$

y como $\nu_{\alpha} = \nu_{\alpha}^{ac} + \nu_{\alpha}^s$, entonces ν_{α} es puramente singular en intervalo I para cada $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Dado un intervalo $J \subset I$, supongamos que $\nu_{\pi/2}(J) = 0$, entonces la función $K_{\nu_{\pi/2}}(z)$, por la proposición 1 A), puede ser extendida analíticamente a través de J y, por (33), lo mismo se puede hacer con la función $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$. La proposición 1 A) implica entonces que $\mu_{\pi/2}(J) = 0$ lo cual contradice la construcción de $\mu_{\pi/2}$. Entonces tenemos que $\nu_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada intervalo $J \subset I$, por lo que, usando la proposición 1 C), obtenemos que $\nu_{\alpha}^s(J) > 0$ para toda $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Ahora, para culminar la demostración de éste inciso, basta con utilizar el teorema 1 que nos dice que

$$\mu_{\beta}^s(F) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^s(F),$$

cuando $\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(\exp(\text{tg}(\beta)))$ para cada conjunto de Borel F , $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\alpha \in (0, \pi/2)$, lo que directamente nos da la afirmación del inciso A) del teorema.

B) El inciso B) se sigue de la bien conocida estabilidad de la parte absolutamente continua de la medida, ver proposición 1 B), ya que la medida $\mu_{\pi/2}$ es absolutamente continua por construcción. El teorema queda totalmente demostrado.

Q.E.D.

NOTA 4: En [8] se dan cinco ejemplos de familias de medidas $\{\mu_{\beta}\}$ donde $d\mu = \chi_B(x)dx$. B es un conjunto medible en el sentido de la medida de Lebesgue y

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B, \\ 0, & \text{si } x \in B^c. \end{cases}$$

La coexistencia de una parte singular junto con una parte absolutamente continua se muestra en [8, ejemplos 4 y 5] sólo para un conjunto de β 's de medida de Lebesgue positivas. La construcción anterior demuestra, coexistencia para todas las β 's con excepción de una: $\beta = \pi/2$.

Para construir una familia de medidas tal que el inciso A) del teorema anterior tuviera lugar para toda $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$, es decir incluyendo $\pi/2$, observemos lo siguiente.

Sea

$$z(x) = \frac{Ax + B}{Cx + D}.$$

A esta función le podemos asociar la matriz

$$A_z = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Consideremos ahora la función

$$w(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

la cual tiene como matriz asociada a

$$A_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Lema 3:

La composición de funciones $w(z(x))$ tiene matriz asociada $A_w A_z$.

DEMOSTRACIÓN

Calculemos la composición $w(z(x))$:

$$\begin{aligned} w(z(x)) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right) + b}{c\left(\frac{Ax + B}{Cx + D}\right) + d} = \frac{a(Ax + B) + b(Cx + D)}{c(Ax + B) + d(Cx + D)} = \\ &= \frac{(aA + bC)x + (aB + bD)}{(cA + dC)x + (cB + dD)}. \end{aligned}$$

Esta composición tiene matriz asociada

$$\begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix} \quad (34)$$

Calculemos ahora el producto de matrices $A_w A_z$:

$$A_w A_z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix} \quad (35)$$

La matriz en (35) es igual a la matriz en (34), lo que demuestra la veracidad de éste lema.

Q.E.D.

Si ahora consideramos las funciones

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i} \quad \text{y} \quad F_{\theta}(x) = i \frac{-e^{2i\theta} + x}{-e^{2i\theta} - x},$$

con matrices asociadas

$$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{F_{\theta}} = \begin{pmatrix} i & -ie^{2i\theta} \\ -1 & -e^{2i\theta} \end{pmatrix},$$

respectivamente y las componemos en el orden $F_{\theta}(\varphi(z))$, obtendremos lo siguiente

$$F_{\theta}(\varphi(z)) = i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi(z)}{-e^{2i\theta} - \varphi(z)} \quad (36)$$

Según el lema 3, la matriz asociada a ésta composición es

$$\begin{aligned} A_{\varphi} A_{F_{\theta}} &= \begin{pmatrix} i & -ie^{2i\theta} \\ -1 & -e^{2i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - ie^{2i\theta} & 1 + e^{2i\theta} \\ -1 - e^{2i\theta} & i - ie^{2i\theta} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} i(1 - e^{2i\theta}) & 1 + e^{2i\theta} \\ -(1 + e^{2i\theta}) & i(1 - e^{2i\theta}) \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

pero $1 + e^{2i\theta} = 1 + \cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta) = 1 + \cos 2(\theta) - \operatorname{sen} 2(\theta) + i 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) =$
 $= 2 \cos^2(\theta) + i 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = 2 \cos(\theta) (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = 2 \cos(\theta) e^{i\theta},$

y

$$\begin{aligned} 1 - e^{2i\theta} &= 1 - (\cos(2\theta) + i \operatorname{sen}(2\theta)) = 2 \operatorname{sen}^2(\theta) - i 2 \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = \\ &= 2 \operatorname{sen}(\theta) (\operatorname{sen}(\theta) - i \cos(\theta)) = -2 i \operatorname{sen}(\theta) e^{i\theta}, \end{aligned}$$

entonces $i(1 - e^{2i\theta}) = 2 e^{i\theta} \operatorname{sen}(\theta)$. De éste modo nuestra última matriz queda

$$= \begin{pmatrix} 2 e^{i\theta} \operatorname{sen}(\theta) & 2 e^{i\theta} \cos(\theta) \\ -2 e^{i\theta} \cos(\theta) & 2 e^{i\theta} \operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}.$$

Notemos ahora que, por otro lado, ésta matriz es la correspondiente a la función

$$\frac{2e^{i\theta}z\operatorname{sen}(\theta) + 2e^{i\theta}\cos(\theta)}{-2e^{i\theta}z\cos(\theta) + 2e^{i\theta}\operatorname{sen}(\theta)} = \frac{\cos(\theta) + z\operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - z\cos(\theta)} = f_{\theta}(z). \quad (37)$$

La última igualdad por (0). Concluimos entonces, de (36) y (37), que la función $f_{\theta}(z)$ en (0) se puede reescribir de la siguiente manera

$$f_{\theta}(z) = i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi(z)}{-e^{2i\theta} - \varphi(z)}, \quad (38)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

y, por B) de la proposición 1,

$$f_{\theta}(z) = f_{\theta+\pi}(z).$$

Observemos además que

$$i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi^2(z)}{-e^{2i\theta} - \varphi^2(z)} = \frac{1}{2} f_{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}}(z) + \frac{1}{2} f_{\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}}(z). \quad (39)$$

Demostremos esto

▲

$$i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi^2(z)}{-e^{2i\theta} - \varphi^2(z)} = i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi^2(z)}{-[e^{2i\theta} - (i\varphi(z))^2]} = -i \frac{-e^{2i\theta} + \varphi^2(z)}{(e^{i\theta} - i\varphi(z))(e^{i\theta} + i\varphi(z))} =$$

lo desarrollo en fracciones parciales

$$= -i \left(\frac{A}{e^{i\theta} - i\varphi(z)} + \frac{B}{e^{i\theta} + i\varphi(z)} \right) = -i \left(\frac{A(e^{i\theta} + i\varphi(z)) + B(e^{i\theta} - i\varphi(z))}{(e^{i\theta} - i\varphi(z))(e^{i\theta} + i\varphi(z))} \right) =$$

$$= -i \left(\frac{e^{i\theta} (A+B) + i\varphi(z)(A-B)}{(e^{i\theta} - i\varphi(z))(e^{i\theta} + i\varphi(z))} \right).$$

Esto pasa sí y sólo sí

$$A = \frac{\varphi(z) - i e^{i\theta}}{2i} \quad \text{y} \quad B = \frac{-i e^{i\theta} - \varphi(z)}{2i},$$

entonces tendremos que

$$\begin{aligned} \frac{i - e^{2i\theta} + \varphi^2(z)}{-e^{2i\theta} - \varphi^2(z)} &= -i \left(\frac{\frac{\varphi(z) - i e^{i\theta}}{2i}}{e^{i\theta} - i\varphi(z)} + \frac{\frac{-i e^{i\theta} - \varphi(z)}{2i}}{e^{i\theta} + i\varphi(z)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{i e^{i\theta} - \varphi(z)}{e^{i\theta} - i\varphi(z)} + \frac{i e^{i\theta} + \varphi(z)}{e^{i\theta} + i\varphi(z)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-(-i e^{i\theta} + \varphi(z))}{i(-i e^{i\theta} - \varphi(z))} + \frac{i e^{i\theta} + \varphi(z)}{-i(i e^{i\theta} - \varphi(z))} \right) = \end{aligned}$$

pero $1/i = -i$, $i = e^{i\pi/2}$, así que queda

$$= \frac{1}{2} \left(i \frac{-e^{i\pi/2} e^{i\theta} + \varphi(z)}{-e^{i\pi/2} e^{i\theta} - \varphi(z)} + i \frac{-(-i e^{i\theta}) + \varphi(z)}{-(-i e^{i\theta}) - \varphi(z)} \right) =$$

pero $-i = e^{-i\pi/2}$, quedando entonces

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(i \frac{-e^{2i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + \varphi(z)}{-e^{2i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} - \varphi(z)} + i \frac{-e^{2i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} + \varphi(z)}{-e^{2i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4})} - \varphi(z)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} f_{\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}}(z) + \frac{1}{2} f_{\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}}(z). \end{aligned}$$

La última igualdad por (38).

Definamos ahora la siguiente función

$$G_{\beta}(z) := i \frac{-e^{2i\beta} + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{-e^{2i\beta} - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))} \quad (40)$$

donde

$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

Ésta función es de Pick, ya que $K\mu_{\pi/2}(z)$ es de Pick y

$$G_{\beta}(z) = \frac{1}{2} f_{\beta, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}(K\mu_{\pi/2}(z)) + \frac{1}{2} f_{\beta, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}(K\mu_{\pi/2}(z)) = \frac{1}{2} K\mu_{\beta, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}}(z) + \frac{1}{2} K\mu_{\beta, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}}(z) \quad (41)$$

por (39) y (1). Sea $\mu_{\pi/2}^*$ la medida asociada a $G_{\pi/2}(z)$ y escribamos $K\mu_{\pi/2}^*(z) := G_{\pi/2}(z)$. Demostremos ahora que $G_{\beta}(z) = f_{\beta}(G_{\pi/2}(z))$, es decir que $G_{\beta}(z) = f_{\beta}(K\mu_{\pi/2}^*(z))$

▲

Primero demostremos que $\varphi(K\mu_{\pi/2}^*(z)) = \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))$. En efecto, de (40) tenemos que

$$K\mu_{\pi/2}^*(z) = i \frac{-e^{2i\frac{\pi}{2}} + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{-e^{2i\frac{\pi}{2}} - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))} = i \frac{1 + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{1 - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}, \quad \text{con } \varphi(z) = \frac{z-i}{z+i};$$

de éste modo

$$\begin{aligned} \varphi(K\mu_{\pi/2}^*(z)) &= \frac{K\mu_{\pi/2}^*(z) - i}{K\mu_{\pi/2}^*(z) + i} = \frac{i \frac{1 + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{1 - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))} - i}{i \frac{1 + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{1 - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))} + i} = \\ &= \frac{i[1 + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))] - i[1 - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))]}{i[1 + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))] + i[1 - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))]} = \\ &= \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z)), \end{aligned}$$

quedando entonces demostrado que $\varphi(K\mu_{\pi/2}^*(z)) = \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))$.

De ésta última relación obtenemos que

$$G_{\beta}(z) = i \frac{-e^{2i\beta} + \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))}{-e^{2i\beta} - \varphi^2(K\mu_{\pi/2}(z))} = i \frac{-e^{2i\beta} + \varphi(K\mu_{\pi/2}^*(z))}{-e^{2i\beta} - \varphi(K\mu_{\pi/2}^*(z))} = f_{\beta}(K\mu_{\pi/2}^*(z)),$$

lo que concluye ésta demostración. ▲

Así, podemos entonces decir que

$$G_{\beta}(z) = K\mu_{\beta}^*(z) := f_{\beta}(K\mu_{\pi/2}^*(z)). \quad (42)$$

Ahora bien, por (41) y (42) tenemos lo siguiente

$$K\mu_{\beta}^*(z) = \frac{1}{2} f_{\frac{\beta+\pi}{2+4}}(K\mu_{\pi/2}(z)) + \frac{1}{2} f_{\frac{\beta-\pi}{2-4}}(K\mu_{\pi/2}(z)) = \frac{1}{2} K\mu_{\frac{\beta+\pi}{2+4}}(z) + \frac{1}{2} K\mu_{\frac{\beta-\pi}{2-4}}(z),$$

lo que en forma integral, por tratarse de funciones de Pick, queda (ver [3] pág. 20.):

$$\begin{aligned} \eta z + v + \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_{\beta}^*(\lambda) &= \\ &= \frac{1}{2} \eta_1 z + \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_{\frac{\beta+\pi}{2+4}}(\lambda) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_2 z + \frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_{\frac{\beta-\pi}{2-4}}(\lambda) \end{aligned}$$

Ésta igualdad se cumple sólo si

$$\eta = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) , \quad v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \text{y}$$

$$\int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_{\beta}^*(\lambda) = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d(\mu_{\frac{\beta+\pi}{2+4}}(\lambda) + \mu_{\frac{\beta-\pi}{2-4}}(\lambda)) .$$

De la última igualdad tenemos que

$$d\mu_{\beta}^*(\lambda) = \frac{1}{2} d\mu_{\frac{\beta+\pi}{2+4}}(\lambda) + \frac{1}{2} d\mu_{\frac{\beta-\pi}{2-4}}(\lambda) ,$$

lo que implica que

$$\mu_{\pi/2}^* = \frac{1}{2} \mu_{3\pi/4} + \frac{1}{2} \mu_{\pi/4}, \quad (43)$$

es decir, si $\beta = \pi/2$, la medida μ_{β}^* sí va a contar con parte singular además de su parte absolutamente continua, ya que, por el teorema 3, sabemos que la medida μ_{β} cuenta con ambas partes (singular y absolutamente continua), si $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, en particular, si $\beta = \pi/4$ (ver (43)).

Esto implica que la familia de medidas μ_{β}^* satisface las aseveraciones en los incisos A) y B) del teorema 3 para cada $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$ (¡incluyendo $\pi/2$!), es decir, para cada subintervalo $J \subset I$ tendremos

- A) $\mu_{\beta}^{*s}(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2],$
- B) $\mu_{\beta}^{*ac}(J) > 0, \beta \in (-\pi/2, \pi/2].$

De éste modo hemos construido una familia de medidas μ_{β}^* con partes absolutamente continua y singular para toda $\beta \in (-\pi/2, \pi/2]$.

4.3 APLICACIÓN 3 :

Obtención de un componente singular de la medida sólo para la mitad de las constantes β consideradas.

En el siguiente teorema se mostrará que si multiplicamos la medida $\mu_{\pi/2}$ usada en el teorema 3 por una constante menor que 1, entonces obtendremos un componente singular de la medida sólo para la mitad de las constantes β consideradas.

Sea $d\mu_{\pi/2} = u(x) dx$ como en (31). Es decir, consideremos cierto intervalo I y tomemos una medida $\nu_{\pi/2}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y $\nu_{\pi/2}^{ac}(I) = 0$. Sea $K_{\nu_{\pi/2}}(z)$ una función de Pick del tipo que hemos venido considerando, es decir, tal que $\text{Im } K_{\nu_{\pi/2}}(z) > 0$, $z = x + iy$ con $y > 0$ y definamos la función

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) := \log(K_{\nu_{\pi/2}}(z)).$$

Si en el teorema 1 tomamos, en lugar de la función $F(w) = \exp(w)$, la función $F(w) = aw$ (ver teorema 1A inciso A) y definimos la función

$$K_{\nu_{\alpha}^*}(z) := f_{\alpha}(a K_{\mu_{\pi/2}}(z)),$$

entonces, de acuerdo con el teorema 1, tendremos que

$$\mu_{\beta}^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_{\alpha}^{*s}(E),$$

para cada conjunto de Borel E y donde $\alpha(\beta) = \text{tg}^{-1}(a \text{tg}(\beta))$, $\alpha, \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Aplicando el teorema 2 inciso A, se sigue que $\mu_{\beta}^s(J) > 0$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, lo que, por la relación anterior y debido a que la derivada de α con respecto a β es positiva (vea nota 2), nos indica que $\nu_{\alpha}^{*s}(J) > 0$, para cada subintervalo $J \subset I$.

Consideremos ahora la función

$$K_{\gamma_{\beta^*}}(z) := f_{\beta^*}(\exp(K_{\nu_{\pi/2}^*}(z))), \text{ con } \beta^* \in (-\pi/2, \pi/2]. \quad (44)$$

Teorema 4:

Para la familia de medidas γ_{β^*} tenemos que $\gamma_{\beta^*}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ si y sólo si $\beta^* \in (0, \pi/2)$. Si $\beta^* \in (-\pi/2, 0]$, entonces γ_{β^*} tiene sólo parte absolutamente continua.

DEMOSTRACIÓN

Aplicando el teorema 1, obtenemos que

$$V_{\alpha}^{*s}(E) = \beta^{*}(\alpha) \gamma_{\beta^*}^s(E),$$

para cada conjunto de Borel E y con $\beta^{*}(\alpha) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\alpha)))$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, con $\beta^* \in (0, \pi/2)$ (ver lema 0).

Entonces $\gamma_{\beta^*}^s(J) > 0$ para cada subintervalo $J \subset I$ y para cada $\beta^* \in (0, \pi/2)$.

Para ver que $\gamma_{\beta^*}^s = 0$ para $\beta^* \in (-\pi/2, 0]$, recordemos que un soporte minimal para $\gamma_{\beta^*}^s$ está dado por el conjunto

$$A = \{x : K_{\gamma_{\beta^*}}(x + i0) = \infty\}$$

el cual, por la prueba del lema 1, es igual a (ver (6))

$$= \{x : K_{\gamma_{\pi/2}}(x + i0) = \operatorname{tg}(\beta^*)\}.$$

Si asumimos que $\gamma_{\beta^*}^s \neq 0$, entonces $A \neq \emptyset$.

Ahora bien, de (44), tenemos que

$$K_{\gamma_{\pi/2}}(z) = f_{\pi/2}(\exp(Kv_{\pi/2}^*(z))) = \exp(Kv_{\pi/2}^*(z)),$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} K_{\gamma_{\pi/2}}(x + i0) &= \exp(Kv_{\pi/2}^*(x + i0)) = \\ &= \exp\left(\int_E \frac{a}{\lambda - (x + i0)} d\lambda\right) = \\ &= \exp\{\operatorname{Re}(Kv_{\pi/2}^*(x + i0)) + \operatorname{Im}(Kv_{\pi/2}^*(x + i0))\} = \end{aligned}$$

$$= \exp\{R + (i\pi\alpha) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{|E \cap \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}|}{2\varepsilon}\}, \quad (45)$$

donde $R = \operatorname{Re}(K v_{\pi/2}^*(x + i0))$ y $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue. (Ver [2] pág. 44).

Si $x \in A$, el lado derecho de la ecuación (45) tendría que ser igual a $\operatorname{tg}(\beta^*)$, es decir, un número real. Esto obliga a que el límite en (45) tenga que ser igual a 0 ó $1/\alpha$.

Como $(|E \cap \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}| / 2\varepsilon) \leq 2\varepsilon / 2\varepsilon = 1$ y $\alpha < 1$, entonces el límite anterior tiene que ser igual a 0, lo que implica, de (45) que $\operatorname{tg}(\beta^*) = \exp(R) > 0$. De éste modo, si $\beta^* \in (-\pi/2, 0]$, entonces $\gamma_{\beta^*}^s = 0$.

Q.E.D.

4.4 APLICACIÓN 4 :

Método iterativo generador de situaciones de espectro mixto para operadores de Sturm-Liouville a partir de una medida simple.

El resultado anterior (Teorema 4) sugiere el desarrollo de un método iterativo que nos genere situaciones de espectro mixto para operadores de Sturm-Liouville a partir de una medida simple. Para esto, sea $I = [0, 1]$ y tomemos un conjunto $E \subset I$, tal que para cada subintervalo $J \subset I$ tengamos

$$0 < |E \cap J| < |J|,$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

Primera etapa

Consideremos una función $u(x)$ tal que :

$$A) u(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{si } x \in E, \\ 0, & \text{si } x \in E^c. \end{cases}$$

B) Sea $d\mu_{\pi/2} = u dx$ y $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ la función asociada a ésta medida, como en la aplicación 2.

Sean μ_β y ν_α las familias de medidas como en el teorema 1 con $\alpha(\beta)$ y β relacionadas como en (4).

Entonces, por el teorema 1 y el teorema 4 (donde α juega el papel de β^*), tendremos que

$$\mu_\beta^s(E) = \alpha'(\beta) \nu_\alpha^s(E), \quad \alpha \in (0, \pi/2), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$$

es decir, la partes singulares de las medidas son equivalentes:

$$\nu_\alpha^s \sim \mu_\beta^s, \quad \alpha \in (0, \pi/2), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Antes de empezar con las iteraciones, consideremos las siguientes proposiciones y lema que serán útiles en el desarrollo de nuestro método:

Proposición 4 :

Sea ν_α la familia de medidas generada por $\nu_{\pi/2}$ descrita en el teorema 1.

Si definimos una nueva medida de la siguiente manera :

$$\Psi_{\pi/2} := \nu_{-\pi/4} , \quad (46)$$

entonces

$$\Psi_{\alpha^{\wedge}} = \nu_{\alpha^{\wedge} + \pi/4} , \quad (47)$$

donde $\Psi_{\alpha^{\wedge}}$ es la familia de medidas generadas por $\Psi_{\pi/2}$.

DEMOSTRACIÓN

Utilizando la función $f_\theta(z)$ definida en el teorema 1, definimos :

$$K_{\Psi_{\alpha^{\wedge}}}(z) := f_{\alpha^{\wedge}}(K_{\Psi_{\pi/2}}(z)) .$$

Pero, por (46),

$$f_{\alpha^{\wedge}}(K_{\Psi_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha^{\wedge}}(K_{\nu_{-\pi/4}}(z)) .$$

y como

$$K_{\nu_{-\pi/4}}(z) = f_{-\pi/4}(K_{\nu_{\pi/2}}(z)) .$$

entonces

$$f_{\alpha^{\wedge}}(K_{\Psi_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha^{\wedge}}(f_{-\pi/4}(K_{\nu_{\pi/2}}(z))) = f_{\alpha^{\wedge} - \pi/4 + \pi/2}(K_{\nu_{\pi/2}}(z)) ,$$

por la parte A) y B) de la proposición 1. De éste modo obtenemos que

$$f_{\alpha^{\wedge}}(K_{\Psi_{\pi/2}}(z)) = f_{\alpha^{\wedge} + \pi/4}(K_{\nu_{\pi/2}}(z)) ,$$

lo que quiere decir que

$$\Psi_{\alpha^{\wedge}} = \nu_{\alpha^{\wedge} + \pi/4} .$$

Queda así demostrada la relación (47).

Q.E.D.

Proposición 5 :

Sea el operador $T(x) = (e^x - 1)/(1 + e^x)$. Entonces :

1. $T(-T(x)) = -T(T(x)) = -T^2(x)$,

2. $T^i(x) \rightarrow 0$, cuando $i \rightarrow +\infty$, donde $T^i(x) = \underbrace{T(T(\dots(T(x))))}_{i \text{ - veces}}$.

3. $-T^i(x) \rightarrow 0$, cuando $i \rightarrow +\infty$.

DEMOSTRACIÓN

Comencemos demostrando la parte 1 de la proposición :

$$\begin{aligned} T(-T(x)) &= \frac{e^{-T(x)} - 1}{1 + e^{-T(x)}} = \frac{\frac{1}{e^{T(x)}} - 1}{\frac{1}{e^{T(x)}} + 1} = \frac{1 - e^{T(x)}}{1 + e^{T(x)}} = \frac{1 - e^{T(x)}}{1 + e^{T(x)}} = \\ &= -\frac{e^{T(x)} - 1}{e^{T(x)} + 1} = -T(T(x)) = -T^2(x), \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la parte 1 de la proposición.

Para demostrar la parte 2 basta, por ejemplo, demostrar que $T(x) \leq 3x/4$, con $0 \leq x \leq 1$, ya que, como $(3x/4)^i \rightarrow 0$, cuando $i \rightarrow +\infty$, esto implicaría que $T^i(x) \rightarrow 0$, cuando $i \rightarrow +\infty$.

Por demostrar : $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \leq 3x/4$, con $0 \leq x \leq 1$.

Sea $f(x) = (3/4)(xe^x + x) - e^x + 1$.

Demostremos que $f(x) \geq 0$, si $0 \leq x \leq 1$.

Tenemos que $f(0) = 0$. Si $f'(x) \geq 0$, para $0 \leq x \leq 1$, habremos terminado.

$$f'(x) = (3/4)(xe^x + e^x + 1) - e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0) = (3/4)(0 + 1 + 1) - 1 = 3/2 - 1 = 1/2 > 0.$$

Si $f''(x) \geq 0$, para $0 \leq x \leq 1$, habremos terminado:

$$f''(x) = (3/4)(xe^x + e^x + e^x) - e^x = (3/4)xe^x + (1/2)e^x \geq 0, \text{ si } 0 \leq x \leq 1,$$

por lo que concluimos que $f(x) \geq 0$, si $0 \leq x \leq 1$. Esto último quiere decir que

$$T(x) = (e^x - 1)/(e^x + 1) \leq 3x/4, \text{ si } 0 \leq x \leq 1,$$

lo que, como ya se dijo, finalmente implica que $T(x) \rightarrow 0$, cuando $i \rightarrow +\infty$. Lo que culmina la demostración de la parte 2 de la proposición.

La parte 3 de la proposición es una consecuencia directa de la parte 2.

De este modo, ha quedado completamente demostrada la proposición.

Q.E.D.

Generemos la familia de medidas $\mu_{\pi/2}^i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, de la siguiente forma:

Sea la medida

$$\mu_{\pi/2}^1 := (\pi/4)v_{-\pi/4},$$

con su función de Pick asociada

$$K_{\mu_{\pi/2}^1}(z)$$

Definamos la función

$$K_{v_{\pi/2}^1}(z) := \exp\{K_{\mu_{\pi/2}^1}(z)\}$$

y con ella generemos, usando la función $f_\alpha(z)$ definida en (0), la familia de funciones

$$K_{v_\alpha^1}(z) := f_\alpha(K_{v_{\pi/2}^1}(z)),$$

donde v_α^1 es la familia de medidas asociadas a ésta familia de funciones.

El siguiente paso es, con ayuda de v_{α}^1 , definir la medida

$$\mu_{\pi/2}^2 := (\pi/4) v_{-\pi/4}^1,$$

con la que, siguiendo la misma idea que se acaba de explicar, se genera la familia de medidas v_{α}^2 , tales que

$$K_{v_{\alpha}^2}(z) := f_{\alpha}(K_{v_{\pi/2}^2}(z)).$$

Repitiendo i veces el procedimiento, tendremos que, en general,

$$\mu_{\pi/2}^i = (\pi/4) v_{-\pi/4}^{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots,$$

con $v_{-\pi/4}^0 = v_{-\pi/4}$ (la original) y tales que

$$K_{v_{\pi/2}^i}(z) := \exp\{K_{\mu_{\pi/2}^i}(z)\}.$$

Se cumple entonces lo siguiente:

Lema 3:

Si

$$\mu_{\pi/2}^i = (\pi/4) v_{-\pi/4}^{i-1}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots,$$

con $v_{-\pi/4}^0 = v_{-\pi/4}$ (la original), entonces :

$$0 < \text{Im } K_{\mu_{\pi/2}^i}(z) < \pi/4, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

DEMOSTRACIÓN

Sea, como en (2),

$$K_{v_{\pi/2}^i}(z) = \exp(K_{\mu_{\pi/2}^i}(z))$$

Notemos, en primer lugar, que

$$0 < \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) < \pi/4 ; \quad (48)$$

demostramos esto :

▲

La demostración es idéntica a la expuesta en la demostración del inciso A) del teorema 3, donde queda establecido que $0 < \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) < \pi$, pero como nuestra función es

$u(x) = \frac{1}{4}$ si $x \in E$, entonces, al reproducir la misma demostración, obtendremos que $0 < \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) < \pi/4$.

▲

Aplicaremos ahora el método de inducción matemática para demostrar el lema :

1) Para $i = 1$, tenemos

$$\mu_{\pi/2}^1 = (\pi/4) v_{-\pi/4},$$

luego entonces

$$\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^1}(z) = \operatorname{Im} K_{(\pi/4) v_{-\pi/4}}(z) = \operatorname{Im} (\pi/4) K_{v_{-\pi/4}}(z) = (\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{-\pi/4}}(z),$$

de donde, aplicando la parte B) del lema 2, tenemos :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^1}(z) &= (\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{-\pi/4}}(z) = \\ &= \frac{(\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z)}{(\operatorname{sen}(-\pi/4) - \operatorname{Re} K_{v_{\pi/2}}(z) \cos(-\pi/4))^2 + (\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z) \cos(-\pi/4))^2} = \\ &= \frac{(\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z)}{((-1/\sqrt{2}) - \operatorname{Re} K_{v_{\pi/2}}(z)(1/\sqrt{2}))^2 + (\operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z)(1/\sqrt{2}))^2} \leq \\ &\leq \frac{(\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z)}{\frac{1}{2}(1 + \operatorname{Re} K_{v_{\pi/2}}(z))^2} = \frac{(\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{\pi/2}}(z)}{\frac{1}{2}(1 + 2\operatorname{Re} K_{v_{\pi/2}}(z) + \operatorname{Re}^2 K_{v_{\pi/2}}(z))} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{(\pi/4)\text{Im}K_{\nu_{\pi/2}}(z)}{\text{Re}K_{\nu_{\pi/2}}(z)}$$

(el último paso es válido ya que, por (48), $0 < \arg K_{\nu_{\pi/2}}(z) = \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) < (\pi/4)$, y, por lo tanto, $\text{Re} K_{\nu_{\pi/2}}(z) > 0$).

Pero, por (2), sabemos que :

$$\begin{aligned} K_{\nu_{\pi/2}}(z) &= \exp\{ K_{\mu_{\pi/2}}(z) \} = \exp\{ \text{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) + i \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \} = \\ &= \exp\{ \text{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \} \exp\{ i \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \} = \\ &= \exp\{ \text{Re} K_{\mu_{\pi/2}}(z) \} (\cos(\text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z)) + i \text{sen}(\text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}(z))), \end{aligned}$$

así que, finalmente obtenemos :

$$\begin{aligned} \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}^i(z) &\leq \frac{(\pi/4)\text{Im}K_{\nu_{\pi/2}}(z)}{\text{Re}K_{\nu_{\pi/2}}(z)} = \\ &= \frac{(\pi/4)\exp\{\text{Re}K_{\mu_{\pi/2}}(z)\}\text{sen}(\text{Im}K_{\mu_{\pi/2}}(z))}{\exp\{\text{Re}K_{\mu_{\pi/2}}(z)\}\cos(\text{Im}K_{\mu_{\pi/2}}(z))} = \\ &= (\pi/4)\text{tg}(\text{Im}K_{\mu_{\pi/2}}(z)) < (\pi/4)\text{tg}(\pi/4) = \pi/4, \end{aligned}$$

la última desigualdad por (48). Por lo tanto :

$$0 < \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}^i(z) < \pi/4.$$

2) Supongamos que para i se cumple

$$0 < \text{Im} K_{\mu_{\pi/2}}^i(z) < \pi/4.$$

3) Probemos para $i + 1$. Tenemos que :

$$\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^{i+1}}(z) = \operatorname{Im} K_{(\pi/4) v_{-\pi/4}^i}(z) = (\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{-\pi/4}^i}(z),$$

de donde, aplicando nuevamente la parte B) del lema 2 y (2), tenemos :

$$\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^{i+1}}(z) = (\pi/4) \operatorname{Im} K_{v_{-\pi/4}^i}(z) \leq \frac{(\pi/4) \operatorname{Im} K v_{\pi/2}^i(z)}{\operatorname{Re} K v_{\pi/2}^i(z)} = (\pi/4) \operatorname{tg}(\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^i}(z)).$$

Finalmente, haciendo uso de la hipótesis inductiva 2), obtenemos :

$$\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^{i+1}}(z) \leq (\pi/4) \operatorname{tg}(\operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^i}(z)) < (\pi/4) \operatorname{tg}(\pi/4) = \pi/4,$$

por lo tanto :

$$0 < \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^{i+1}}(z) < \pi/4.$$

De éste modo queda concluida la demostración del lema.

Q.E.D.

Comencemos ahora con las iteraciones :

Primera iteración

Queremos definir una nueva medida, que sea absolutamente continua, de la siguiente manera :

$$\mu_{\pi/2}^1 = (\pi/4) v_{-\pi/4}.$$

Lo haremos en dos etapas :

A) Definamos primero

$$\Psi_{\pi/2} := v_{-\pi/4}. \quad (49)$$

Esta medida es absolutamente continua ya que sabemos, por el teorema 4, que $v_{\alpha}^s(J) > 0$ siempre y cuando $\alpha \in (0, \pi/2)$.

Entonces , por la proposición 4, tendremos que

$$\Psi_{\alpha^{\wedge}} = \nu_{\alpha^{\wedge} + \pi/4}, \quad (50)$$

donde $\Psi_{\alpha^{\wedge}}$ es la familia de medidas generadas por $\nu_{\pi/2}$.

Pero nosotros teníamos como ν_{α} la familia de medidas generadas por $\nu_{\pi/2}$, así que, por (47), obtenemos que

$$\alpha = \alpha^{\wedge} + \pi/4, \quad \text{de donde } \alpha^{\wedge} = \alpha - \pi/4, \quad \alpha \in (0, \pi/2). \quad (51)$$

Entonces, como $\alpha \in (0, \pi/2)$, tendremos que $\alpha^{\wedge} \in (-\pi/4, \pi/4)$ ó, ya que $f_{\theta}(z)$ es periódica con periodo π (ver inciso B) de la proposición 1), $\alpha^{\wedge} \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi)$.

B) Definamos ahora la nueva medida :

$$\mu_{\pi/2}^1 = (\pi/4) \Psi_{\pi/2}. \quad (52)$$

Si β^1 es el subíndice de la familia generada por $\mu_{\pi/2}^1$ y si

$$\beta^1(\alpha^{\wedge}) = \arctg((\pi/4) \operatorname{tg}(\alpha^{\wedge})), \quad \alpha^{\wedge}, \beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi). \quad (53)$$

entonces, por el teorema 1A inciso A), tendremos que

$$\Psi_{\alpha^{\wedge}}^s = [\beta^1(\alpha^{\wedge})]' \mu_{\beta^1}^{1s}, \quad \alpha^{\wedge}, \beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi).$$

es decir, son equivalentes las partes singulares de las medidas :

$$\mu_{\beta^1}^{1s} \sim \Psi_{\alpha^{\wedge}}^s, \quad \alpha^{\wedge}, \beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi), \quad (54)$$

y por (53), (54) se puede escribir :

$$\mu_{\arctg((\pi/4)\operatorname{tg}(\alpha^{\wedge}))}^{1s} \sim \Psi_{\alpha^{\wedge}}^s, \quad \alpha^{\wedge} \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi). \quad (55)$$

Finalmente, uniendo nuestros resultados (50) y (55), tendremos :

$$\mu_{\arctg((\pi/4)\operatorname{tg}(\hat{\alpha}))}^{1s} \sim \Psi_{\hat{\alpha}}^s = \nu_{\hat{\alpha} + \pi/4}^s, \quad \hat{\alpha} \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi).$$

es decir :

$$\mu_{\arctg((\pi/4)\operatorname{tg}(\hat{\alpha}))}^{1s} \sim \nu_{\hat{\alpha} + \pi/4}^s, \quad \hat{\alpha} \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi), \quad (56)$$

por lo que la medida que habíamos definido arriba (de (49) y (52)):

$$\mu_{\pi/2}^1 = (\pi/4) \nu_{-\pi/4}, \quad (57)$$

cumple con la relación (56). Las $\hat{\alpha}$ quedan en donde muestra la figura 1.

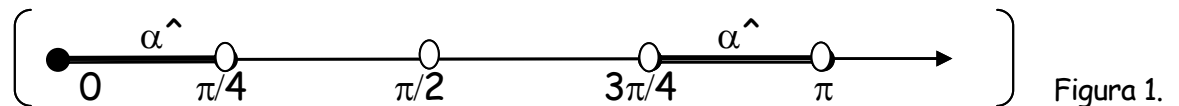


Figura 1.

Por el lema 4, caso $i = 1$, tenemos que

$$0 < \operatorname{Im} K_{\mu_{\pi/2}^1}(z) < \pi/4 < \pi,$$

lo que implica la existencia de una medida $\nu_{\pi/2}^1$, tal que

$$K_{\nu_{\pi/2}^1}(z) = \exp\{ K_{\mu_{\pi/2}^1}(z) \}, \quad (58)$$

donde, si α^1 es el subíndice de la familia generada por $\nu_{\pi/2}^1$,

$$\operatorname{tg}(\beta^1) = \ln(\operatorname{tg}(\alpha^1)), \quad \beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi), \quad \alpha^1 \in (0, \pi/2). \quad (59)$$

Es decir, consideramos ahora las medidas $\mu_{\beta^1}^1$ y $\nu_{\alpha^1}^1$, definidas como en el teorema 1, relacionando a α^1 y β^1 con (59). Entonces, aplicando el teorema 1, tendremos que las partes singulares de las medidas son equivalentes

$$\nu_{\alpha^1}^{1s} \sim \mu_{\beta^1}^{1s},$$

donde

$$\beta^1 \in [0, \pi/4) \cup (3\pi/4, \pi),$$

lo que por (59) (como se demuestra a continuación) implica que

$$\alpha^1 \in (\operatorname{arctg}(1/e) , \operatorname{arctg}(e)).$$

Demostremos esto último, es decir, que $\alpha^1 \in (\operatorname{arctg}(1/e) , \operatorname{arctg}(e))$:

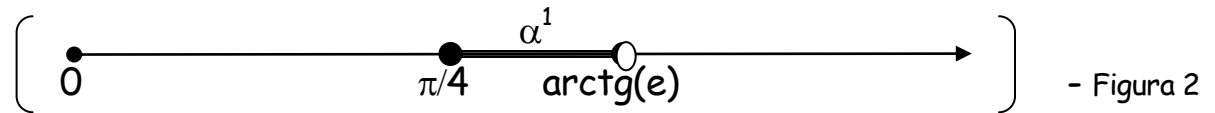
▲

Tenemos que $\beta^1 \in [0 , \pi/4) \cup (3\pi/4 , \pi)$, entonces, por (59), pasa lo siguiente :

$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta^1 \rightarrow 0^+ &\Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^1) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^1)) \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^1) \rightarrow 1^+ \Rightarrow \alpha^1 \rightarrow \pi/4^+. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta^1 \rightarrow \pi/4^- &\Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^1) \rightarrow 1^- \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^1)) \rightarrow 1^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^1) \rightarrow e^- \Rightarrow \alpha^1 \rightarrow \operatorname{arctg}(e)^-. \end{aligned}$$

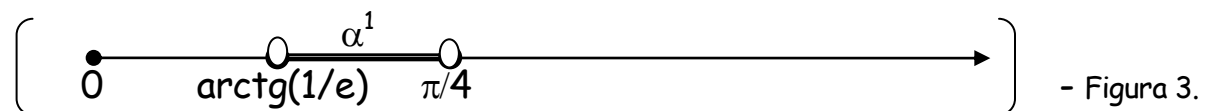
Entonces si $\beta^1 \in [0 , \pi/4)$, las α^1 quedan en donde muestra la figura 2.



$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta^1 \rightarrow 3\pi/4^+ &\Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^1) \rightarrow -1^+ \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^1)) \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^1) \rightarrow (1/e)^+ \Rightarrow \alpha^1 \rightarrow \operatorname{arctg}(1/e)^+. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta^1 \rightarrow \pi^- &\Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^1) \rightarrow 0^- \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^1)) \rightarrow 0^- \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^1) \rightarrow 1^- \Rightarrow \alpha^1 \rightarrow \pi/4^-. \end{aligned}$$

Entonces si $\beta^1 \in (3\pi/4 , \pi)$, las α^1 quedan en donde muestra la figura 3.



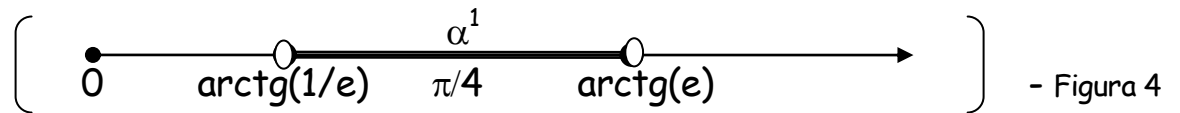
Por lo tanto, obtenemos lo que queríamos demostrar :

$$\alpha^1 \in (\operatorname{arctg}(1/e) , \operatorname{arctg}(e)) .$$

De este modo, se obtuvo una familia de medidas $\{ v_{\alpha^1}^1 \}_{\alpha^1 \in (0, \pi/2)}$, tales que $v_{\alpha^1}^1(J) > 0$ y $v_{\alpha^1}^{1 \text{ a.c.}}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\alpha^1 \in (\operatorname{arctg}(1/e) , \operatorname{arctg}(e)) ,$$

es decir, de la figuras 2 y 3, para las α^1 que quedan en donde muestra la figura 4.



Segunda iteración

Con los mismos fundamentos utilizados en la primera iteración, podemos tomar una nueva medida :

$$\mu_{\pi/2}^2 = (\pi/4) v_{-\pi/4}^1 ,$$

obteniendo una familia de medidas $\{ v_{\alpha^2}^2 \}_{\alpha^2 \in (0, \pi/2)}$, tales que $v_{\alpha^2}^2(J) > 0$ y $v_{\alpha^2}^{2 \text{ a.c.}}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\alpha^2 \in (\operatorname{arctg}(e^{-T(1)}) , \operatorname{arctg}(e^{T(1)})) , \text{ donde } T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} .$$

Demostremos las cotas para α^2 :

▲

Al hacer el mismo análisis que en la primera iteración, tendremos que, como

$$\alpha^1 \in (\operatorname{arctg}(1/e) , \operatorname{arctg}(e)) ,$$

entonces

$$\beta^2 \in (\operatorname{arctg}(1/e) - \pi/4 , \operatorname{arctg}(e) - \pi/4)$$

ó, ya que $f_{\theta}(z)$ es periódica con periodo π (ver inciso B) de la proposición 1),

$$\beta^2 \in [0 , \arctg(e) - \pi/4) \cup (\arctg(1/e) + 3\pi/4 , \pi).$$

Las β^2 quedan en donde muestra la figura 5.

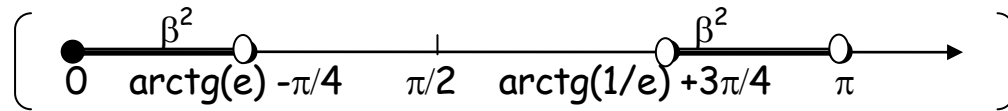


Figura 5

Como en la primera iteración, por el lema 4, caso $i = 2$, tenemos que

$$0 < \text{Im } K_{\mu_{\pi/2}^2}(z) < \pi/4 < \pi ,$$

lo que implica la existencia de una medida $\nu_{\pi/2}^2$, tal que

$$K_{\nu_{\pi/2}^2}(z) = \exp\{ K_{\mu_{\pi/2}^2}(z) \} ,$$

donde, si α^2 es el subíndice de la familia generada por $\nu_{\pi/2}^2$,

$$\text{tg}(\beta^2) = \ln(\text{tg}(\alpha^2)) , \quad \beta^2 \in [0 , \arctg(e) - \pi/4) \cup (\arctg(1/e) + 3\pi/4 , \pi) , \quad \alpha^2 \in (0 , \pi/2) \quad (60)$$

De este modo, por (60), tendremos :

$$* \text{ si } \beta^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow \text{tg}(\beta^2) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(\text{tg}(\alpha^2)) \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}(\alpha^2) \rightarrow 1^+ \Rightarrow \alpha^2 \rightarrow \pi/4^+ .$$

$$* \text{ si } \beta^2 \rightarrow (\arctg(e) - \pi/4)^- \Rightarrow$$

como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e) - \pi/4) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e)) - \operatorname{tg}(\pi/4)}{1 + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e))\operatorname{tg}(\pi/4)} = \frac{e-1}{1+e},$$

$$\Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^2)) \rightarrow \left(\frac{e-1}{1+e}\right)^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha^2) \rightarrow \exp\left\{\frac{e-1}{1+e}\right\}^- \Rightarrow \alpha^2 \rightarrow \operatorname{arctg}(e^{\operatorname{T}(1)})^-$$

$$\text{con } \operatorname{T}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow \operatorname{T}(1) = \frac{e-1}{1+e}.$$

Entonces si $\beta^2 \in [0, \operatorname{arctg}(e) - \pi/4)$, las α^2 quedan en donde muestra la figura 6.

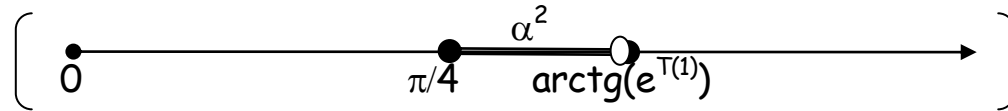


Figura 6

$$* \text{ si } \beta^2 \rightarrow (\operatorname{arctg}(1/e) + 3\pi/4)^+ \Rightarrow$$

como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1/e) + 3\pi/4) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1/e)) + \operatorname{tg}(3\pi/4)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1/e))\operatorname{tg}(3\pi/4)} = \frac{\frac{1}{e} - 1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{1-e}{e+1}$$

$$\Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^2)) \rightarrow (-(e-1)/(e+1))^+ \Rightarrow$$

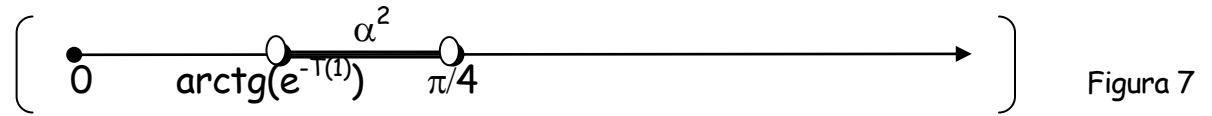
$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha^2) \rightarrow \exp\left\{-\frac{e-1}{1+e}\right\}^+ \Rightarrow \alpha^2 \rightarrow \operatorname{arctg}(e^{-\operatorname{T}(1)})^+$$

$$\text{con } \operatorname{T}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Rightarrow \operatorname{T}(1) = \frac{e-1}{1+e}.$$

$$* \text{ si } \beta^2 \rightarrow \pi^- \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^2) \rightarrow 0^- \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^2)) \rightarrow 0^- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^2) \rightarrow 1^- \Rightarrow \alpha^2 \rightarrow \pi/4^-.$$

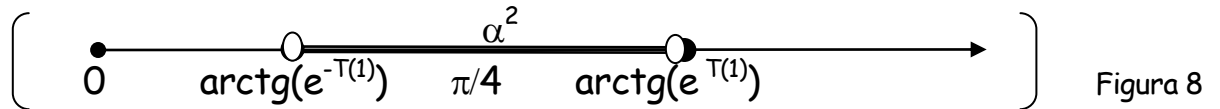
Entonces si $\beta^2 \in (\arctg(1/e) + 3\pi/4, \pi)$, las α^2 quedan en donde muestra la figura 7.



Por lo tanto, obtenemos lo que queríamos demostrar :

$$\alpha^2 \in (\arctg(e^{-T(1)}), \arctg(e^{T(1)})).$$

Gráficamente, de la figuras 6 y 7, las α^2 quedan en donde muestra la figura 8.



Tercera iteración

Tomando una nueva medida :

$$\mu_{\pi/2}^3 = (\pi/4) v_{-\pi/4}^2,$$

obtendremos, actuando de forma análoga a las iteraciones anteriores, una familia de medidas $\{v_{\alpha^3}^3\}_{\alpha^3 \in (0, \pi/2)}$, tales que $v_{\alpha^3}^{3s}(J) > 0$ y $v_{\alpha^3}^{3a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\alpha^3 \in (\arctg(\exp\{-T^2(1)\}), \arctg(\exp\{T^2(1)\})),$$

donde $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $T^2(x) = T(T(x))$.

Demostremos las cotas para α^3 :

En esta iteración, si α^3 es el subíndice de la familia generada por $v_{\pi/2}^3$, la relación equivalente a (59) y (60) es :

$$\operatorname{tg}(\beta^3) = \ln(\operatorname{tg}(\alpha^3)), \beta^3 \in [0, \arctg(e^{-T(1)}) - \pi/4) \cup (\arctg(e^{-T(1)}) + 3\pi/4, \pi), \alpha^3 \in (0, \pi/2) \quad (61)$$

Las β^3 quedan en donde muestra la figura 9.

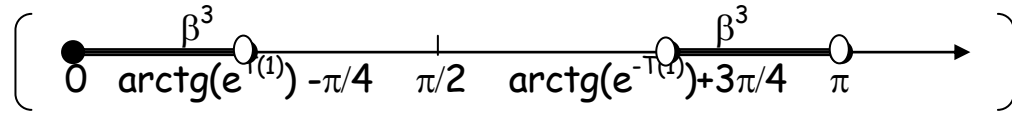


Figura 9

De este modo, por (61), tendremos que :

$$* \text{ si } \beta^3 \rightarrow 0^+ \Rightarrow \text{tg}(\beta^3) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \ln(\text{tg}(\alpha^3)) \rightarrow 0^+ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}(\alpha^3) \rightarrow 1^+ \Rightarrow \alpha^3 \rightarrow \pi/4^+ .$$

$$* \text{ si } \beta^3 \rightarrow (\text{arctg}(e^{T(1)}) - \pi/4)^- \Rightarrow$$

como

$$\text{tg}(\text{arctg}(e^{T(1)}) - \pi/4) = \frac{\text{tg}(\text{arctg}(e^{T(1)})) - \text{tg}(\pi/4)}{1 + \text{tg}(\text{arctg}(e^{T(1)}))\text{tg}(\pi/4)} = \frac{e^{T(1)} - 1}{1 + e^{T(1)}}$$

$$\Rightarrow \ln(\text{tg}(\alpha^3)) \rightarrow \left(\frac{e^{T(1)} - 1}{1 + e^{T(1)}} \right)^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}(\alpha^3) \rightarrow \exp\left\{ \frac{e^{T(1)} - 1}{1 + e^{T(1)}} \right\}^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 \rightarrow \text{arctg}(\exp\{T^2(1)\})^-$$

con $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $T^2(x) = T(T(x))$.

Entonces si $\beta^3 \in [0, \text{arctg}(e^{-T(1)}) - \pi/4)$, las α^3 quedan en donde muestra la figura 10.

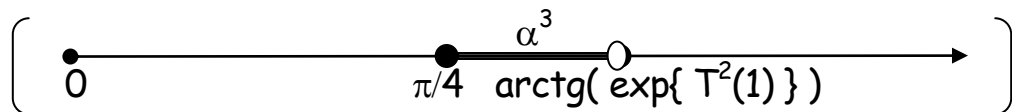


Figura 10

$$* \text{ si } \beta^3 \rightarrow (\text{arctg}(e^{-T(1)}) + 3\pi/4)^+ \Rightarrow$$

como

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e^{-T(1)}) + 3\pi/4) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e^{-T(1)})) + \operatorname{tg}(3\pi/4)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(e^{-T(1)}))\operatorname{tg}(3\pi/4)} = \frac{e^{-T(1)} - 1}{1 + e^{-T(1)}}$$

$$\Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^3)) \rightarrow \left(\frac{e^{-T(1)} - 1}{e^{-T(1)} + 1} \right)^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha^3) \rightarrow \exp\left\{ -\frac{e^{-T(1)} - 1}{e^{-T(1)} + 1} \right\}^+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^3 \rightarrow \operatorname{arctg}(e^{T(-T(1))})^+$$

con $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$. Pero por la proposición 5 inciso 1), sabemos que

$$T(-T(x)) = -T(T(x)) = -T^2(x),$$

así que

$$\alpha^3 \rightarrow \operatorname{arctg}(\exp\{-T^2(1)\})^+.$$

$$* \text{ si } \beta^3 \rightarrow \pi^- \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta^3) \rightarrow 0^- \Rightarrow \ln(\operatorname{tg}(\alpha^3)) \rightarrow 0^- \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha^3) \rightarrow 1^- \Rightarrow \alpha^3 \rightarrow \pi/4^-$$

Entonces si $\beta^3 \in (\operatorname{arctg}(e^{-T(1)}) + 3\pi/4, \pi)$, las α^3 quedan en donde muestra la figura 11.

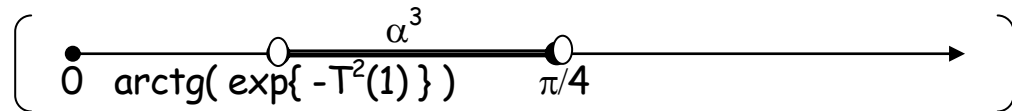


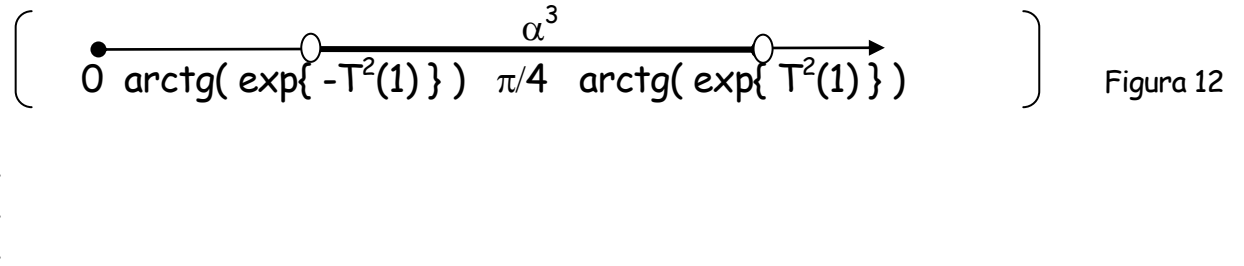
Figura 11

Por lo tanto, obtenemos lo que queríamos demostrar :

$$\alpha^3 \in (\operatorname{arctg}(\exp\{-T^2(1)\}), \operatorname{arctg}(\exp\{T^2(1)\})) .$$

▲

Gráficamente, de la figuras 10 y 11, las α^3 quedan en donde muestra la figura 12.



Iteración $i+1$

Así, del mismo modo, en la iteración $i + 1$, tomando

$$\mu_{\pi/2}^{i+1} = (\pi/4) \nu_{-\pi/4}^i,$$

obtendremos, actuando de forma análoga a las iteraciones anteriores, una familia de medidas $\{ \nu_{\alpha^{i+1}}^{i+1} \}_{\alpha^{i+1} \in (0, \pi/2)}$, tales que $\nu_{\alpha^{i+1}}^{i+1s}(J) > 0$ y $\nu_{\alpha^{i+1}}^{i+1a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\alpha^{i+1} \in (\arctg(\exp\{ -T^i(1) \}) , \arctg(\exp\{ T^i(1) \})),$$

donde $T(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $T^i(x) = \underbrace{T(T(\dots(T(x))\dots))}_{i \text{ - veces}}$.

Infinitésima Iteración (Si hacemos que $i \rightarrow +\infty$);

De la proposición 5, incisos 2) y 3), sabemos que

$$T^i(x) \rightarrow 0, \text{ cuando } i \rightarrow +\infty$$

y que

$$-T^i(x) \rightarrow 0, \text{ cuando } i \rightarrow +\infty,$$

por lo que tendremos que

$$\arctg(\exp\{ -T^i(1) \}) \rightarrow \arctg(e^0) = \arctg(1) = \pi/4, \text{ cuando } i \rightarrow +\infty \text{ y}$$

$$\arctg(\exp\{ T^i(1) \}) \rightarrow \arctg(e^0) = \arctg(1) = \pi/4, \text{ cuando } i \rightarrow +\infty.$$

Así, en el límite al infinito, habremos encontrado una familia de medidas $\{v_{\alpha}^*\}_{\alpha \in (0, \pi/2)}$, tales que $v_{\alpha}^{*s}(J) > 0$ y $v_{\alpha}^{*a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\alpha \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon), \text{ para toda } \varepsilon > 0.$$

Segunda etapa

La función correspondiente $K_{V_{\pi/2}^*}(z)$ es de Pick ya que es composición de funciones de Pick, pero no es, necesariamente, una función correspondiente a algún operador de Sturm-Liouville.

La medida (original) $\mu_{\pi/2}$ satisface las condiciones de decaimiento, así que existe una familia de operadores de Sturm-Liouville $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ tal que $\mu_{\pi/2}$ es la medida espectral de $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$. De este modo tendremos que $K_{\mu_{\pi/2}}(z)$ tiene su representación de Pick :

$$K_{\mu_{\pi/2}}(z) = m_2 + \int \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1} \right) d\mu_{\pi/2}(\lambda)$$

(el término lineal $m_1 z$ no está presente ya que la representación de Pick debe, además, corresponder a algún operador de Sturm-Liouville. ver [2]), $m_1 \in \mathbb{R}^+$, $m_2 \in \mathbb{R}$).

Después de hacer todas las iteraciones y el límite al infinito en la **primera etapa**, obtenemos la función de Pick $K_{V_{\pi/2}^*}(z)$. Para hacer que ésta función corresponda a algún operador de Sturm-Liouville, debemos, en su representación de Pick, adicionar la constante necesaria C que haga que dicha representación corresponda, ahora sí, a algún operador de Sturm-Liouville. Tendremos entonces definida la siguiente función :

$$K_{\phi_{\pi/2}}(z) = F(K_{V_{\pi/2}^*}(z)) = K_{V_{\pi/2}^*}(z) + C.$$

Definamos entonces ϕ_{η} y v_{α}^* las familias de medidas como en el teorema 1 y sea

$$K_{\phi_{\pi/2}}(z) := F(K_{V_{\pi/2}^*}(z)).$$

donde $F(w) = w + C$, $C \in \mathbb{R}$, es decir

$$K_{\phi_{\pi/2}}(z) := F(K_{V_{\pi/2}^*}(z)) = K_{V_{\pi/2}^*}(z) + C.$$

con η y α^* relacionadas de la siguiente manera :

$$\operatorname{tg}(\eta) = C + \operatorname{tg}(\alpha^*), \quad \eta, \alpha^* \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon), \text{ para toda } \varepsilon > 0. \quad (62)$$

Entonces, por el teorema 1A inciso B), podemos concluir que las partes singulares de las medidas son equivalentes, es decir:

$$\phi_{\eta}^s \sim \nu_{\alpha^*}^{*s}$$

y como $\alpha^* \in (\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon)$, entonces (como se demuestra a continuación)

$$\eta \in \left(\operatorname{arctg}(1 + C), \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} + C\right) \right), \text{ si } \eta \in (-\pi/2, \pi/2). \quad (63)$$

Demostremos las cotas para η :

▲

Por (62) tenemos lo siguiente :

$$* \text{ si } \alpha^* \rightarrow (\pi/4 - \varepsilon)^+ \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha^*) \rightarrow \operatorname{tg}(\pi/4 - \varepsilon)^+ \Rightarrow$$

como

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) - \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\varepsilon)} = \frac{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} = 1,$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\eta) \rightarrow (1 + C)^+ \Rightarrow \eta \rightarrow \operatorname{arctg}(1 + C)^+, \text{ si } \eta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

$$* \text{ si } \alpha^* \rightarrow (\pi/4 + \varepsilon)^- \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha^*) \rightarrow \operatorname{tg}(\pi/4 + \varepsilon)^- \Rightarrow$$

como

$$\operatorname{tg}(\pi/4 + \varepsilon) = \frac{\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\pi/4)\operatorname{tg}(\varepsilon)} = \frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} =$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(\eta) \rightarrow \left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} + C \right)^- \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta \rightarrow \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} + C \right)^-, \text{ si } \eta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

con lo que queda demostrada la relación (63).

De este modo hemos obtenido una familia de medidas $\{ \phi_\eta \}_{\eta \in (-\pi/2, \pi/2)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville, tales que $\phi_\eta^s(J) > 0$ y $\phi_\eta^{a.c}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que

$$\eta \in \left(\operatorname{arctg}(1 + C), \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)} + C \right) \right), C \in \mathbb{R}.$$

Tercera etapa

Finalmente haremos un análisis sobre cómo afectan los posibles valores y signos que pudiera adoptar la constante C que se utiliza en el punto anterior. Con éste fin, vamos a desplazar el intervalo en donde se encuentran las η de la siguiente manera :

La familia de funciones generada por $K_{\phi_{\pi/2}}(z)$, según el **teorema 1**, es :

$$f_\eta(K_{\phi_{\pi/2}}(z)) = K_{\phi_\eta}(z). \quad (64)$$

Tenemos que $\eta \in (-\pi/2, \pi/2)$, entonces, para cada $\eta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ fija, vamos a considerar la familia de funciones generada de la siguiente manera, basándonos en la propiedad en el inciso A) de la **proposición 1**:

$$f_{\eta'}(K_{\phi_{\pi/2}}(z)) = f_{\beta^\wedge}(f_{\eta_0}(K_{\phi_{\pi/2}}(z))) = f_{\beta^\wedge + \eta_0 - \pi/2}(K_{\phi_{\pi/2}}(z)), \quad (65)$$

con $\beta^\wedge \in [0, \pi)$ debido a la periodicidad de $f_\theta(z)$.

Las familias (64) y (65) son familias que tienen las mismas propiedades ya que son generadas por la misma función.

Tenemos, por (65), la relación

$$\eta' = \hat{\beta} + \eta_0 - \pi/2. \quad (66)$$

Consideremos los siguientes tres casos extremos para C :

CASO 1 : ($C \rightarrow -\infty$)

Si $C \rightarrow -\infty$, entonces, por (63), $\eta_0 \rightarrow -\pi/2$, lo que, por (66), implica que $\eta' \rightarrow \hat{\beta} - \pi$, entonces, como $\hat{\beta} \in [0, \pi)$, tendremos lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \rightarrow -\pi, \\ * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi \Rightarrow \eta' \rightarrow 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \eta' \in [-\pi, 0):$$

Ésta situación se puede representar mediante el esquema en la figura 13.

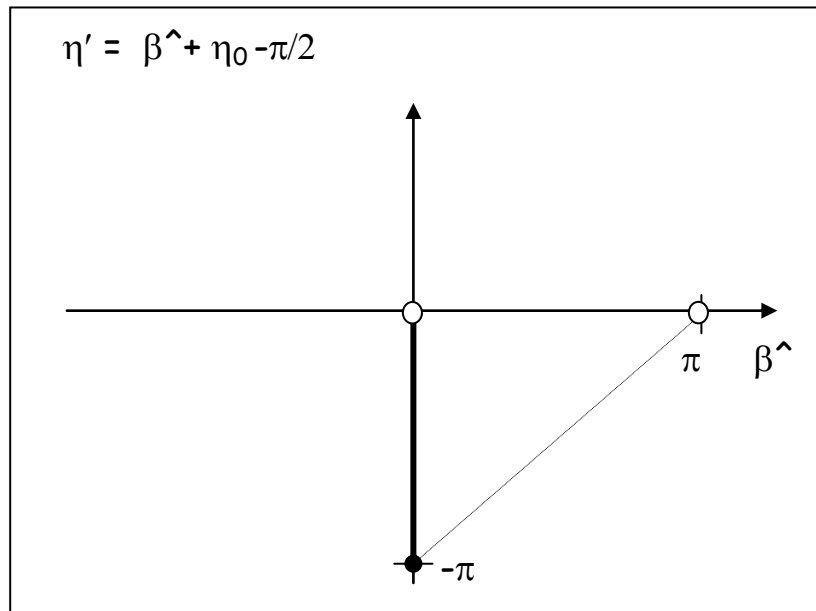


Figura 13

Quedará más claro lo que está pasando si generalizamos el intervalo $[0, \pi)$, es decir, si tomamos:

$$\hat{\beta} \in [\pi - \alpha - \varepsilon, \pi - \alpha), \text{ con } \alpha \in [0, \pi - \varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Tendremos entonces lo siguiente :

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon - \pi/2 - \pi/2 = -\alpha - \varepsilon, \\ * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha - \pi/2 - \pi/2 = -\alpha. \end{array} \right\} \Rightarrow \eta' \in [-\alpha - \varepsilon, -\alpha), \quad (67)$$

pero $\alpha \in [0, \pi - \varepsilon]$, por lo que, por (67), tendremos que :

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \in [-\varepsilon, 0),$$

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow \pi - \varepsilon \Rightarrow \eta' \in [-\pi, -\pi + \varepsilon),$$

lo que nos indica que efectivamente $\eta' \in [-\pi, 0)$, pero dentro de pequeños subintervalos como se muestra en la figura 14:

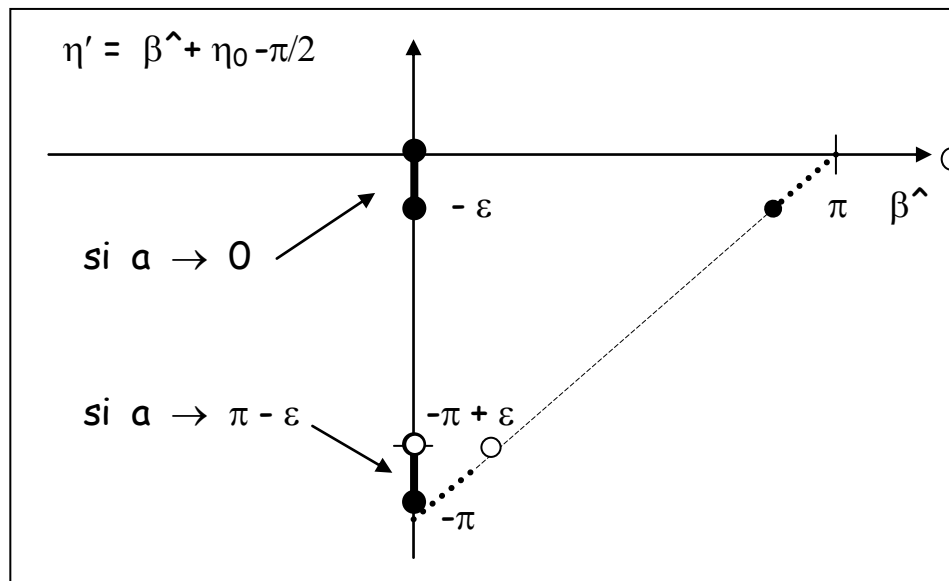


Figura 14

Por lo tanto, se obtiene el siguiente RESULTADO :

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe una familia de medidas $\{ \xi_{\eta'} \}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = (-\pi + \alpha, -\pi + \alpha + \varepsilon]$, con $\alpha \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

$$\text{CASO 2 : } (C \rightarrow -\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)})$$

$$\text{Si } C \rightarrow -\frac{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon)}{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon)}, \text{ entonces, por (63),}$$

$$\eta_0 \rightarrow 0,$$

lo que, por (66), implica que $\eta' \rightarrow \hat{\beta} - \pi/2$, entonces, como $\hat{\beta} \in [0, \pi)$, tendremos lo siguiente :

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \rightarrow -\pi/2, \\ * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi/2. \end{array} \right\} \Rightarrow \eta' \in [-\pi/2, \pi/2) :$$

Ésta situación se puede representar mediante el esquema en la figura 15.

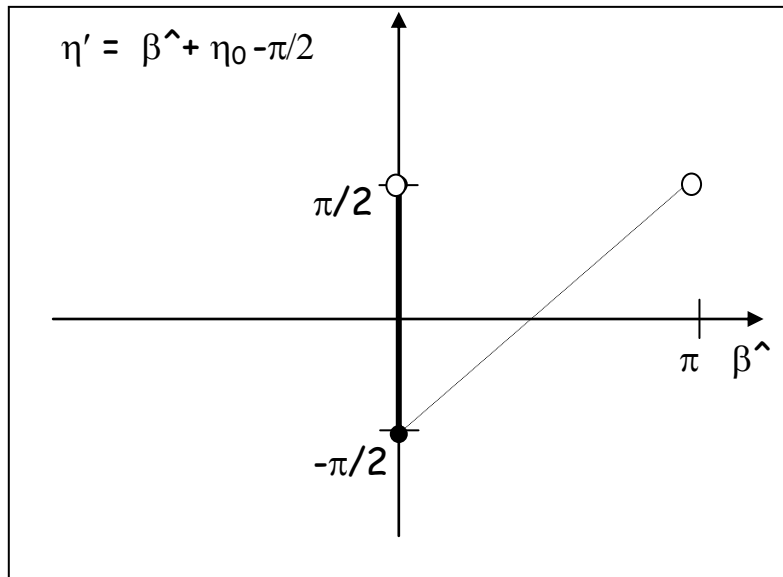


Figura 15

Análogamente como en el caso 1, quedará más claro lo que está pasando si generalizamos el intervalo $[0, \pi)$, es decir, si tomamos:

$$\hat{\beta} \in [\pi - \alpha - \varepsilon, \pi - \alpha), \text{ con } \alpha \in [0, \pi - \varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Tendremos entonces lo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon + 0 - \pi/2 = \pi/2 - \alpha - \varepsilon, \\ * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha + 0 - \pi/2 = \pi/2 - \alpha. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta' \in [\pi/2 - \alpha - \varepsilon, \pi/2 - \alpha), \quad (68)$$

pero $\alpha \in [0, \pi - \varepsilon]$, por lo que, por (68), tendremos que:

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \in [\pi/2 - \varepsilon, \pi/2),$$

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow \pi - \varepsilon \Rightarrow \eta' \in [-\pi/2, -\pi/2 + \varepsilon),$$

lo que nos indica que efectivamente $\eta' \in [-\pi/2, \pi/2)$, pero dentro de pequeños subintervalos como se muestra en la figura 16:

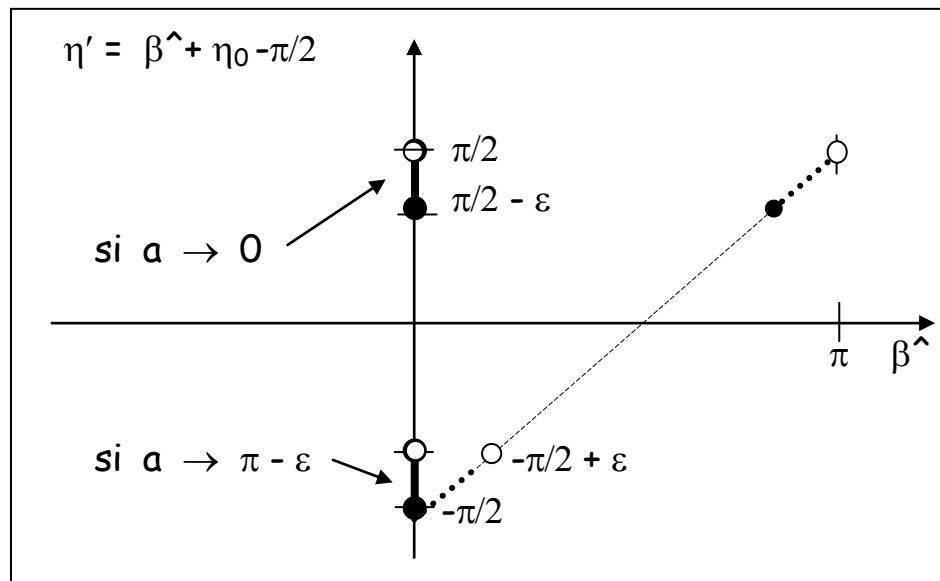


Figura 16

Por lo tanto, se obtiene el siguiente RESULTADO :

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe una familia de medidas $\{ \xi_{\eta'} \}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = [-\pi/2 + a, -\pi/2 + a + \varepsilon)$, con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

CASO 3 : ($C \rightarrow +\infty$)

Si $C \rightarrow +\infty$, entonces, por (63), $\eta_0 \rightarrow \pi/2$, lo que, por (66), implica que $\eta' \rightarrow \beta^{\wedge}$, entonces, como $\beta^{\wedge} \in [0, \pi)$, tendremos lo siguiente :

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \beta^{\wedge} \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \rightarrow 0, \\ * \text{ si } \beta^{\wedge} \rightarrow \pi \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi. \end{array} \right\} \Rightarrow \eta' \in [0, \pi) :$$

Ésta situación se puede representar mediante el esquema en la figura 17.

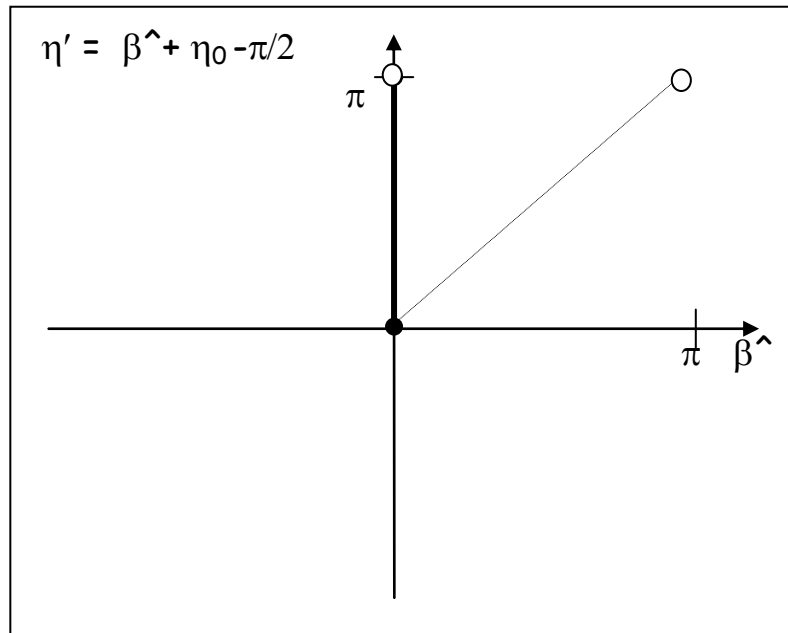


Figura 17

Quedará más claro lo que está pasando, como en los casos anteriores, si generalizamos el intervalo $[0, \pi)$, es decir, si tomamos :

$$\hat{\beta} \in [\pi - \alpha - \varepsilon, \pi - \alpha), \text{ con } \alpha \in [0, \pi - \varepsilon], \varepsilon > 0.$$

Tendremos entonces lo siguiente :

$$\left. \begin{array}{l} * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha - \varepsilon + \pi/2 - \pi/2 = \pi - \alpha - \varepsilon, \\ * \text{ si } \hat{\beta} \rightarrow \pi - \alpha \Rightarrow \eta' \rightarrow \pi - \alpha + \pi/2 - \pi/2 = \pi - \alpha. \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\eta' \in [\pi - \alpha - \varepsilon, \pi - \alpha), \quad (69)$$

pero $\alpha \in [0, \pi - \varepsilon]$, por lo que, por (69), tendremos que :

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \eta' \in [\pi - \varepsilon, \pi),$$

$$* \text{ si } \alpha \rightarrow \pi - \varepsilon \Rightarrow \eta' \in [0, \varepsilon),$$

lo que nos indica que efectivamente $\eta' \in [0, \pi)$, pero dentro de pequeños subintervalos como se muestra en la figura 18:

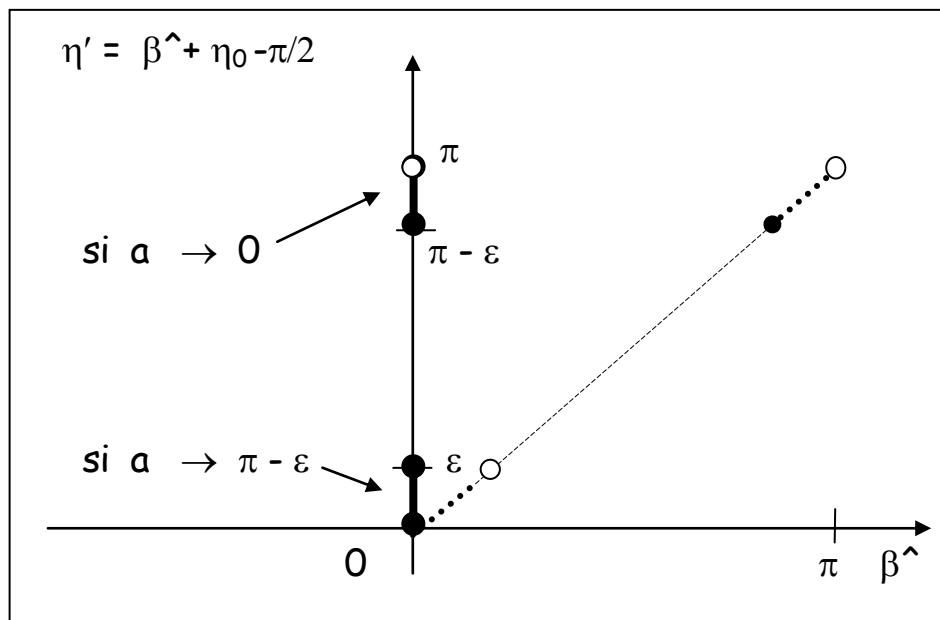


Figura 18

Por lo tanto, se obtiene el siguiente RESULTADO :

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe una familia de medidas $\{ \xi_{\eta'} \}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = [\pi - a - \varepsilon, \pi - a)$, con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

De este modo, por los casos 1, 2 y 3 y todos los casos intermedios para $\eta_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$, se obtiene, generalizando todos los casos, el siguiente resultado:

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Existe una familia de medidas $\{ \xi_{\eta'} \}_{\eta' \in (-\pi, \pi)}$, correspondientes a operadores de Sturm-Liouville y existe un conjunto $B = \pm [\pi - a - \varepsilon, \pi - a)$, (donde $-[b, c) = (-c, -b]$), con $a \in [0, \pi - \varepsilon]$, tales que $\xi_{\eta'}^s(J) > 0$ y $\xi_{\eta'}^{a.c.}(J) > 0$ para todo subintervalo $J \subset I$, siempre que $\eta' \in B$.

4.5 APLICACIÓN 5 :

Relaciones integrales entre las medidas μ_β y ν_α .

Aplicando el teorema 1 podemos encontrar relaciones integrales como las que se enuncian en el siguiente lema:

Lema 3:

Sean μ_β y ν_α las medidas definidas por las relaciones (1) y (3). Si α y β son tales que cumplen con la relación (4), es decir, tales que

$$\alpha(\beta) = \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta))), \quad \beta \in (-\pi/2, \pi/2),$$

entonces se cumplen las siguientes relaciones:

$$A) \int_{-\pi/2}^0 \mu_\beta^s(A) d\beta = \int_0^{\pi/4} \nu_\alpha^s(A) d\alpha$$

$$B) \int_0^{\pi/2} \mu_\beta^s(A) d\beta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \nu_\alpha^s(A) d\alpha$$

$$C) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu_\beta^s(A) d\beta = \int_0^{\pi/2} \nu_\alpha^s(A) d\alpha$$

DEMOSTRACIÓN

Para tales medidas μ_β y ν_α , según el teorema 1, se cumple que

$$\mu_\beta^s(A) = \alpha'(\beta) \nu_\alpha^s(A), \quad (70)$$

para cada conjunto de Borel A .

Así que, para cualquiera de las relaciones A), B) o C) que queremos demostrar, tendrá lugar lo siguiente (los límites de integración con respecto a α los denotaremos en general con a y b).

Consideremos la integral

$$\int_a^b \mu_\beta^s(A) d\beta =$$

Por (70), ésta integral se puede reescribir de la siguiente manera

$$= \int_a^b [\alpha'(\beta) v_\alpha^s(A)] d\beta =$$

pero α , según el teorema, es función de β , así que $d\alpha = \alpha'(\beta) d\beta$, por lo que la integral queda

$$= \int_c^d v_\alpha^s(A) d\alpha.$$

donde c y d serán los nuevos límites de integración con respecto a α . Obtuvimos entonces la siguiente relación

$$\int_a^b \mu_\beta^s(A) d\beta = \int_c^d v_\alpha^s(A) d\alpha \quad (71)$$

c y d cambiarán de acuerdo a las correspondientes a y b en cada uno de los incisos a demostrar. En efecto :

En el inciso A) $a = -\pi/2$ y $b = 0$, así que, considerando la relación (4), tendremos que

$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta \rightarrow -\pi/2^+ &\Rightarrow \text{tg}(\beta) \rightarrow -\infty \Rightarrow \exp(\text{tg}(\beta)) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \text{tg}^{-1}(\exp(\text{tg}(\beta))) \rightarrow 0^+ \\ &\Rightarrow \alpha \rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

por lo que en éste caso $c = 0$.

$$\begin{aligned} * \text{ si } \beta \rightarrow 0^- &\Rightarrow \text{tg}(\beta) \rightarrow 0^- \Rightarrow \exp(\text{tg}(\beta)) \rightarrow 1^- \Rightarrow \text{tg}^{-1}(\exp(\text{tg}(\beta))) \rightarrow \pi/4^- \\ &\Rightarrow \alpha \rightarrow \pi/4^- \end{aligned}$$

por lo que en éste caso $d = \pi/4$.

De éste modo, sustituyendo en (71) los respectivos valores de a, b, c y d para éste caso, queda demostrada la relación en el inciso A).

En el inciso B) $a = 0$ y $b = \pi/2$, así que, considerando la relación (4), tendremos que

$$* \text{ si } \beta \rightarrow 0^+ \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) \rightarrow 0^+ \Rightarrow \exp(\operatorname{tg}(\beta)) \rightarrow 1^+ \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta))) \rightarrow \pi/4^+ \\ \Rightarrow \alpha \rightarrow \pi/4^+$$

por lo que en éste caso $c = \pi/4$.

$$* \text{ si } \beta \rightarrow \pi/2^- \Rightarrow \operatorname{tg}(\beta) \rightarrow +\infty \Rightarrow \exp(\operatorname{tg}(\beta)) \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{tg}^{-1}(\exp(\operatorname{tg}(\beta))) \rightarrow \pi/2^- \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha \rightarrow \pi/2^-$$

por lo que en éste caso $d = \pi/2$.

De éste modo, sustituyendo en (71) los respectivos valores de a, b, c y d para éste caso, queda demostrada la relación en el inciso B).

El inciso C) es una consecuencia directa de los dos incisos anteriores ya que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mu_{\beta}^s(A) d\beta = \int_{-\pi/2}^0 \mu_{\beta}^s(A) d\beta + \int_0^{\pi/2} \mu_{\beta}^s(A) d\beta =$$

aplicando los incisos A) y B),

$$= \int_0^{\pi/4} v_{\alpha}^s(A) d\alpha + \int_{\pi/4}^{\pi/2} v_{\alpha}^s(A) d\alpha = \int_0^{\pi/2} v_{\alpha}^s(A) d\alpha.$$

El lema queda entonces totalmente demostrado.

Q.E.D.

5. APÉNDICE

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 1

Proposición 1:

Sea $f_\theta(z)$ la función definida en (0). Entonces :

A) $f_\beta(f_\alpha(z)) = f_{\alpha+\beta-\pi/2}(z)$.

B) $f_\theta(z) = f_{\theta+\pi}(z)$

C) $f_{\pi/2}(z) = z$.

DEMOSTRACIÓN :

$$\begin{aligned} \text{A) } f_\beta(f_\alpha(z)) &= \frac{\cos(\beta) + f_\alpha(z) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - f_\alpha(z) \cos(\beta)} = \frac{\cos(\beta) + \frac{\cos(\alpha) + z \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) - z \cos(\alpha)} \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) - \frac{\cos(\alpha) + z \operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha) - z \cos(\alpha)} \cos(\beta)} = \\ &= \frac{\cos(\beta) (\operatorname{sen}(\alpha) - z \cos(\alpha)) + (\cos(\alpha) + z \operatorname{sen}(\alpha)) \operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{sen}(\beta) (\operatorname{sen}(\alpha) - z \cos(\alpha)) - (\cos(\alpha) + z \operatorname{sen}(\alpha)) \cos(\beta)} = \\ &= \frac{\cos(\beta) \operatorname{sen}(\alpha) + \cos(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) + z (\operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(\beta) - \cos(\alpha) \cos(\beta))}{\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(\alpha) - \cos(\alpha) \cos(\beta) - z (\operatorname{sen}(\beta) \cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(\beta))} = \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + z (-\cos(\alpha + \beta))}{-\cos(\alpha + \beta) - z \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} = \end{aligned}$$

pero como

$$\operatorname{sen}(\pi/2 \pm \theta) = \cos(\theta) \Rightarrow \operatorname{sen}(\pm\theta - \pi/2) = -\cos(\theta)$$

$$\text{y } \pm \operatorname{sen}(\theta) = \cos(\pi/2 \pm \theta) = \cos(\pm\theta - \pi/2) \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \cos(\theta - \pi/2),$$

entonces

$$= \frac{\cos(\alpha + \beta - \pi/2) + z \operatorname{sen}(\alpha + \beta - \pi/2)}{\operatorname{sen}(\alpha + \beta - \pi/2) - z \cos(\alpha + \beta - \pi/2)} = f_{\alpha+\beta-\pi/2}(z),$$

por definición de $f_{\theta}(z)$. De este modo queda demostrada la parte A) de la proposición.

$$\begin{aligned} \text{B) Consideremos: } f_{\theta+\pi}(z) &= \frac{\cos(\theta + \pi) + z \operatorname{sen}(\theta + \pi)}{\operatorname{sen}(\theta + \pi) - z \cos(\theta + \pi)} = \\ &= \frac{\cos(\theta) \cos(\pi) - \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\pi) + z (\operatorname{sen}(\theta) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta) \cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi) \cos(\theta) - z (\cos(\theta) \cos(\pi) - \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\pi))} = \\ &= \frac{-\cos(\theta) + z(-\operatorname{sen}(\theta))}{-\operatorname{sen}(\theta) - z(-\cos(\theta))} = \frac{\cos(\theta) + z \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta) - z \cos(\theta)} = f_{\theta}(z). \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la parte B) de la proposición.

$$\text{C) Calculemos: } f_{\pi/2}(z) = \frac{\cos(\pi/2) + z \operatorname{sen}(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2) - z \cos(\pi/2)} = \frac{0 + z(1)}{1 - z(0)} = z$$

La proposición se ha demostrado completamente.

Q.E.D.

6. REFERENCIAS

- [1]. B.M. Levitan, I.S. Sargsjan, *Sturm-Liouville and Dirac Operators*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [2]. D.B. Pearson, *Quantum Scattering and Spectral Theory*. Academic Press, 1988.
- [3]. William F. Donoghue, Jr. *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation*. Springer-Verlag, 1974.
- [4]. M. A. Naimark, *Linear Differential Operators, Part II. Linear Differential Operators in Hilbert Space*. Frederick Ungar Publishing Co., Inc. New York, 1968. págs. 282-285.
- [6] Levitan, B. M. y Sargsjan, I. S. *Introduction to Spectral Theory : Self-Adjoint Differential Operators*, Am. Math. Soc. Trans. 39. 1975. págs. 107-114.
- [7]. R. del Río and B. Simon, *Point spectrum and mixed spectral types for rank one perturbations*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 125 No. 12 pp. 3593-3599, december 1997.
- [8]. R. del Río, B. Simon and G. Stoltz, *Stability of spectral types for Sturm-Liouville operators*, Mathematical Research Letters 1, pp. 437-450 (1994).
- [9]. M. S. P. Eastham and H. Kalf, *Schrödinger-type operators with continuous spectra*, Pitman Advanced Publishing Program, 1982.
- [10]. D. J. Gilbert and D.B. Pearson, *On Subordinacy and Analysis of the Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 128 No. 1 pp. 30-56, November 15, 1987.
- [11]. M. A. Naimark, *Linear Differential Operators, Part II. Linear Differential Operators in Hilbert Space*. George G. Harrap & Co., Ltd., 1968.
- [12]. A. Poltoratski, *The Krein spectral shift and rank one perturbations of spectra*, St. Petersburg Math. J., Vol. 10 No. 5 pp. 833-859 (1999).
- [13]. B. Simon, *Spectral analysis of rank one perturbations and applications*, CRM Proceedings and Lecture Notes Vol 8 pp. 109-149, 1995.
- [14]. R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Decker Inc., New York and Bosel, pp. 190, 1977.

[15]. Rudin W., *Real and Complex Analysis*.

[16]. Yiannis Takis Christodoulides, *Spectral theory of Herglotz Functions and their compositions, and the Schrödinger equation*, Tesis doctoral de la Universidad de Hull, Inglaterra, 2001.