UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL Y EL TEOREMA WONDERLAND

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

I R B I N G J O N Á S A R I S T A C A R R E R A

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Rafael René del Río Castillo

2012

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL Y EL TEOREMA WONDERLAND

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A:

I R B I N G J O N Á S A R I S T A C A R R E R A

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Rafael René del Río Castillo

2012

Hoja de Datos del Jurado

I. **Datos del alumno**

Arista
Carrera
Irbing Jonás
26 13 18 96
Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias
Matemáticas
304063990

II. **Datos del tutor**

Dr.
Rafael René
del Río
Castillo

III. **Datos del sinodal 1**

Dr.
Luis Octavio
Silva
Pereyra

IV. **Datos del sinodal 2**

Dr.
Rubén Alejandro
Martínez
Avendaño

V. **Datos del sinodal 3**

Dra.
Mónica Alicia
Clapp
Jiménez-Labora

VI. **Datos del sinodal 4**

Dr.
Javier Fernando
Rosenblueth
Laguette

VII. **Datos del trabajo escrito**

Descomposición espectral y el teorema Wonderland
115 págs.
2012

A mis padres

Índice general

Introducción

En palabras de M. Reed y B. Simon en su libro *Methods of Modern Mathematical Physics*, el análisis espectral de un operador T es uno de los tres problemas generales que ocurren de manera importante en la formulación matemática de la Mecánica cuántica y a su vez, éste "se centra en indentificar los cinco componentes del espectro $\sigma_{ess}(T)$, $\sigma_{disc}(T)$, $\sigma_{ac}(T)$, $\sigma_{sc}(T)$ y $\sigma_p(T)$". Ya que muchos de los operadores que ocurren en Física matemática son no acotados, la derivación rigurosa de fórmulas explícitas e investigaciones de la estructura matemática interna de este tipo de operadores se vuelven naturalmente una tarea que conlleva dificultades pero que también proporciona retos muy interesantes.

Una de estas dificultades fue sin duda el estudio del espectro singular continuo $\sigma_{sc}(T)$ en tiempos más o menos recientes. Durante las décadas de 1960, 1970 y 1980 la visión general del espectro singular continuo era radicalmente diferente a la que es ahora, considerado como un fenómeno muy poco común y que requería esfuerzo extra para probar si ocurría o no, era visto como una 'patología' dentro de la Teoría de operadores e 'indeseable' para la Teoría matemática de la mecánica cuántica. Cycon, Froese, Kirsch y Simon en su libro *Schrödinger Operators* de 1987 escriben:

> *"El sentido común suele decirnos que los operadores de Schrödinger deberían tener espectro absolutamente continuo más algo de espectro puntual discreto, mientras que espectro singular continuo es una patología que no debería ocurrir en ejemplos con V acotado."*

Alrededor del año 1994, B. Simon inició lo que se conoce como 'la revolución del espectro singular continuo' que consistió en la publicación de varios artículos en donde se mostraba que este tipo de espectro era en realidad un fenómeno mucho más común de lo que se pensaba hasta ese momento; de entre esos primeros resultados de B. Simon que revolucionaron la visión sobre los operadores con espectro singular continuo, quizá el más notable fue al que denominó: el Teorema Wonderland.

Dado un espacio métrico completo (X, d) de operadores autoadjuntos actuando en un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$, bajo ciertas condiciones se garantiza que los operadores en X que tienen espectro puramente singular continuo forman un conjunto genérico, es decir, un conjunto G_δ denso en X. Ésto es lo que afirma el Teorema Wonderland y que demostramos detalladamente en el Capítulo 4. Cabe señalar que la demostración que presentamos no es la misma que aparece en el artículo original [Sim95] de B. Simon, por el contrario, desarrollamos con todo detalle un comentario hecho por S. De Bièvre y G. Forni en [BF98] donde se propone utilizar el Teorema de Wiener (teorema 4.1) para la demostración. Queremos comentar que ya en el año 2009 C. R. de Oliveira en su libro [dO09] retomó la demostración propuesta en [BF98] pero consideramos que omite nuevamente todos los detalles involucrados en la prueba.

El resto del trabajo está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 se desarrollan exclusivamente aquellos resultados y terminología de Análisis funcional que son utilizados a lo largo de los capítulos restantes.

El Capítulo 2 está destinado a obtener la descomposición espectral

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T)$$

vía la descomposición del espacio de Hilbert $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$, aunque existe basta literatura al respecto, la prueba que presentamos aquí no hace uso de teoremas de decomposición de medidas como el Teorema de descomposición de Lebesgue, que es un argumento común en la literatura (ver por ejemplo [Kat95, pág. 518]). Más aún, el análisis anterior nos llevó a la conclusión que bajo ciertas restricciones a las medidas μ, el Teorema de descomposición de Lebesgue se puede ver como una consecuencia de la descomposición espectral anterior, esto lo tratamos en la sección 2.3.

El Capítulo 3 tiene como objetivo dar ejemplos sobre algunas consecuencias de la descomposición tratada en el Capítulo 2, decidimos trabajar algunos temas de dinámica pues consideramos que ejemplificaban de buena manera la relación que existe entre conceptos de Teoría espectral y conceptos de la Teoría matemática de la mecánica cuántica, demostramos particularmente el Teorema de Stone y el Teorema de RAGE. Ya que nuestro enfoque fue totalmente matemático, recomendamos al lector consultar los libros [dO09], [Tes09], [Amr81], [Amr09] y [BEH08], entre otros, para un estudio profundo acerca de su relación con los conceptos de Mecánica cuántica.

Mencionamos al lector que al final de cada capítulo decidimos agregar una sección titulada 'Notas' en donde escribimos comentarios que complementan la información presentada en los capítulos. Finalmente, concluímos con dos apéndices de orden técnico y a los cuales se hace referencia durante todo el trabajo.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Como su nombre lo indica, este capítulo está dedicado a enunciar algunos resultados preliminares y terminología que utilizaremos a lo largo de este trabajo, debido a que sólo tratamos la teoría que es utilizada en los capítulos siguientes, advertimos al lector que no hacemos un análisis detallado de los temas e incluso muchos de los teoremas y proposiciones serán enunciados sin prueba. En la sección **Notas** al final del capítulo damos algunas referencias para consultar todos los temas expuestos en estos preliminares.

1.1. Geometría de los espacios de Hilbert

Espacios de Hilbert

Debido a que en la totalidad de este trabajo utilizamos con frecuencia propiedades de los espacios con producto interior, comenzaremos con una breve descripción acerca de las propiedades 'geométricas' inherentes a los espacios de Hilbert.

Definición 1.1. *Un* **espacio con producto interior** *o* **espacio pre-Hilbert** *es un espacio vectorial $\mathfrak{H}$ sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) con una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ tal que para todos $\psi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}$ y $a \in \mathbb{C}$ se cumple:*

i. $\langle \psi, a\varphi_1 + \varphi_2 \rangle = a\langle \psi, \varphi_1 \rangle + \langle \psi, \varphi_2 \rangle$.

ii. $\langle \psi, \varphi_1 \rangle = \overline{\langle \varphi_1, \psi \rangle}$.

iii. *Si* $\psi \neq 0$ *entonces* $\langle \psi, \psi \rangle > 0$.

La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{C}$ es llamada **producto escalar** *o* **producto punto***.*

Una consecuencia inmediata de los incisos I y II de la definición anterior es que el producto interior es **conjugado-lineal** en la primera 'entrada', es decir, que para todos $\psi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}$ y $a \in \mathbb{C}$

$$\langle a\varphi_1 + \varphi_2, \psi\rangle = \overline{a}\langle\varphi_1, \psi\rangle + \langle\varphi_2, \psi\rangle$$

ya que

$$\begin{aligned}\langle a\varphi_1 + \varphi_2, \psi\rangle &= \overline{\langle\psi, a\varphi_1 + \varphi_2\rangle}\\ &= \overline{a\langle\psi, \varphi_1\rangle + \langle\psi, \varphi_2\rangle}\\ &= \overline{a}\overline{\langle\psi, \varphi_1\rangle} + \overline{\langle\psi, \varphi_2\rangle}\\ &= \overline{a}\langle\varphi_1, \psi\rangle + \langle\varphi_2, \psi\rangle.\end{aligned}$$

Además, si $\mathfrak{H}$ es un espacio con producto interior, el producto interior induce una **norma** en $\mathfrak{H}$ de la siguiente manera: si definimos para cada $\psi \in \mathfrak{H}$ [1]

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle\psi, \psi\rangle}, \tag{1.1}$$

entonces la función $\|\cdot\| : \mathfrak{H} \to \mathbb{R}$ satisface:

- $\|\psi\| \geq 0$ para todo $\psi \in \mathfrak{H}$ y $\|\psi\| = 0$ si y sólo si $\psi = 0$.
- $\|a\psi\| = |a|\|\psi\|$ para toda $a \in \mathbb{C}$ y $\psi \in \mathfrak{H}$.
- $\|\psi + \varphi\| \leq \|\psi\| + \|\varphi\|$ para todos $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$.

Como sabemos, esta norma a su vez induce naturalmente una métrica $d : \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} \to \mathbb{R}$ en $\mathfrak{H}$ dada por

$$d(\psi, \varphi) := \|\psi - \varphi\|, \tag{1.2}$$

entonces, si $\mathfrak{H}$ es un espacio con producto interior, $\mathfrak{H}$ también tiene la estructura de espacio métrico[2] y como consecuencia todas las definiciones y propiedades relacionadas a la **topología** de espacios métricos tales como conjuntos abiertos, cerrados, convergencia y continuidad tienen sentido en un espacio pre-Hilbert, en particular, recordemos la siguiente definición:

Definición 1.2. *Sea (X, d) un espacio métrico, una sucesión $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset X$ es de* **Cauchy** *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \geq N_\varepsilon$ se tiene*

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

[1] Claramente $\langle\psi, \psi\rangle \in \mathbb{R}$ si $\psi \neq 0$ por el inciso III de la definición 1.1, además, si $\psi = 0$ entonces $\langle\psi, \psi\rangle = \langle\psi, 0 \cdot \psi\rangle = 0\langle\psi, \psi\rangle = 0$.

[2] Un espacio métrico (X, d) es un conjunto X junto con una función distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente: para todos $x, y, z \in X$

I. $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

II. $d(x, y) = d(y, x)$.

III. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un espacio métrico (X, d) se dice **completo** si toda sucesión de Cauchy en X converge a un elemento en X. Con esto en mente podemos enunciar finalmente la definición de espacio de Hilbert:

Definición 1.3. *Decimos que* $(\mathfrak{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *es un* **espacio de Hilbert** *si* $\mathfrak{H}$ *es un espacio pre-Hilbert y además es* **completo** *con respecto a la métrica inducida por su producto escalar -ver(1.1) y (1.2)-.*

Las propiedades básicas sobre espacios de Hilber son enunciadas en la siguiente proposición.

Proposición 1.4. *Sea* $\mathfrak{H}$ *un espacio de Hilbert (sobre* $\mathbb{C}$*), entonces*

I. **(Desigualdad del triángulo)** *Para cualesquiera* $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$ *se tiene*

$$\|\psi + \varphi\| \leq \|\psi\| + \|\varphi\|.$$

II. **(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)** *Para cualesquiera* $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$

$$|\langle \psi, \varphi \rangle| \leq \|\psi\| \|\varphi\|.$$

III. **(Ley del paralelogramo)** *Para cualesquiera* $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$

$$\|\psi + \varphi\|^2 + \|\psi - \varphi\|^2 = 2\|\psi\|^2 + 2\|\varphi\|^2.$$

IV. **(Identidad de polarización)** *Para cualesquiera* $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$ *se cumple la igualdad*

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \frac{1}{4}(\|\psi + \varphi\|^2 - \|\psi - \varphi\|^2 + i\|\psi - i\varphi\|^2 - i\|\psi + i\varphi\|^2).$$

Una consecuencia del inciso II de la proposición anterior es que el producto escalar es continuo en cada entrada, es decir:

Corolario 1.5. *Si* $\varphi_n \to \varphi$ *en* $\mathfrak{H}$*, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \langle \psi, \varphi_n \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}$$

y también

$$\lim_{n \to \infty} \langle \varphi_n, \psi \rangle = \langle \varphi, \psi \rangle, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}.$$

Demostración. Ambas afirmaciones son una consecuencia inmediata de la desigualdad de Cauchy-Schwarz pues por ejemplo, para el primer caso

$$|\langle \psi, \varphi_n \rangle - \langle \psi, \varphi \rangle| = |\langle \psi, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq \|\psi\| \|\varphi_n - \varphi\| \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$, ya que $\varphi_n \to \varphi$.

□

Una pregunta que vale la pena plantearse en este momento es: ¿cuándo un subconjunto V del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ es un subespacio de $\mathfrak{H}$? es decir, ¿cuándo se cumple que $V \subset \mathfrak{H}$ es él mismo un espacio de Hilbert con el producto interno restringido de $\mathfrak{H}$? Claramente una primera condición es pedir que V sea un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$, es decir, que $0 \in V$ y que para todos $\psi, \varphi \in V$ y $a \in \mathbb{C}$

$$\psi + a\varphi \in V,$$

con lo anterior podemos inducir naturalmente la estructura de espacio pre-Hilbert al subconjunto lineal V pues basta con restringir el producto interno de $\mathfrak{H}$ a V. Así, lo último que necesitamos para que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle|_V)$ sea también un espacio de Hilbert es que V sea completo con respecto a la métrica inducida por $\langle \cdot, \cdot \rangle|_V$, que claramente es la métrica de $\mathfrak{H}$ restringida a V. Para ello, recordemos que si (X, d) es un espacio métrico completo, un subespacio A de X es completo (con respecto a la métrica inducida por X) si y sólo si A es cerrado en X.

Una consecuencia inmediata de lo anterior es:

Proposición 1.6. *Un subconjunto lineal V de un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ es un subespacio de $\mathfrak{H}$ si y sólo si V es cerrado en $\mathfrak{H}$.*

Por último, diremos que un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ es **separable** si posee un subconjunto denso a lo más numerable[3] X, es decir, si $X \subset \mathfrak{H}$ es a lo más numerable y $\overline{X} = \mathfrak{H}$.

En este trabajo asumiremos que todos los espacios de Hilbert son separables.

En la siguiente sección daremos algunos conceptos equivalentes a la definición de separabilidad que acabamos de dar.

Ortogonalidad y bases ortonormales

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Decimos que los vectores $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$ son **ortogonales** o **perpendiculares** si

$$\langle \psi, \varphi \rangle = 0,$$

lo anterior también será denotado por $\psi \perp \varphi$. Si $\psi \perp \varphi$ un cálculo sencillo nos demuestra que

$$\|\psi + \varphi\|^2 = \|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Además, diremos que un vector $\psi \in \mathfrak{H}$ es **unitario** o **normalizado** si $\|\psi\| = 1$.

Sea M un subconjunto de $\mathfrak{H}$, el conjunto

$$M^\perp := \{\psi \in \mathfrak{H} : \langle \varphi, \psi \rangle = 0, \ \ \forall \varphi \in M\}$$

es llamado el **complemento ortogonal** de M, también, denotaremos por $\operatorname{span}(M)$ al subconjunto lineal generado por M.

[3]Utilizaremos indistintamente los términos 'a lo más numerable' y 'contable' para referirnos a conjuntos que pueden ser finitos o numerables.

Proposición 1.7. *Sean M, N subconjuntos del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, entonces:*

I. $\{0\}^\perp = \mathfrak{H}$ *y* $\mathfrak{H}^\perp = \{0\}$*, es decir,* 0 *es el único elemento ortogonal a cada elemento de* $\mathfrak{H}$.

II. *Si* $M \subset N$ *entonces* $N^\perp \subset M^\perp$.

III. $M^\perp = \operatorname{span}(M)^\perp = \overline{\operatorname{span}(M)}^\perp$.

IV. $M^\perp$ *es un subconjunto lineal cerrado de* $\mathfrak{H}$ *(i.e., un subespacio de* $\mathfrak{H}$*).*

Demostración. Todos los incisos son una consecuencia directa de la linealidad y continuidad del producto interior, por ejemplo, demostremos IV.

Ya que para todo $\varphi \in M$, $\langle \varphi, 0\rangle = \langle \varphi, \varphi - \varphi\rangle = \langle \varphi, \varphi\rangle - \langle \varphi, \varphi\rangle = 0$, entonces $0 \in M^\perp$. Además, sean $\psi, \eta \in M^\perp$ y $a \in \mathbb{C}$, ya que

$$\langle \varphi, a\psi + \eta\rangle = a\langle \varphi, \psi\rangle + \langle \varphi, \eta\rangle = a0 + 0 = 0 \quad \forall \varphi \in M,$$

entonces $a\psi + \eta \in M^\perp$ por lo que $M^\perp$ es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$. Para demostrar que $M^\perp$ es cerrado, basta demostrar que $\overline{M^\perp} \subset M^\perp$. Sea $\psi \in \overline{M^\perp}$, ya que existe $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset M^\perp$ tal que $\psi_n \to \psi$ entonces

$$\langle \varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \lim_{n\to\infty} \psi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi, \psi_n\rangle = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \quad \forall \varphi \in M$$

por lo que $\psi \in M^\perp$.

□

El siguiente teorema es uno de los más útiles concernientes a subespacios de un espacio de Hilbert:

Teorema 1.8 (Teorema de la proyección). *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y M un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$. Cada $\psi \in \mathfrak{H}$ puede escribirse -de manera única- en la forma $\psi = \psi_1 + \psi_2$ con $\psi_1 \in M$ y $\psi_2 \in M^\perp$. En esta situación escribimos*

$$\mathfrak{H} = M \oplus M^\perp,$$

ψ_1 es llamado la **proyección ortogonal** *de ψ en M.*

Corolario 1.9. *Sea M un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$, entonces*

$$M^{\perp\perp} = M.$$

Si M es sólo un subconjunto de $\mathfrak{H}$, se tiene

$$M^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{span}(M)}.$$

Demostración. $M \subset M^{\perp\perp}$ ya que si $\psi \in M$, por definición $\langle \varphi, \psi\rangle = 0\ \forall \varphi \in M^\perp$ y entonces $\psi \in M^{\perp\perp}$. Tomemos ahora $\psi \in M^{\perp\perp}$, ya que M es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ el teorema de la proyección nos asegura que existen $\psi_1 \in M \subset M^{\perp\perp}$ y $\psi_2 \in M^\perp$ tal que $\psi = \psi_1 + \psi_2$, así $\psi_2 = \psi - \psi_1 \in M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$, por lo que

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = \psi_1 \in M.$$

Para la segunda parte, observemos que $\overline{\text{span}(M)}$ es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ así que por lo argumentado arriba y teniendo en cuenta que $M^{\perp} = \overline{\text{span}(M)}^{\perp}$ (proposición 1.7) se tiene

$$\overline{\text{span}(M)} = \overline{\text{span}(M)}^{\perp\perp} = M^{\perp\perp}.$$

□

El concepto de ortogonalidad entre dos vectores nos da la posibilidad también de definir nuevos conjuntos que juegan un papel importante en la teoría de espacios de Hilbert, los llamados **conjuntos ortonormales**.

Definición 1.10. *Sea Λ un conjunto de índices. El conjunto $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda} \subset \mathfrak{H}$ es llamado* **conjunto ortonormal** *si*

$$\langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle = 0 \ \text{si } \alpha \neq \beta \quad y \quad \langle \psi_\alpha, \psi_\beta \rangle = 1 \ \text{si } \alpha = \beta.$$

Para el caso de espacios de Hilbert separables, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.11. *Si $\mathfrak{H}$ es un espacio de Hilbert separable, entonces todo conjunto ortonormal es a lo más numerable.*

Demostración. Sea $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un conjunto ortonormal en $\mathfrak{H}$ y sea $X = \{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto denso a lo más numerable de $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H}$ es separable). Supongamos que el conjunto ortonormal $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es más que numerable, ya que para todos $\alpha, \beta \in \Lambda$

$$\|\psi_\alpha - \psi_\beta\|^2 = \|\psi_\alpha\|^2 + \|\psi_\beta\|^2 = 1 + 1 = 2,$$

el conjunto[4] $\{B(\psi_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}) : \alpha \in \Lambda\}$ forma una familia no numerable de bolas abiertas y que además son disjuntas dos a dos, es decir, $B(\psi_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}) \cap B(\psi_\beta, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. Ya que X es denso en $\mathfrak{H}$, para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $x_j \in X$ tal que

$$x_j \in B(\psi_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}),$$

lo que es una contradicción pues tendríamos una cantidad más que numerable de elementos de X. Así, $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es a lo más numerable.

□

Ahora bien, de manera análoga al caso de espacios vectoriales de dimensión finita, requerimos una definición del concepto de **base** para el caso de espacios de Hilbert, ésta es la siguiente:

Definición 1.12. *Un conjunto ortonormal maximal de $\mathfrak{H}$ será llamado una* **base ortonormal** *del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Es decir, M es una base ortonormal de $\mathfrak{H}$ si es un conjunto ortonormal y si para cualquier conjunto ortonormal N de $\mathfrak{H}$ ($N \neq M$) se cumple $M \not\subset N$.*

[4]Denotamos por $B(\psi_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a la bola abierta con centro en ψ_α y radio $\frac{\sqrt{2}}{2}$, es decir

$$B(\psi_\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \|\psi - \psi_\alpha\| < \frac{\sqrt{2}}{2}\}.$$

Teorema 1.13. *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y $\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunto ortonormal de $\mathfrak{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *$\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $\mathfrak{H}$.*

II. $\overline{\operatorname{span}(\{\psi_j\}_{j\in\mathbb{N}})} = \mathfrak{H}$.

III. *Para cada vector $\varphi \in \mathfrak{H}$ tenemos*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \psi_j, \varphi \rangle \psi_j.$$

Para el caso de un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$, las siguientes dos proposiciones nos serán de gran utilidad.

Proposición 1.14. *Cada espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$ tiene una base ortonormal a lo más numerable.*

Proposición 1.15. *Si $\mathfrak{H}$ es separable, entonces cada base ortonormal es a lo más numerable.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las proposiciones 1.11 y 1.14 pues si M es una base ortonormal de $\mathfrak{H}$, en particular M es un conjunto ortonormal y por lo tanto es a lo más numerable.

□

Como mencionamos en la subsección anterior, en este trabajo sólo consideraremos espacios de Hilbert (sobre $\mathbb{C}$) separables.

1.2. Operadores lineales y sus adjuntos

Nociones básicas

Sean $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert sobre $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$). Un **operador lineal**[5] T de $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$ es una función $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ tal que $T(\psi + \varphi) = T(\psi) + T(\varphi)$ y $T(a\psi) = aT(\psi)$ para todos $\psi, \varphi \in \mathfrak{D}(T)$ y $a \in \mathbb{C}$, donde $\mathfrak{D}(T)$ es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}_1$ y es llamado el **dominio** de T, la imagen del dominio bajo el operador T, $\operatorname{Ran}(T) := T[\mathfrak{D}(T)]$, será el **rango** de T. Cuando $\mathfrak{D}(T)$ sea también un subconjunto denso en $\mathfrak{H}_1$ diremos que T está densamente definido y en el caso $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, diremos simplemente que T es un operador en $\mathfrak{H}$.

Un operador en $\mathfrak{H}$ es inyectivo si para todo $\psi, \varphi \in \mathfrak{D}(T)$, $\psi \neq \varphi$ implica que $T(\psi) \neq T(\varphi)$, en este caso el **inverso** T^{-1} de T está definido y dado por

$$\mathfrak{D}(T^{-1}) = T[\mathfrak{D}(T)] \ \text{ y } \ T^{-1}\varphi = \psi, \ \text{ si } \ T\psi = \varphi,$$

T^{-1} es claramente un operador lineal en $\mathfrak{H}_2$. Para operadores T, S de $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$ y $a \in \mathbb{C}$, los operadores aT, $T + S$ y TS están definidos de la manera usual con los respectivos dominios:

[5] Ya que en este trabajo sólo consideramos operadores lineales, omitiremos el adjetivo 'lineal' y simplemente utilizaremos la palabra 'operador' para referirnos a una de estas funciones.

$$\mathfrak{D}(aT) := \mathfrak{D}(T), \quad \mathfrak{D}(T+S) := \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S) \quad \text{y}$$

$$\mathfrak{D}(TS) := \{\psi \in \mathfrak{D}(S) : S\psi \in \mathfrak{D}(T)\}.$$

La **restricción** de un operador $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ a un subconjunto lineal $B \subset \mathfrak{D}(T)$ es denotada por $T|_B$ y definida por

$$T|_B : B \subset \mathfrak{D}(T) \to \mathfrak{H}_2, \quad T|_B\psi = T\psi \quad \forall \psi \in B.$$

Si S es un operador de $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$, diremos que T es una **extensión** del operador S (o que S es una **restricción** de T) si se tiene

$$\mathfrak{D}(S) \subset \mathfrak{D}(T) \quad \text{y} \quad T\psi = S\psi, \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(S).$$

En este caso escribiremos $S \subset T$.

Finalmente, si $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, denotaremos por $\mathbb{I}$ al operador identidad en $\mathfrak{H}$, es decir:

$$\mathbb{I}\psi = \psi, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}.$$

A continuación enunciamos algunas propiedades concernientes a una clase especial de operadores entre espacios de Hilbert, los llamados operadores **acotados**.

Definición 1.16. *Sean $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert y $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ un operador lineal. Diremos que el operador T es* **acotado** *si existe un número real C tal que para todo $\psi \in \mathfrak{D}(T)$:*

$$\|T\psi\| \leq C\|\psi\|.$$

Aclaramos que en la expresión anterior no hemos hecho diferencia entre la notación de la norma del lado izquierdo (de $\mathfrak{H}_2$) y la del lado derecho (de $\mathfrak{H}_1$), por simplicidad, utilizaremos esta convención a lo largo de este trabajo. Recordemos también que un operador T es continuo en $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ si para cada sucesión $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{D}(T)$ tal que $\psi_n \to \psi$ se tiene $T\psi_n \to T\psi$. Diremos que el operador T es continuo si es continuo en cada elemento de $\mathfrak{D}(T)$.

Proposición 1.17. *Sea T un operador de $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *T es continuo.*

ii. *T es continuo en 0.*

iii. *T es acotado.*

Denotemos por $\mathcal{B}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ al conjunto de todos los operadores lineales de $\mathfrak{H}_1$ en $\mathfrak{H}_2$ que son acotados y cuyo dominio es todo $\mathfrak{H}_1$. Si $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, denotaremos al conjunto simplemente por $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Si T es un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, entonces

$$\sup_{\substack{\psi \in \mathfrak{H} \\ \psi \neq 0}} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|} \in \mathbb{R}$$

por lo que denotaremos a este número real como $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})}$, es decir:

$$\|T\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})} := \sup_{\substack{\psi \in \mathfrak{H} \\ \psi \neq 0}} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|} \tag{1.3}$$

y diremos que $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})}$ es la **norma** del operador T. Si $T = \mathbf{0}$ (el operador nulo) convenimos que $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})} = 0$. Si no se presta a confusión, denotaremos la norma de un operador T simplemente por $\|T\|$ en lugar de $\|T\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})}$. Por definición, tenemos la útil relación

$$\|T\psi\| \leq \|T\|\|\psi\| \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(T). \tag{1.4}$$

El siguiente teorema le da sentido a la palabra **norma** en la definición anterior.

Teorema 1.18. *Sea $\|\cdot\|$ definida como en (1.3). Entonces $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado, además, ya que $\mathfrak{H}$ es un espacio completo, $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}), \|\cdot\|)$ es un espacio completo también.*

El operador adjunto

A partir de este momento, todos los operadores $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ que consideraremos cumplirán que $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}$, es decir, $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$. Además, la mayoría de los operadores T utilizados en este trabajo poseen la propiedad de ser **autoadjuntos**, para darle sentido a este concepto necesitamos la siguiente:

Definición 1.19. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador densamente definido. Diremos que T es* **simétrico** *(o* **hermitiano***) si*

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle T\psi, \varphi \rangle \quad \forall \psi, \varphi \in \mathfrak{D}(T)$$

Consideremos nuevamente un operador T densamente definido en $\mathfrak{H}$ y supongamos que para $\psi \in \mathfrak{H}$ existe $\eta \in \mathfrak{H}$ tal que

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(T), \tag{1.5}$$

ya que $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$, éste elemento $\eta \in \mathfrak{H}$ debe ser el único con la propiedad (1.5) pues si existiera $\zeta \in \mathfrak{H}$ tal que $\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \zeta, \varphi \rangle$ para todo $\varphi \in \mathfrak{D}(T)$ entonces

$$\langle \eta - \zeta, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(T),$$

en particular, si tomamos $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \subset \mathfrak{D}(T)$ tal que $\varphi_n \to \eta - \zeta$ cuando $n \to \infty$ (pues $\mathfrak{D}(T)$ es denso) se tiene

$$\|\eta - \zeta\|^2 = \langle \eta - \zeta, \eta - \zeta \rangle = \langle \eta - \zeta, \lim_{n \to \infty} \varphi_n \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \eta - \zeta, \varphi_n \rangle = \lim_{n \to \infty} 0 = 0$$

y así, $\eta = \zeta$. Lo anterior nos da la posibilidad de definir el operador **adjunto** de un operador densamente definido T.

Definición 1.20. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador densamente definido. El* **(operador) adjunto** *de T es el operador dado por*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(T^*) &:= \{\psi \in \mathfrak{H} \,|\, \exists \eta \in \mathfrak{H} : \langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle, \ \ \forall \varphi \in \mathfrak{D}(T)\} \\ T^*\psi &:= \eta \end{aligned}$$

Entonces

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle T^*\psi, \varphi \rangle \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(T^*), \varphi \in \mathfrak{D}(T).$$

Como mencionamos arriba, el requisito de que $\mathfrak{D}(T)$ sea denso en $\mathfrak{H}$ implica que T^* está bien definido, además, notemos que aunque $\mathfrak{D}(T)$ sea denso, el espacio $\mathfrak{D}(T^*)$ no lo es necesariamente, incluso puede pasar que $\mathfrak{D}(T^*) = \{0\}$. Observemos también que si T es un operador simétrico, claramente se tiene que $T \subset T^*$, incluso, tenemos lo siguiente.

Lema 1.21. *Sea T un operador densamente definido en $\mathfrak{H}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i. *T es simétrico.*

ii. *$\langle \psi, T\psi \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\psi \in \mathfrak{D}(T)$.*

iii. *$T \subset T^*$.*

Definición 1.22. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador densamente definido. Decimos que T es* **autoadjunto** *si*

$$T = T^*,$$

es decir, $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T^*)$ y $T\psi = T^*\psi, \ \forall \psi \in \mathfrak{D}(T)$.

Una consecuencia trivial de la definición anterior es que si T es autoadjunto, entonces T es simétrico y por tanto $\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle T\psi, \varphi \rangle, \ \ \forall \psi, \varphi \in \mathfrak{D}(T)$. Enlistamos a continuación algunas de las propiedades básicas acerca del operador adjunto y que usaremos de manera frecuente a lo largo de este trabajo.

Proposición 1.23. *Sean T, S operadores en $\mathfrak{H}$, tenemos:*

i. *Si T es densamente definido, entonces $(aT)^* = \overline{a}T^*, \ \forall a \in \mathbb{C}$.*

ii. *Si $T + S$ es densamente definido, entonces $T^* + S^* \subset (T + S)^*$.*

iii. *Si $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y T es densamente definido, entonces $T^* + S^* = (T + S)^*$.*

iv. *Si T, S son operadores densamente definidos y el operador TS también lo es, entonces $S^*T^* \subset (TS)^*$.*

v. *Si S es densamente definido y $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, entonces $S^*T^* = (TS)^*$.*

vi. *Si $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ entonces $T^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $T^{**} = T$ y $\|T^*\| = \|T\|$.*

Otra propiedad vale la pena ser discutida, supongamos que T y S son operadores densamente definidos en $\mathfrak{H}$ y supongamos que $T \subset S$, queremos probar que $S^* \subset T^*$. Primero tomemos $\psi \in \mathfrak{D}(S^*)$, como

$$\langle \psi, T\varphi \rangle = \langle \psi, S\varphi \rangle = \langle S^*\psi, \varphi \rangle \quad \forall \psi \in \mathfrak{D}(T)$$

entonces $\psi \in \mathfrak{D}(T^*)$ y además $T^*\psi = S^*\psi$, por lo tanto $S^* \subset T^*$. Tenemos entonces la propiedad:

$$T \subset S \;\; \Rightarrow \;\; S^* \subset T^*,$$

esto es, al 'incrementar' el dominio de T 'decrece' el dominio de T^*. Lo anterior implica que si T es un operador autoadjunto y S es una extensión simétrica de T entonces

$$T \subset S \subset S^* \subset T^* = T,$$

es decir, $T = S$.

Corolario 1.24. *Si T es un operador autoadjunto y S es un operador simétrico tal que*

$$T \subset S,$$

entonces $T = S$. Operadores autoadjuntos son maximales simétricos, es decir, no tienen extenciones simétricas propias.

1.3. Algunos operadores de interés

Operadores cerrados

La mayoría de los operadores con los que trabajaremos a lo largo de los siguientes capítulos son operadores **no** acotados, en esta sección presentamos algunos resultados básicos que nos ayudarán a lidiar con este tipo de operadores y para ello introduciremos un tipo especial de operadores lineales que no son necesariamente acotados, de hecho, estos operadores tendrán características menos restrictivas que los anteriores pero que son suficientes para nuestros propósitos, a estos operadores les llamaremos **cerrados**.

Sea T un operador en $\mathfrak{H}$, la **gráfica** de T es el conjunto

$$\Gamma(T) := \{(\psi, T\psi) \in \mathfrak{H} \times \mathfrak{H} : \psi \in \mathfrak{D}(T)\}$$

donde $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ es considerado como espacio de Hilbert con el producto interior:

$$\langle \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle, \langle \psi_2, \varphi_2 \rangle \rangle_{\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}} := \langle \psi_1, \psi_2 \rangle + \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle.$$

Como es de suponer, no todo subconjunto del espacio $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ es gráfica de algún operador lineal en $\mathfrak{H}$, por lo que quisiéramos saber cuándo un subconjunto Γ de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ cumple que $\Gamma = \Gamma(T)$ para algún operador lineal T en $\mathfrak{H}$. La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que esto pase.

Proposición 1.25. *Un subconjunto $\Gamma \subset \mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$ es la gráfica de un operador T en $\mathfrak{H}$ si y sólo si Γ es un subconjunto lineal que posee la siguiente propiedad: si $(0, \psi) \in \Gamma$ entonces $\psi = 0$. En este caso, el operador T es único.*

Definición 1.26. *Un operador T en $\mathfrak{H}$ es* **cerrado** *si su gráfica $\Gamma(T)$ es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{H} \times \mathfrak{H}$, además, diremos que T es* **cerrable** *si $\overline{\Gamma(T)}$ es una gráfica.*

Notemos que si T es cerrable, por la proposición 1.25 existe un único operador al que denotaremos por $\overline{T}$ tal que

$$\Gamma(\overline{T}) = \overline{\Gamma(T)}, \tag{1.6}$$

claramente $\overline{T}$ es un operador cerrado y $T \subset \overline{T}$, el operador $\overline{T}$ es llamado la **cerradura** de T. Observemos también que T es cerrado si y sólo si $T = \overline{T}$.

Enunciamos a continuación algunos hechos básicos referentes a operadores cerrados y cerrables.

Proposición 1.27. *Sea T un operador en $\mathfrak{H}$, entonces:*

i. *Si T es acotado entonces T es cerrable.*

ii. *Si T es acotado, entonces T es cerrado si y sólo si $\mathfrak{D}(T)$ es cerrado en $\mathfrak{H}$.*

iii. *Si T es densamente definido entonces T^* es cerrado, por lo tanto, si T es autoadjunto entonces T es cerrado.*

iv. *Si T es simétrico entonces T es cerrable y en este caso $\overline{T}$ es también simétrico.*

v. *Si T es inyectivo, T es cerrado si y sólo si T^{-1} es cerrado.*

vi. *Si T es cerrado y $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ entonces $T + S$ es cerrado.*

Ahora bien, supongamos que T es un operador **simétrico**, si $\overline{T}$ es autoadjunto entonces T tiene sólo **una extensión autoadjunta**, a saber $\overline{T}$, pues si S fuera otra extensión autoadjunta de T se tendría en particular que S es una extensión cerrada (proposición 1.27 iii) y debido a que por (1.6) $\overline{T}$ es la extensión 'cerrada' más pequeña de T se tiene:

$$\overline{T} \subset S \Rightarrow \overline{T} = S$$

ya que por proposición 1.24 operadores autoadjuntos no tienen extensiones simétricas propias. El análisis anterior motiva la definición siguiente:

Definición 1.28. *Un operador simétrico T en $\mathfrak{H}$ se dice* **esencialmente autoadjunto** *si su cerradura $\overline{T}$ es autoadjunta.*

Proposición 1.29. *Un operador simétrico T es esencialmente autoadjunto si y sólo si una de las siguientes condiciones se satisface para algún $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$:*

i. $\overline{\operatorname{Ran}(T + z)} = \overline{\operatorname{Ran}(T + \overline{z})} = \mathfrak{H}$,

ii. $\operatorname{Ker}(T^* + z) = \operatorname{Ker}(T^* + \overline{z}) = \{0\}$.

Proyecciones ortogonales y operadores unitarios

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert, expondremos a continuación algunos hechos básicos referentes a dos tipos de operadores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ que serán de gran utilidad a lo largo de este trabajo, las **proyecciones ortogonales** y los **operadores unitarios**.

Teorema 1.30. *Sea M un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$, existe un único operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$*

$$P_M : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$$

llamado la **proyección ortogonal** *de $\mathfrak{H}$ sobre M, con las siguientes propiedades:*

i. $\|P_M\| = 1$ *si* $M \neq \{0\}$,

ii. $P_M^2 = P_M P_M = P_M$,

iii. $\mathrm{Ran}(P_M) = M = \{\psi \in \mathfrak{H} : P_M\psi = \psi\}$ *y*

iv. $\mathrm{Ker}(P_M) = M^\perp$.

Demostración. Ya que M es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$, por teorema 1.8 cada $\psi \in \mathfrak{H}$ puede ser representado de manera única en la forma $\psi = \psi_1 + \psi_2$ con $\psi_1 \in M$ y $\psi_2 \in M^\perp$. Definamos entonces el operador P_M de manera que $\mathfrak{D}(P_M) = \mathfrak{H}$ y

$$P_M\psi := \psi_1, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}.$$

P_M así definido es un operador lineal pues si $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$ y $a \in \mathbb{C}$, como $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ con $\psi_1, \varphi_1 \in M$ y $\psi_2, \varphi_2 \in M^\perp$ entonces $a\psi + \varphi = (a\psi_1 + \varphi_1) + (a\psi_2 + \varphi_2)$ y por consecuencia

$$P_M(a\psi + \varphi) = a\psi_1 + \varphi_1 = aP_M\psi + P_M\varphi,$$

entonces P_M es lineal. Ahora bien, ya que para todo $\psi \in \mathfrak{H}$, $\|\psi\|^2 = \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2$ entonces $\|\psi_1\|^2 \leq \|\psi\|^2$ por lo que

$$\|P_M\psi\| = \|\psi_1\| \leq \|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}$$

así, $\|P_M\| \leq 1$; si $M \neq \{0\}$ tomemos $\eta \in M$, $\eta \neq 0$, ya que $P_M\eta = \eta$ entonces:

$$1 = \frac{\|P_M\eta\|}{\|\eta\|} \leq \sup_{\substack{\psi \in \mathfrak{H} \\ \psi \neq 0}} \frac{\|P_M\psi\|}{\|\psi\|} = \|P_M\|$$

y por lo tanto $\|P_M\| = 1$. Ya que $P_M\psi = \psi$ para todo $\psi \in M$ y $P_M\psi \in M$ para todo $\psi \in \mathfrak{H}$ entonces $\mathrm{Ran}(P_M) = M = \{\psi \in \mathfrak{H} : P_M\psi = \psi\}$ y además

$$P_M^2\psi = P_M P_M\psi = P_M\psi, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}$$

es decir, $P_M^2 = P_M P_M = P_M$. De manera similar, como $P_M\psi = 0$ si y sólo si $\psi \in M^\perp$ entonces $\mathrm{Ker}(P_M) = M^\perp$.

□

Diremos que el operador $P \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es una **proyección** (o **proyector**) si P es la proyección ortogonal de $\mathfrak{H}$ sobre algún subconjunto lineal cerrado M de $\mathfrak{H}$, es decir, $P = P_M$. Ya que $M^\perp$ es también un subconjunto lineal cerrado, el teorema anterior nos dice que $M^\perp$ tiene asociada a su correspondiente proyección ortogonal $P_{M^\perp}$ (cambiaremos la notación en este caso y denotaremos a este operador como $P_M^\perp$ o simplemente por $P^\perp$), así, en el caso que M sea un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ siempre se cumple la igualdad:

$$\psi = P_M\psi + P_M^\perp\psi, \quad \forall\psi \in \mathfrak{H}. \tag{1.7}$$

La siguiente proposición es una útil equivalencia de la definición de proyección ortogonal que acabamos de dar.

Proposición 1.31. *Para un operador $P \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *P es una proyección ortogonal.*

II. *$P^2 = P$ y $P = P^*$.*

Demostración. I. implica II. Si P es una proyección ortogonal entonces por definición $P = P_M$ y por el teorema anterior $P^2 = PP = P$, además, ya que para toda $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}$ con $\psi = \psi_1 + \psi_2$, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ y $\psi_1, \varphi_1 \in M$, $\psi_2, \varphi_2 \in M^\perp$

$$\langle\psi, P\varphi\rangle = \langle\psi_1+\psi_2, \varphi_1\rangle = \langle\psi_1, \varphi_1\rangle+\langle\psi_2, \varphi_1\rangle = \langle\psi_1, \varphi_1\rangle = \langle\psi_1, \varphi_1+\varphi_2\rangle = \langle P\psi, \varphi\rangle,$$

entonces $\mathfrak{D}(P^*) = \mathfrak{H} = \mathfrak{D}(P)$ y $P\psi = P^*\psi$, $\forall\psi \in \mathfrak{H}$, es decir, $P = P^*$.

II. implica I. Supongamos ahora que $P^2 = P$ y P es autoadjunto. Queremos demostrar que existe $M \subset \mathfrak{H}$ un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ tal que $P = P_M$, para ello, definamos

$$M := \{\psi \in \mathfrak{H} : P\psi = \psi\},$$

claramente M es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$. Demostraremos que M es un subconjunto cerrado de $\mathfrak{H}$, para ello, tomemos $\{\psi_n\}_{n\geq1} \subset M$ tal que $\psi_n \to \psi$ y demostremos que $\psi \in M$. Ya que $\psi_n \in M$ para cada $n \in \mathbb{N}$ entonces $P\psi_n = \psi_n$ y por lo tanto

$$P\psi = P(\lim_{n\to\infty} \psi_n) = \lim_{n\to\infty} P\psi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$$

pues P es continuo, luego, $P\psi = \psi$ y $\psi \in M$. Resta probar que efectivamente P es la proyección ortogonal sobre M, es decir, $P = P_M$. Queremos probar que $P\psi = P_M\psi$, $\forall\psi \in \mathfrak{H}$, observemos que para cada $\psi \in \mathfrak{H}$

$$PP\psi = P\psi$$

entonces por definición $P\psi \in M$, también $P_M\psi \in M$, $\forall\psi \in \mathfrak{H}$; si demostramos que

$$\langle P\psi - P_M\psi, \varphi\rangle = 0 \quad \forall\varphi \in M$$

entonces $\|P\psi - P_M\psi\|^2 = 0$ y por consecuencia $P\psi = P_M\psi$. Debido a que P es autoadjunto tenemos que para todo $\varphi \in M$:

$$\langle P\psi, \varphi\rangle = \langle\psi, P^*\varphi\rangle = \langle\psi, P\varphi\rangle = \langle\psi, \varphi\rangle = \langle\psi, P_M\varphi\rangle = \langle P_M\psi, \varphi\rangle$$

es decir, $\langle P\psi - P_M\psi, \varphi\rangle = 0$, $\forall\varphi \in M$.

$\square$

Lema 1.32. *Si P una proyección ortogonal en $\mathfrak{H}$ y para $\psi \in \mathfrak{H}$ se cumple que $\|P\psi\| = \|\psi\|$, entonces*

$$P\psi = \psi.$$

Demostración. Ya que $\psi = P\psi + P^{\perp}\psi$, se tiene

$$\|\psi\|^2 = \|P\psi\|^2 + 2\,\mathfrak{Re}\langle P\psi, P^{\perp}\psi\rangle + \|P^{\perp}\psi\|^2 = \|P\psi\|^2 + \|P^{\perp}\psi\|^2,$$

como $\|P\psi\|^2 = \|\psi\|^2$ entonces $\|P^{\perp}\psi\|^2 = 0$ y por tanto $P^{\perp}\psi = 0$, así $P\psi = \psi$. $\square$

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert, diremos que un operador $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es **positivo** si

$$\langle \psi, A\psi\rangle \geq 0, \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}.$$

Escribiremos $A \geq 0$ si A es positivo y $A \geq B$ si $A - B \geq 0$. Claramente cualquier proyección ortogonal P_M es positiva pues

$$\langle \psi, P_M\psi\rangle = \langle \psi, P_M^2\psi\rangle = \langle P_M^*\psi, P_M\psi\rangle = \langle P_M\psi, P_M\psi\rangle = \|P_M\psi\|^2 \geq 0.$$

Proposición 1.33. *Sean P_1 y P_2 proyecciones ortogonales definidas en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. $P_1 \leq P_2$.

II. $\mathrm{Ran}(P_1) \subset \mathrm{Ran}(P_2)$.

III. $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.

Demostración. I. implica II. Queremos demostrar que $\mathrm{Ran}(P_1) \subset \mathrm{Ran}(P_2)$, sea pues $\psi \in \mathrm{Ran}(P_1)$. Como $P_1\psi = \psi$ se tiene

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi\rangle = \langle \psi, P_1\psi\rangle \leq \langle \psi, P_2\psi\rangle = \langle \psi, P_2^2\psi\rangle = \langle P_2\psi, P_2\psi\rangle = \|P_2\psi\|^2 \quad (1.8)$$

y también $\|\psi\|^2 \geq \|P_2\psi\|^2$ pues por (1.7) $\psi = P_2\psi + P_2^{\perp}\psi$ y así

$$\|\psi\|^2 = \|P_2\psi\|^2 + \|P_2^{\perp}\psi\|^2.$$

Las dos desigualdades anteriores implican que $\|\psi\|^2 = \|P_2\psi\|^2$ y como P_2 es una proyección ortogonal, utilizando el lema 1.32 tenemos

$$\psi = P_2\psi,$$

es decir, $\psi \in \mathrm{Ran}(P_2)$.

II. implica III. Supongamos $\mathrm{Ran}(P_1) \subset \mathrm{Ran}(P_2)$, queremos demostrar que $P_2P_1 = P_1$. Sea $\psi \in \mathfrak{H}$, como $P_1\psi \in \mathrm{Ran}(P_1)$ entonces $P_1\psi \in \mathrm{Ran}(P_2)$, así

$$P_2(P_1\psi) = P_1\psi.$$

Luego, $P_2P_1\psi = P_1\psi \ \forall\psi \in \mathfrak{H}$, es decir, $P_2P_1 = P_1$. Por lo anterior tenemos que $(P_2P_1)^* = P_1^* = P_1 = P_2P_1$ y entonces[6]

$$P_1P_2 = P_2P_1 = P_1.$$

III. implica I. Sea $\psi \in \mathfrak{H}$, queremos demostrar que

$$0 \leq \langle \psi, (P_2 - P_1)\psi \rangle,$$

es decir, $\langle \psi, P_1\psi \rangle \leq \langle \psi, P_2\psi \rangle$, pero esto es consecuencia de las relaciones:

$$\begin{aligned} \langle \psi, P_1\psi \rangle = \langle P_1\psi, P_1\psi \rangle &= \|P_1\psi\|^2 \\ &= \|P_1P_2\psi\|^2 \\ &\leq \|P_1\|^2\|P_2\psi\|^2 \\ &= \|P_2\psi\|^2 = \langle P_2\psi, P_2\psi \rangle = \langle \psi, P_2\psi \rangle. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.34. *Si $\{P_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión infinita de proyecciones ortogonales en $\mathfrak{H}$ y $P_k \leq P_{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces existe una proyección ortogonal P tal que*

$$\lim_{k\to\infty} P_k\psi = P\psi, \quad \forall\psi \in \mathfrak{H}.$$

Pasemos ahora a demostrar una proposición relativa a otro tipo de operadores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ que serán de gran utilidad en el Capítulo 3, los llamados **operadores unitarios**.

Definición 1.35. *Sean $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert. Un operador U de $\mathfrak{H}_1$ a $\mathfrak{H}_2$ tal que $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{H}_1$ es llamado* **unitario** *si*

$$\operatorname{Ran}(U) = \mathfrak{H}_2 \quad \text{y} \quad \langle U\varphi, U\psi \rangle_2 = \langle \varphi, \psi \rangle_1 \quad \forall\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_1.$$

Proposición 1.36. *Sean $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert y sea U un operador de $\mathfrak{H}_1$ a $\mathfrak{H}_2$ tal que $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{H}_1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *U es unitario.*

II. *$U^*U = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_1}$ y $UU^* = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_2}$, es decir, $U^* = U^{-1}$.*

Demostración. I. implica II. Primero demostraremos que U^{-1} existe, para ello, probaremos que U es un operador inyectivo. Sean $\psi, \varphi \in \mathfrak{H}_1$ y supongamos que $U\psi = U\varphi$, ya que U es unitario tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \|U\psi - U\varphi\|^2 &= \langle U\psi - U\varphi, U\psi - U\varphi \rangle \\ &= \langle U\psi, U\psi \rangle - \langle U\psi, U\varphi \rangle - \langle U\varphi, U\psi \rangle + \langle U\varphi, U\varphi \rangle \\ &= \langle \psi, \psi \rangle - \langle \psi, \varphi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle \psi - \varphi, \psi - \varphi \rangle \\ &= \|\psi - \varphi\|^2, \end{aligned}$$

[6] El producto de dos operadores autoadjuntos $S, T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es autoadjunto si y sólo si los operadores conmutan, i.e. $ST = TS$. La demostración de este hecho es sencilla pues como $(ST)^* = T^*S^* = TS$ entonces

$$ST = (ST)^* \iff ST = TS.$$

por lo que $\psi - \varphi$, luego, U es inyectivo. Como $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{H}_1$ y $\mathrm{Ran}(U) = \mathfrak{H}_2$, el operador U^{-1} tiene como dominio $\mathfrak{D}(U^{-1}) = \mathfrak{H}_2$ y como rango $\mathrm{Ran}(U^{-1}) = \mathfrak{H}_1$, demostremos ahora que $U^{-1} = U^*$. Sea $\psi \in \mathfrak{H}_2 = \mathrm{Ran}(U)$, entonces existe $\eta \in \mathfrak{H}_1$ tal que $U\eta = \psi$ y

$$\langle \psi, U\varphi \rangle = \langle U\eta, U\varphi \rangle = \langle \eta, \varphi \rangle = \langle U^{-1}\psi, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{H}_1$$

por lo tanto $\mathfrak{D}(U^*) = \mathfrak{H}_2$ y además $U^*\psi = U^{-1}\psi$, $\forall \psi \in \mathfrak{H}_2$. Es decir, $U^* = U^{-1}$.

II. implica I. Supongamos que $U^* = U^{-1}$, demostremos primero que $\mathrm{Ran}(U) = \mathfrak{H}_2$. Por hipótesis tenemos que $UU^* = \mathbb{I}_{\mathfrak{H}_2}$, esto implica la igualdad $\mathfrak{D}(UU^*) = \mathfrak{D}(\mathbb{I}_{\mathfrak{H}_2}) = \mathfrak{H}_2$ y como

$$\mathfrak{D}(UU^*) = \{\psi \in \mathfrak{D}(U^*) : U^*\psi \in \mathfrak{D}(U)\} = \{\psi \in \mathfrak{D}(U^*) : U^*\psi \in \mathfrak{H}_1\}$$

entonces $\mathfrak{D}(UU^*) = \mathfrak{D}(U^*)$ pues $\mathrm{Ran}(U^*) \subset \mathfrak{H}_1$, así $\mathfrak{D}(U^*) = \mathfrak{H}_2$. Como por hipótesis $U^* = U^{-1}$ entonces

$$\mathrm{Ran}(U) = \mathfrak{D}(U^{-1}) = \mathfrak{D}(U^*) = \mathfrak{H}_2.$$

Finalmente,

$$\langle U\psi, U\varphi \rangle = \langle \psi, U^*U\varphi \rangle = \langle \psi, U^{-1}U\psi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle, \quad \forall \psi, \varphi \in \mathfrak{H}_1,$$

es decir, U es unitario.

$\square$

Para finalizar esta sección, enunciamos una proposición al respecto de operadores de **rango finito** que será utilizada en el Capítulo 3.

Definición 1.37. *Un operador lineal $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es llamado de* **rango finito** *si su rango es dimensionalmente finito, es decir, si*

$$dim\ \mathrm{Ran}(K) < \infty.$$

Proposición 1.38. *Si K es un operador de rango finito, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y $\psi_k, \varphi_k \in \mathfrak{H}$ con $k = 0, 1, 2, ..., n$ tales que*

$$K(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{n} \langle \eta_k, \,\cdot\, \rangle \varphi_k.$$

1.4. Teoría espectral de operadores autoadjuntos

En lo subsecuente $\mathfrak{H}$ siempre denotará un espacio de Hilbert separable complejo. Sea T un operador lineal en $\mathfrak{H}$, el número $\lambda \in \mathbb{C}$ es llamado un **eigenvalor** de T si existe $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, $\psi \neq 0$, tal que $T\psi = \lambda\psi$, o equivalentemente, si el operador[7] $T - \lambda$ es **no** inyectivo, además, cada vector ψ con esta propiedad es llamado un **eigenvector** de T (correspondiente al eigenvalor λ). El subconjunto lineal

$$\mathrm{Ker}(T - \lambda) = \{\psi \in \mathfrak{D}(T) : (T - \lambda)\psi = 0\}$$

[7] Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, denotaremos por $T - \lambda$ al operador $T - \lambda\mathbb{I} : \mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$.

es llamado el **eigenespacio** de T correspondiente a λ y su dimensión es la **multiplicidad** del eigenvalor λ. Al conjunto de todos los eigenvalores del operador T lo denotaremos por $\sigma_e(T)$, es decir,

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es eigenvalor de } T\}.$$

Ahora bien, si $\lambda \in \mathbb{C}$ no es un eigenvalor de T y por consecuencia $T - \lambda$ es un operador inyectivo, el operador

$$(T - \lambda)^{-1} : \operatorname{Ran}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{D}(T)$$

está bien definido.

Definición 1.39. *Sea T un operador lineal en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, el* **conjunto resolvente** *del operador T es el conjunto*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ es inyectivo y } (T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})\}.$$

Por los incisos V y VI de la proposición 1.27, si T no es cerrado entonces los operadores $T - \lambda$ y $(T - \lambda)^{-1}$ tampoco lo son y en este caso no podría suceder que $(T - \lambda)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ para algún λ, pues por la proposición 1.27 todo operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es cerrado, así, si el operador T no es cerrado $\rho(T) = \emptyset$ y ésta es una de las razones por las cuales en la mayoría de los casos se asume que $T = \overline{T}$.

Definición 1.40. *El conjunto*

$$\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

es llamado el **espectro** *del operador T.*

Enunciamos a continuación un teorema que representa un gran resultado de la Teoría espectral y que utilizaremos más adelante, su demostración puede consultarse en [dO09, pág.65].

Teorema 1.41. *Si T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$, entonces $\emptyset \neq \sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Una consecuencia inmediata de la definición 1.40 es que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un eigenvalor de T, entonces $\lambda \in \sigma(T)$. Para finalizar, demostramos algunos hechos básicos relacionados a los eigenvalores de operadores autoadjuntos.

Proposición 1.42. *Si T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$ se tiene:*

I. *Cada eigenvalor de T es real, es decir, $\sigma_e(T) \subset \mathbb{R}$.*

II. *Si $\psi, \varphi \neq 0$ son tales que $T\psi = \lambda_1\psi$ y $T\varphi = \lambda_2\varphi$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces $\psi \perp \varphi$. Es decir, eigenvectores correspondientes a diferentes eigenvalores son ortogonales.*

Demostración. Notemos que el inciso I es consecuencia inmediata del teorema 1.41, sin embargo, su prueba es fácil y la escribimos a continuación. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ eigenvalor de T y sea ψ un respectivo eigenvector, ya que

$$\lambda\langle\psi, \psi\rangle = \langle\psi, \lambda\psi\rangle = \langle\psi, T\psi\rangle = \langle T\psi, \psi\rangle = \langle\lambda\psi, \psi\rangle = \overline{\lambda}\langle\psi, \psi\rangle$$

y $\langle\psi,\psi\rangle \neq 0$ (pues $\psi \neq 0$), entonces $\lambda = \overline{\lambda}$, por lo que $\lambda \in \mathbb{R}$, así, $\sigma_e(T) \subset \mathbb{R}$. Supongamos ahora las hipótesis del inciso II, ya que $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{R}$ por lo argumentado arriba, entonces

$$\begin{aligned}(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\psi,\varphi\rangle = \langle(\lambda_1 - \lambda_2)\psi,\varphi\rangle &= \langle\lambda_1\psi,\varphi\rangle - \langle\lambda_2\psi,\varphi\rangle \\ &= \langle\lambda_1\psi,\varphi\rangle - \langle\psi,\lambda_2\varphi\rangle \\ &= \langle T\psi,\varphi\rangle - \langle\psi,T\varphi\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

pues T es autoadjunto, además, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$ la igualdad anterior nos asegura que $\langle\psi,\varphi\rangle = 0$.

□

Corolario 1.43. *Un operador autoadjunto T en un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$ tiene a lo más una cantidad numerable de eigenvalores.*

Demostración. Sea $C = \{\psi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de eigenvectores correspondientes a los distintos eigenvalores λ_α de T con $\|\psi_\alpha\| = 1$, por la proposición anterior (inciso II) C forma un conjunto ortonormal en $\mathfrak{H}$ y como $\mathfrak{H}$ es separable, la proposición 1.11 nos asegura que C es a lo más numerable. Lo anterior implica que el conjunto $\sigma_e(T) = \{\lambda_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es a lo más numerable.

□

1.4.1. Integración con respecto a una familia espectral

El concepto de familia espectral en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ es de vital importancia para entender la formulación que daremos del Teorema espectral, la presente sección estará dedicada a introducir este concepto y enunciar algunas de sus propiedades. Al lector interesado en un profundo análisis de la teoría puede consultar las referencias que proponemos en la sección Notas, al final del capítulo.

Recordemos del capítulo anterior que P_0 es una proyección ortogonal si y sólo si $P_0 \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, P_0 es autoadjunto y $P_0^2 = P_0$, denotaremos por $\mathrm{Proj}(\mathfrak{H})$ al conjunto de todas las proyecciones ortogonales en $\mathfrak{H}$. También, $\mathcal{A}$ denotará la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ (borelianos) y como es costumbre, para $\Omega \in \mathcal{A}$, denotaremos por χ_Ω a la función característica de Ω.

Definición 1.44. *Una* **familia espectral** *en $\mathfrak{H}$ es una función*

$$P : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(\mathfrak{H})$$

tal que

I. $P(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$, *y*

II. *Si $\Omega = \cup_{j\geq 1}\Omega_j$ con $\Omega_j \in \mathcal{A}$, $\forall j \in \mathbb{N}$ y $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ si $j \neq k$, entonces*

$$P(\Omega)\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(\Omega_j)\psi$$

para toda $\psi \in \mathfrak{H}$.

Una familia espectral también es conocida como **resolución de la identidad**, **resolución espectral** o también en inglés: **projection-valued measure**. La siguiente proposición demuestra que una familia espectral tiene propiedades muy similares a las de una medida usual sobre $\mathcal{A}$, de hecho, utilizaremos estas propiedades para introducir el concepto de integral de una función Borel-medible f con respecto a una familia espectral P.

Proposición 1.45. *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y P una familia espectral en $\mathfrak{H}$. Para cualesquiera Ω_1 y Ω_2 elementos de $\mathcal{A}$ se tiene:*

I. *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ entonces $P(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = P(\Omega_2) - P(\Omega_1)$, en particular $P(\mathbb{R} \setminus \Omega_1) = \mathbb{I} - P(\Omega_1)$ y $P(\emptyset) = \mathbf{0}$.*

II. $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

III. *Si $\Omega_1 \subset \Omega_2$ entonces $P(\Omega_1) \leq P(\Omega_2)$ -y por la proposición 1.33 se tiene* $\mathrm{Ran}P(\Omega_1) \subset \mathrm{Ran}P(\Omega_2)$-, *además*

$$P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1) = P(\Omega_1).$$

IV. $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1)$. *En particular, todas las proyecciones $P(\Omega)$ conmutan y si $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ se tiene $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = \mathbf{0}$.*

Demostración. I. Ya que $\Omega_2 = (\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cup \Omega_1$ y $(\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cap \Omega_1 = \emptyset$, por definición tenemos que

$$P(\Omega_2) = P((\Omega_2 \setminus \Omega_1) \cup \Omega_1) = P(\Omega_2 \setminus \Omega_1) + P(\Omega_1),$$

es decir, $P(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = P(\Omega_2) - P(\Omega_1)$. En particular, tomando $\Omega_2 = \mathbb{R}$ en la igualdad anterior concluímos que

$$P(\mathbb{R} \setminus \Omega_1) = P(\mathbb{R}) - P(\Omega_1) = \mathbb{I} - P(\Omega_1)$$

y si $\Omega_1 = \Omega_2$ entonces

$$P(\emptyset) = P(\Omega_2 \setminus \Omega_2) = P(\Omega_2) - P(\Omega_2) = \mathbf{0}.$$

II. Como $\Omega_1 \cup \Omega_2 = [\Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)] \cup [\Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)] \cap [\Omega_1 \cap \Omega_2]$ y los uniendos son disjuntos dos a dos, entonces

$$P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)) + P(\Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

además, por el inciso I tenemos que $P(\Omega_1 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)) = P(\Omega_1) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ y $P(\Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cap \Omega_2)) = P(\Omega_2) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$ por lo tanto

$$\begin{aligned} P(\Omega_1 \cup \Omega_2) &= P(\Omega_1) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2) + P(\Omega_2) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2) \\ &= P(\Omega_1) + P(\Omega_2) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2) \end{aligned}$$

y así, $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2) - P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$.

III. Supongamos que $\Omega_1 \subset \Omega_2$. Por inciso I se tiene $P(\Omega_2 \setminus \Omega_1) = P(\Omega_2) - P(\Omega_1)$ por lo que si $\psi \in \mathfrak{H}$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \psi, [P(\Omega_2) - P(\Omega_1)]\psi \rangle &= \langle \psi, P(\Omega_2 \setminus \Omega_1)\psi \rangle \\ &= \langle P(\Omega_2 \setminus \Omega_1)\psi, P(\Omega_2 \setminus \Omega_1)\psi \rangle \\ &= \|P(\Omega_2 \setminus \Omega_1)\psi\|^2 \\ &\geq 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $P(\Omega_1) \leq P(\Omega_2)$. La afirmación $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1) = P(\Omega_1)$ es una consecuencia inmediata de la proposición 1.33.

IV. Dividamos la prueba en dos casos, supongamos primero que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, en este caso se tiene $P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_2)$ por lo que

$$P(\Omega_1)P(\Omega_1 \cup \Omega_2) = P(\Omega_1)^2 + P(\Omega_1)P(\Omega_2),$$

ahora bien, como $\Omega_1 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ el inciso III nos asegura que

$$P(\Omega_1) = P(\Omega_1)^2 + P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_1) + P(\Omega_1)P(\Omega_2),$$

es decir, $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = \mathbf{0}$. De manera análoga obtenemos $P(\Omega_2)P(\Omega_1) = \mathbf{0}$. Concluímos entonces que

$$P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\emptyset) = \mathbf{0} = P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1).$$

Tomemos ahora $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{A}$ arbitrarios, ya que

$$\Omega_1 = (\Omega_1 \setminus \Omega_2) \cup (\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

y esta unión es disjunta, entonces

$$P(\Omega_1) = P(\Omega_1 \setminus \Omega_2) + P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

por lo que $P(\Omega_2)P(\Omega_1) = P(\Omega_2)P(\Omega_1 \setminus \Omega_2) + P(\Omega_2)P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. Ya que $\Omega_2 \cap (\Omega_1 \setminus \Omega_2) = \emptyset$ el caso anterior implica

$$P(\Omega_2)P(\Omega_1) = \mathbf{0} + P(\Omega_2)P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1 \cap \Omega_2),$$

de manera análoga se demuestra que $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_1 \cap \Omega_2)$. De lo anterior, finalmente se obtiene que

$$P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1).$$

□

Como podríamos esperar, lo útil de las familias espectrales es que podemos ‘integrar’ con respecto a ellas en un sentido que quedará preciso más adelante, para ello, debemos introducir el concepto de **medidas espectrales** (asociadas a un operador autoadjunto T) que jugará un papel fundamental en este capítulo y en todos los restantes.

Dada una familia espectral P en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, podemos asociar a cada $\psi \in \mathfrak{H}$ una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, μ_ψ, definida por

$$\mu_\psi(\Omega) := \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle, \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}. \tag{1.9}$$

Ya que

$$\mu_\psi(\Omega) = \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle = \langle \psi, P(\Omega)^2\psi \rangle = \langle P(\Omega)\psi, P(\Omega)\psi \rangle = \|P(\Omega)\psi\|^2 \geq 0$$

entonces μ_ψ toma sólo valores positivos, además

$$\mu_\psi(\emptyset) = \langle \psi, P(\emptyset)\psi \rangle = \langle \psi, \mathbf{0}\psi \rangle = \langle \psi, 0 \rangle = 0$$

y

$$\mu_\psi(\mathbb{R}) = \langle \psi, P(\mathbb{R})\psi \rangle = \langle \psi, \mathbb{I}\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2 < \infty.$$

Más aún, si $\{\Omega_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión de conjuntos de Borel disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}
\mu_\psi(\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j) &= \langle \psi, P(\bigcup_{j\geq 1} \Omega_j)\psi \rangle \\
&= \langle \psi, \sum_{j\geq 1} P(\Omega_j)\psi \rangle \\
&= \sum_{j\geq 1} \langle \psi, P(\Omega_j)\psi \rangle \\
&= \sum_{j\geq 1} \mu_\psi(\Omega_j)
\end{aligned}$$

por lo que μ_ψ es entonces una medida de Borel finita (sobre $\mathbb{R}$).

Definición 1.46. *Sea P una familia espectral en $\mathfrak{H}$, para cada $\psi \in \mathfrak{H}$ la medida μ_ψ definida arriba es llamada* **medida espectral** *de la familia espectral P asociada al vector $\psi \in \mathfrak{H}$.*

Por el teorema B.4 de los apéndices, al ser μ_ψ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ se tiene que μ_ψ es **regular**, esto es,

$$\mu_\psi(\Omega) = \text{ínf}\{\mu_\psi(U) : U \subset \mathbb{R} \text{ es abierto, } \Omega \subset U\}$$

$$y \tag{1.10}$$

$$\mu_\psi(\Omega) = \sup\{\mu_\psi(K) : K \subset \mathbb{R} \text{ es compacto, } K \subset \Omega\}$$

para todo $\Omega \in \mathcal{A}$.

Como mencionamos anteriormente, nos interesa construir la 'integral' de cierta clase de funciones con respecto a una familia espectral P, la construcción será progresiva pues definiremos la integral para algún tipo de funciones 'simples' y luego extenderemos esta definición para finalmente obtener los útiles teoremas 1.48 y 1.50. Observemos en particular que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función Borel-medible, la integral

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t)$$

está definida para todo $\psi \in \mathfrak{H}$ (donde μ_ψ es la medida espectral de la definición 1.46).

Sea pues P una familia espectral en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, empezaremos por definir la integral (con respecto a la familia espectral P) de funciones características $f = \chi_\Omega$ donde $\Omega \in \mathcal{A}$, a esta integral la denotaremos por $\mathcal{P}(\chi_\Omega)$ y la definiremos simplemente como $P(\Omega)$, es decir

$$\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(\chi_\Omega) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega(t)\, dP(t) = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega\, dP := P(\Omega),$$

observemos que la integral así definida no es un número en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pues recordemos que $P(\Omega)$ es una proyección ortogonal en $\mathfrak{H}$, así, la integral que hemos definido toma valores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Notemos también que con esta definición se tiene que para todo $\psi \in \mathfrak{H}$:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \mathcal{P}(\chi_\Omega)\psi \rangle &= \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle \\ &= \mu_\psi(\Omega) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega(t)\, d\mu_\psi(t) \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}(\chi_\Omega)\psi\|^2 &= \langle \mathcal{P}(\chi_\Omega)\psi, \mathcal{P}(\chi_\Omega)\psi \rangle \\ &= \langle P(\Omega)\psi, P(\Omega)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, P(\Omega)^2\psi \rangle \\ &= \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega(t)\, d\mu_\psi(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\chi_\Omega(t)|^2\, d\mu_\psi(t), \end{aligned}$$

es decir, para todo $\psi \in \mathfrak{H}$:

$$\langle \psi, \mathcal{P}(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t) \tag{1.11}$$

y

$$\|\mathcal{P}(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_\psi(t). \tag{1.12}$$

En este punto será importante hacer énfasis en la importante relación

$$\mathcal{P}(\chi_\Omega) = P(\Omega)$$

para todo $\Omega \in \mathcal{A}$. Notemos que $\mathcal{P}$ y P son funciones totalmente distintas pues mientras $\mathcal{P}$ tiene como dominio a funciones, P tiene como dominio a subconjuntos de números reales, sin embargo, motivados por la igualdad anterior y debido a que la utilizaremos con mucha frecuencia, por simplicidad decidiremos cambiar la notación para la integral $\int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega \, dP$ que acabamos de definir a $P(\chi_\Omega)$ en lugar de $\mathcal{P}(\chi_\Omega)$ como se había escrito antes, de esta manera tenemos que

$$P(\chi_\Omega) = P(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}. \tag{1.13}$$

Ahora bien, extenderemos nuestra definición de $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP$ para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean $\mathcal{A}$-simples, es decir, para funciones f Borel-medibles tales que

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Omega_j}$$

(donde $\Omega_j = f^{-1}[\{a_j\}]$ y $a_1, a_2, ..., a_n$ son todos los valores diferentes tomados por f), en este caso:

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, dP(t) := \sum_{j=1}^{n} a_j P(\chi_{\Omega_j}) = \sum_{j=1}^{n} a_j P(\Omega_j) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}).$$

Observemos que para el caso de funciones $\mathcal{A}$-simples también valen las igualdades (1.11) y (1.12), pues por ejemplo, si $k \neq j$ tenemos que $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$ y entonces $P(\Omega_k)P(\Omega_j) = \mathbf{0}$ por proposición 1.45, así:

$$\begin{aligned}
\|P(f)\psi\|^2 &= \langle P(f)\psi, P(f)\psi \rangle \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} a_j P(\Omega_j)\psi, \sum_{j=1}^{n} a_j P(\Omega_j)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle a_j P(\Omega_j)\psi, a_k P(\Omega_k)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \langle P(\Omega_j)\psi, P(\Omega_k)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j a_k \langle \psi, P(\Omega_j) P(\Omega_k)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j a_j \langle \psi, P(\Omega_j) P(\Omega_j)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \langle \psi, P(\Omega_j)\psi \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \mu_\psi(\Omega_j) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t).
\end{aligned}$$

Notemos que la igualdad anterior nos dice aún más sobre el operador $P(f) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, ya que

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t) \leq \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \Big) \mu_\psi(\mathbb{R}) = \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \Big) \|\psi\|^2$$

y como consecuencia

$$\|P(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})} \leq \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|. \tag{1.14}$$

Además, se puede demostrar que para funciones $\mathcal{A}$-simples la asociación $f \mapsto P(f)$ es lineal.

Tomemos ahora una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \geq 0$, acotada y Borel-medible. Nuestra intención es definir $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f\, dP$ para esta nueva clase de funciones, para ello, recordemos el siguiente lema que puede consultarse en [Gra09, pág.19]:

Lema 1.47. *Sea (X, Σ) un espacio medible y $f : X \to \mathbb{R}$ una función Σ-medible no negativa, entonces existe una sucesión $\{s_n\}_{n\geq 1}$ de funciones Σ-simples tal que*

i. $0 \leq s_n \leq s_{n+1} \leq f$ *y* $s_n \to f$ *puntualmente.*

ii. *Si f es acotada, entonces $s_n \to f$ uniformemente en X.*

Por lo anterior, tomemos $\{s_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-simples tal que $s_n \to f$ uniformemente, demostraremos que

$$P(s_n) = \int_{\mathbb{R}} s_n(t)\, dP(t), \quad n \geq 1$$

converge a un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, al cual justamente definiremos como $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f\, dP$. Utilizando (1.14) tenemos que para toda $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\|P(s_n) - P(s_m)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})} &= \|P(s_n - s_m)\| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |s_n(t) - s_m(t)| \longrightarrow 0\end{aligned}$$

ya que $s_n \to f$ uniformemente. Así, $\{P(s_n)\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ por lo que converge a un único operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Definiremos entonces a $P(f)$ como este límite, es decir

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dP(t) := \lim_{n\to\infty} P(s_n).$$

De nueva cuenta las igualdades (1.11) y (1.12) son válidas pues por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue[8]

$$\begin{aligned}\langle \psi, P(f)\psi\rangle &= \langle \psi, \lim_{n\to\infty} P(s_n)\psi\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle \psi, P(s_n)\psi\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n(t)\, d\mu_\psi(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} s_n(t)\, d\mu_\psi(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t)\end{aligned}$$

[8]Pues $0 \leq s_n(x) \leq f(x)$ y $f \in \mathrm{L}^1_{\mu_\psi}(\mathbb{R})$ pues al ser f acotada:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, d\mu_\psi(t) \leq \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\Big)\mu_\psi(\mathbb{R}) = \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|\Big)\|\psi\|^2 < \infty.$$

y también

$$\begin{aligned}
\|P(f)\psi\|^2 &= \|\lim_{n\to\infty} P(s_n)\psi\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \|P(s_n)\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |s_n(t)|^2 \, d\mu_\psi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{r\to\infty} |s_n(t)|^2 \, d\mu_\psi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t)
\end{aligned} \tag{1.15}$$

(nuevamente por el Teorema de convergencia dominada). Con todo lo anterior, podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema que utilizaremos con frecuencia en los capítulos posteriores:

Teorema 1.48. *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y P una familia espectral en $\mathfrak{H}$. Para cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ acotada y Borel-medible existe un único operador $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tal que*

$$\langle \psi, P(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mu_\psi(t)$$

y

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t).$$

Este operador es comunmente denotado por

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, dP(t) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP.$$

Demostración. Sea f como en las hipótesis, ya que[9]

$$f = [\mathfrak{Re}(f)_+ - \mathfrak{Re}(f)_-] + i[\mathfrak{Im}(f)_+ - \mathfrak{Im}(f)_-]$$

y cada uno de los cuatro términos de la derecha es una función positiva, acotada y Borel-medible, debido a la discusión anterior al teorema podemos definir:

$$P(f) := [P(\mathfrak{Re}(f)_+) - P(\mathfrak{Re}(f)_-)] + i[P(\mathfrak{Im}(f)_+) - P(\mathfrak{Im}(f)_-)] \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}).$$

Ya que la igualdad $\langle \psi, P(g)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(t) \, d\mu_\psi(t)$ es válida para funciones $g \geq 0$ acotadas y Borel-medibles y el producto interior es lineal en la segunda entrada, la definición de $P(f)$ nos asegura que

$$\langle \psi, P(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mu_\psi(t).$$

[9]Recordemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ entonces $f = f_+ - f_-$, donde $f_+(t) := f(t)$ si $f(t) \geq 0$ y $f_+(t) := 0$ si $f(t) \leq 0$. También $f_-(t) := 0$ si $f(t) \geq 0$ y $f_-(t) := -f(t)$ si $f(t) \leq 0$.

Además, tomando sucesiones de funciones simples que converjan a cada uno de los cuatro términos $\mathfrak{Re}(f)_+$, $\mathfrak{Re}(f)_-$, $\mathfrak{Im}(f)_+$ y $\mathfrak{Im}(f)_-$ y argumentando de manera similar a (1.15) se cumple

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t).$$

La unicidad del operador $P(f)$ es consecuencia de la unicidad de cada una de las partes $P(\mathfrak{Re}(f)_+)$, $P(\mathfrak{Re}(f)_-)$, $P(\mathfrak{Im}(f)_+)$ y $P(\mathfrak{Im}(f)_-)$.

□

Proposición 1.49. *Sea P una familia espectral en $\mathfrak{H}$ y sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funciones acotadas y Borel-medibles, entonces* [10]

I. *El operador $P : M^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tal que $f \mapsto \int_{\mathbb{R}} f \, dP$ es lineal y acotado, además $\|P\|_{\mathcal{B}(M^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathcal{B}(\mathfrak{H}))} \leq 1$.*

II. *$P(fg) = P(f)P(g) = P(g)P(f)$.*

III. *$P(\overline{f}) = P(f)^*$ (y entonces para una función f real-valuada el operador $P(f)$ es acotado y autoadjunto).*

IV. *$P(f)^* P(f) = P(|f|^2) = P(f)P(f)^*$ (es decir, $P(f)$ conmuta con su adjunto para cada $f \in M^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).*

V. *$P(\mathbf{1}) = \mathbb{I}$ ($\mathbf{1}$ denota la función constante $\mathbf{1}(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$).*

Demostración. Expondremos aquí sólo algunos aspectos de las pruebas, la demostración detallada puede consultarse en [Wei80, págs.185-186].

I. Por teorema 1.48 tenemos

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t) \leq \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \Big) \|\psi\|^2, \;\; \forall \psi \in \mathfrak{H},$$

entonces

$$\|P(f)\|_{\mathcal{B}(\mathfrak{H})} \leq \Big(\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \|f\|_\infty$$

y esto para toda $f \in M^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, por lo que

$$\|P\|_{\mathcal{B}(M^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}),\mathcal{B}(\mathfrak{H}))} \leq 1.$$

II. La afirmación es directa para funciones de la forma $\chi_{\Omega_1}, \chi_{\Omega_2}$ pues por proposición 1.45

$$P(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = P(\chi_{\Omega_1 \cap \Omega_2}) = P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\chi_{\Omega_1})P(\chi_{\Omega_2}),$$

ya que $P(\Omega_1)P(\Omega_2) = P(\Omega_2)P(\Omega_1)$, de manera similar obtenemos que $P(\chi_{\Omega_1}\chi_{\Omega_2}) = P(\chi_{\Omega_2})P(\chi_{\Omega_1})$.

[10] Denotamos por $M^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ que son acotadas y Borel-medibles.

III. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función $\mathcal{A}$-simple, es decir, si

$$f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{\Omega_j}, \quad \text{con} \quad \Omega_j = f^{-1}[\{a_j\}],$$

entonces $\overline{f} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} \chi_{\Omega_j}$, por lo que

$$\begin{aligned} P(\overline{f}) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} P(\chi_{\Omega_j}) &= \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} P(\Omega_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (a_j P(\Omega_j))^* \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j P(\Omega_j) \Big)^* \\ &= P(f)^* \end{aligned}$$

y así, $P(\overline{f}) = P(f)^*$.

IV. Es consecuencia inmediata de los incisos II y III ya que

$$P(f)^* P(f) = P(\overline{f}) P(f) = P(\overline{f} f) = P(|f|^2).$$

Análogamente $P(f)P(f)^* = P(|f|^2)$.

V. Ya que $1 = \chi_{\mathbb{R}}$, entonces $P(1) = P(\chi_{\mathbb{R}}) = P(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$.

□

Notemos que para la demostración del teorema 1.48 es importante la suposición de que f sea una función **acotada** y Borel-medible, lo que queremos ahora es extender la definición de $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, dP$ para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-medibles que **no** sean acotadas. Sea entonces $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función Borel-medible no necesariamente acotada, recordemos que si f es acotada $P(f) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ resultó ser un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, en este caso no esperamos que el operador $P(f)$ sea acotado así que necesitamos un dominio 'adecuado' para nuestro operador. Definamos el conjunto

$$\mathfrak{D}(f) := \Big\{ \psi \in \mathfrak{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi(t) < \infty \Big\} = \Big\{ \psi \in \mathfrak{H} : f \in \mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R}) \Big\},$$

el cual es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$.[11]

Definamos ahora la siguiente sucesión de funciones:

$$f_n := f \chi_{\Omega_n} \quad \text{donde} \quad \Omega_n := \{ t \in \mathbb{R} : |f(t)| \leq n \} \tag{1.16}$$

[11] Si $\psi \in \mathfrak{D}(f)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces

$$\mu_{\alpha\psi}(\Omega) = \langle \alpha\psi, P(\Omega)\alpha\psi \rangle = \langle \alpha\psi, \alpha P(\Omega)\psi \rangle = \overline{\alpha}\alpha \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle = |\alpha|^2 \langle \psi, P(\Omega)\psi \rangle = |\alpha|^2 \mu_\psi(\Omega)$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que f es Borel-medible, f_n es Borel-medible para cada n y por lo tanto $|f - f_n|^2$ es Borel-medible. Además, si $\psi \in \mathfrak{D}(f)$

$$\begin{aligned}\left||f(t) - f_n(t)|^2\right| &= |f(t) - f_n(t)|^2 \\ &\leq (|f(t)| + |f_n(t)|)^2 \\ &\leq (2\,\text{máx}\{|f(t)|, |f_n(t)|\})^2 \\ &= (2|f(t)|)^2 \\ &= 2^2|f(t)|^2 \in \mathrm{L}^1_{\mu_\psi}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

pues $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_\psi(t) < \infty$, luego, utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)|^2\, d\mu_\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |f(t) - f_n(t)|^2\, d\mu_\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu_\psi(t) = 0$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R})} = 0.$$

Así, $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R})$ y como $f_n \in M^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que para toda $\psi \in \mathfrak{D}(f)$:

$$\begin{aligned}\|P(f_n)\psi - P(f_m)\psi\|^2 &= \|(P(f_n) - P(f_m))\psi\|^2 \\ &= \|P(f_n - f_m)\psi\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f_n(t) - f_m(t)|^2\, d\mu_\psi(t) \\ &= \|f_n - f_m\|^2_{\mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{1.17}$$

por lo que $\{P(f_n)\psi\}_{n\geq 1}$ es también una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{H}$ (pues $\{f_n\}_{n\geq 1}$ lo era en $\mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R})$) y por lo tanto converge a un elemento en $\mathfrak{H}$, sea entonces

$$P(f)\psi := \lim_{n\to\infty} P(f_n)\psi.$$

Lo anterior define un operador $P(f)$ con dominio $\mathfrak{D}(f)$, es decir $\mathfrak{D}(P(f)) = \mathfrak{D}(f)$. Observemos que este operador $P(f)$ para funciones Borel-medibles no acotadas es también lineal y para toda $\psi \in \mathfrak{D}(P(f))$

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t),$$

---

para todo $\Omega \in \mathcal{A}$, así $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_{\alpha\psi}(t) < \infty$, es decir, $\alpha\psi \in \mathfrak{D}(f)$. Además, si $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(f)$:

$$\begin{aligned}\mu_{\varphi+\psi}(\Omega) &= \langle \varphi + \psi, P(\Omega)(\varphi + \psi)\rangle \\ &= \langle \varphi + \psi, P(\Omega)\varphi + P(\Omega)\psi\rangle \\ &= \langle \varphi, P(\Omega)\varphi\rangle + \langle \varphi, P(\Omega)\psi\rangle + \langle \psi, P(\Omega)\varphi\rangle + \langle \psi, P(\Omega)\psi\rangle \\ &= \mu_\varphi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega) + \langle \varphi, P(\Omega)\psi\rangle + \langle \psi, P(\Omega)\varphi\rangle \\ &\leq \mu_\varphi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega) + \mu_\varphi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega) \\ &= 2(\mu_\varphi(\Omega) + \mu_\psi(\Omega)),\end{aligned}$$

(la desigualdad es consecuencia de desarrollar la relación $0 \leq \langle \varphi - \psi, P(\Omega)(\varphi - \psi)\rangle$) por lo que $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_{\varphi+\psi}(t) < \infty$, luego $\varphi + \psi \in \mathfrak{D}(f)$.

como puede comprobarse tomando límites en la igualdad (1.17). Además,

$$\begin{aligned}
\langle \psi, P(f)\psi \rangle &= \langle \psi, \lim_{n\to\infty} P(f_n)\psi \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \langle \psi, P(f_n)\psi \rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)\, d\mu_\psi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, d\mu_\psi(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t)
\end{aligned}$$

por el Teorema de convergencia dominada (ya que $|f_n(t)| \leq |f(t)|\ \forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y $|f(t)| \in \mathrm{L}^2_{\mu_\psi}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1_{\mu_\psi}(\mathbb{R})$ pues μ_ψ es finita).[12]

Lo anterior puede resumirse en el siguiente:

Teorema 1.50. *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert y sea P una familia espectral en $\mathfrak{H}$. Para cada función Borel-medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ las expresiones*

$$\mathfrak{D}(P(f)) = \Big\{ \psi \in \mathfrak{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_\psi(t) < \infty \Big\}$$

$$P(f)\psi = \Big(\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dP(t) \Big)\psi \quad \textit{para} \quad \psi \in \mathfrak{D}(P(f))$$

definen un operador lineal en $\mathfrak{H}$. Más aún, $\mathfrak{D}(P(f))$ es denso en $\mathfrak{H}$ y para cada $\psi \in \mathfrak{D}(P(f))$ se cumple

$$\langle \psi, P(f)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, d\mu_\psi(t)$$

y

$$\|P(f)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_\psi(t).$$

Escribiremos por simplicidad

$$P(f) = \int_{\mathbb{R}} f\, dP.$$

Demostración. Debido a la discusión anterior al teorema sólo resta probar que $\mathfrak{D}(P(f))$ es un subconjunto denso de $\mathfrak{H}$.

Definamos Ω_n como en (1.16). Sea $\psi \in \mathfrak{H}$, probaremos que existe $\{\psi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{D}(P(f))$ tal que $\psi_n \to \psi$. Consideremos

$$\psi_n := P(\Omega_n)\psi \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

[12] Ver Teorema 3.5 de [Rud87].

se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\mu_{\psi_n}(\Omega) = \langle \psi_n, P(\Omega)\psi_n\rangle &= \langle P(\Omega_n)\psi, P(\Omega)P(\Omega_n)\psi\rangle \\ &= \langle P(\Omega_n)\psi, P(\Omega_n)P(\Omega)\psi\rangle \\ &= \langle \psi, P(\Omega_n)P(\Omega)\psi\rangle \\ &= \langle \psi, P(\Omega_n\cap\Omega)\psi\rangle \\ &= \mu_\psi(\Omega_n\cap\Omega) \quad \forall\Omega\in\mathcal{A}\end{aligned}$$

y como consecuencia

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\, d\mu_{\psi_n}(t) = \int_{\Omega_n} |f(t)|^2\, d\mu_\psi(t) \leq n^2 \int_{\Omega_n} d\mu_\psi(t) = n^2\mu_\psi(\Omega_n) < \infty,$$

así $\psi_n \in \mathfrak{D}(P(f))\ \ \forall n\in\mathbb{N}$. Ahora bien, ya que

$$\begin{aligned}\|\psi-\psi_n\|^2 = \|\mathbb{I}\psi - P(\Omega_n)\psi\|^2 &= \|P(\mathbf{1})\psi - P(\chi_{\Omega_n})\psi\|^2 \\ &= \|P(\mathbf{1}-\chi_{\Omega_n})\psi\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}(t)-\chi_{\Omega_n}(t)|^2\, d\mu_\psi(t) \quad \forall n\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|\psi-\psi_n\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} |\mathbf{1}(t)-\chi_{\Omega_n}(t)|^2\, d\mu_\psi(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |\mathbf{1}(t)-\chi_{\Omega_n}(t)|^2\, d\mu_\psi(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0\, d\mu_\psi(t) \\ &= 0\end{aligned}$$

por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue (pues $|\mathbf{1}(t)-\chi_{\Omega_n}(t)|^2 \leq \mathbf{1} \in \mathrm{L}^1_{\mu_\psi}(\mathbb{R})\ \ \forall t\in\mathbb{R}$, ya que μ_ψ es finita). Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}\|\psi-\psi_n\| = 0$ y por consecuencia $\lim_{n\to\infty}\psi_n = \psi$, esto demuestra que $\mathfrak{D}(P(f))$ es denso en $\mathfrak{H}$.

□

Proposición 1.51. *Sea P una familia espectral en $\mathfrak{H}$, entonces*

I. *Para cada función Borel-medible $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ el operador $P(f)$ cumple que $\mathfrak{D}(P(f)) = \mathfrak{D}(P(f)^*)$ y $\|P(f)\psi\| = \|P(f)^*\psi\|$, $\forall\psi\in\mathfrak{D}(P(f))$. Además, $P(f)^* = P(\overline{f})$.*

II. *Para cada función Borel-medible $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ el operador $P(f)$ es autoadjunto.*

III. *Si $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ son funciones Borel-medibles y $a,b\in\mathbb{C}$, se tiene que $aP(f)+bP(g)\subset P(af+bg)$ con $\mathfrak{D}(aP(f)+bP(g)) = \mathfrak{D}(P(f))\cap\mathfrak{D}(P(g))$ y $P(f)P(g)\subset P(fg)$ con $\mathfrak{D}(P(f)P(g)) = \mathfrak{D}(P(g))\cap\mathfrak{D}(P(fg))$. Notemos que si $\mathfrak{D}(P(fg))\subset\mathfrak{D}(P(g))$ entonces $P(f)P(g) = P(fg) = P(gf) = P(g)P(f)$ con dominio $\mathfrak{D}(P(fg))$.*

Demostración. Cuando $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función Borel-medible y acotada los tres incisos ya se demostraron en el teorema 1.49, si f es no acotada la demostración detallada de cada uno de los incisos puede consultarse en [dO09, págs.209-211].

□

1.4.2. El Teorema espectral

El objetivo de esta sección es enunciar una de las formas del Teorema espectral que nos será de gran utilidad a lo largo de todo este trabajo. En la sección pasada vimos que si P es una familia espectral en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función Borel-medible, entonces $P(f)$ es un operador autoadjunto; en particular, si consideramos la función $h(t) = t \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, es decir, la función identidad en $\mathbb{R}$, tenemos que el operador definido vía

$$T = P(h) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\, dP(t) = \int_{\mathbb{R}} t\, dP(t)$$

es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$. Lo anterior puede pensarse de la siguiente manera: dada una familia espectral P en $\mathfrak{H}$, P tiene asociado un operador autoadjunto $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ dado por

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\, dP(t). \tag{1.18}$$

Una de las formas del Teorema espectral (y la que a nosotros nos ocupa) es en cierto sentido la afirmación recíproca a la anterior, más precisamente tenemos lo siguiente:

Teorema 1.52 (Teorema espectral). *Para cada operador autoadjunto $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ existe una única familia espectral P^T en $\mathfrak{H}$ tal que*

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\, dP^T(t).$$

Es decir, $T = P^T(h)$ con $h(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

La familia espectral P^T que nos proporciona el teorema anterior es conocida como la **familia espectral** de T. Ahora bien, en la definición 1.46 introdujimos el concepto de **medida espectral** de una familia espectral P asociada a un vector $\psi \in \mathfrak{H}$, ya que el teorema anterior nos asegura que dado un operador autoadjunto T en $\mathfrak{H}$ existe una única familia espectral P^T tal que se cumple (1.18), la siguiente definición tiene sentido:

Definición 1.53. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador autoadjunto y P^T su familia espectral dada por el teorema 1.52, las medidas μ_ψ^T definidas en (1.9) vía P^T son llamadas las* **medidas espectrales** *del operador T.*

Con la terminología anterior, una consecuencia del Teorema espectral y del teorema 1.50 es que dado un operador autoadjunto $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, se tiene que $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}} t^2\, d\mu_\psi^T(t) < \infty, \tag{1.19}$$

además, para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$

$$\langle \psi, T\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} t\, d\mu_\psi^T(t) \tag{1.20}$$

y

$$\|T\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2 \, d\mu_\psi^T(t). \tag{1.21}$$

El Teorema espectral nos da también la posibilidad de definir funciones Borel-medibles del operador autoadjunto T, es decir, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función Borel-medible, queremos darle un significado a la expresión $f(T)$. Para ello, sea P^T la familia espectral del teorema 1.52, por teorema 1.50 $P^T(f)$ es un operador lineal en $\mathfrak{H}$ por lo que la siguiente definición tiene sentido:

Definición 1.54. *Sea T un operador autoadjunto actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, para cada función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel-medible definimos*

$$f(T) := P^T(f).$$

También, del teorema 1.50 y la definición anterior se desprende inmediatamente el siguiente:

Corolario 1.55. *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$. Para cada función Borel-medible $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se cumple que*

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi^T(t) < \infty\}.$$

Además

$$\langle \psi, f(T)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mu_\psi^T(t)$$

y

$$\|f(T)\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, d\mu_\psi^T(t).$$

Ejemplo 1.56. *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$ y sea $\Omega \in \mathcal{A}$, consideremos la función característica χ_Ω. Entonces por la relación en (1.13) y las definiciones anteriores:*

$$\chi_\Omega(T) := P^T(\chi_\Omega) = P^T(\Omega).$$

Como sabemos, estos operadores son proyecciones ortogonales en $\mathfrak{H}$ y son comúnmente conocidos como las **proyecciones ortogonales** *de T.*

Corolario 1.57. *Todas las proyecciones ortogonales de un operador autoadjunto T conmutan, es decir,*

$$\chi_\Omega(T)\chi_\Delta(T) = \chi_\Delta(T)\chi_\Omega(T), \quad \forall\, \Omega, \Delta \in \mathcal{A}.$$

Demostración. Es una consecuencia inmediata del ejemplo anterior y del inciso IV de la proposición 1.45.

□

Finalmente, demostramos un lema que utilizaremos frecuentemente en el Capítulo 2, principalmente en la demostración del teorema 2.3.

Lema 1.58. *Sea T es un operador autoadjunto y $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, $\psi \neq 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I. *ψ es un eigenvector de T, es decir, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T\psi = \lambda\psi$.*[13]

II. *La medida espectral de T en ψ es $\mu_\psi^T = \|\psi\|^2\delta_\lambda$, donde δ_λ es la medida de Dirac en λ.*[14]

III. *La proyección ortogonal $\chi_{\{\lambda\}}(T)$ cumple $\chi_{\{\lambda\}}(T)\psi = \psi$.*

Demostración. I. implica II. Ya que por hipótesis $T\psi = \lambda\psi$, se tiene por el corolario 1.55

$$0 = \|T\psi - \lambda\psi\|^2 = \|(T - \lambda\mathbb{I})\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^2 \, d\mu_\psi^T(t),$$

como $0 \leq |t-\lambda|^2$ para toda $t \in \mathbb{R}$, las igualdades anteriores implican que la función $g(t) := |t-\lambda|^2$ es igual a cero casi dondequiera con respecto a la medida μ_ψ^T, es decir

$$\mu_\psi^T(\{t \in \mathbb{R} : g(t) \neq 0\}) = 0.$$ [15]

Ya que $g(t) = |t-\lambda|^2 \neq 0$ si y sólo si $t \neq \lambda$, la expresión de arriba es equivalente a escribir

$$\mu_\psi^T(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}) = 0 \tag{1.22}$$

y en consecuencia $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \mu_\psi^T(\{\lambda\}) = 0$, con lo cual utilizando la definición de μ_ψ^T obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu_\psi^T(\{\lambda\}) &= \mu_\psi^T(\mathbb{R}) \\ &= \|P^T(\mathbb{R})\psi\|^2 \\ &= \|\mathbb{I}\psi\|^2 \\ &= \|\psi\|^2.\end{aligned} \tag{1.23}$$

Así, de (1.22) y (1.23) podemos afirmar que para todo $\Lambda \in \mathcal{A}$

$$\text{si } \lambda \notin \Lambda, \qquad \mu_\psi^T(\Lambda) \leq \mu_\psi^T(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}) = 0$$

$$\text{y si } \lambda \in \Lambda, \qquad \mu_\psi^T(\Lambda) = \mu_\psi^T(\{\lambda\}) = \|\psi\|^2,$$

es decir, $\mu_\psi^T = \|\psi\|^2\delta_\lambda$.

II. implica I. Supongamos ahora que para $0 \neq \psi \in \mathfrak{D}(T)$ se tiene la igualdad $\mu_\psi^T = \|\psi\|^2\delta_\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, utilizando la proposición B.12 obtenemos

$$\begin{aligned}\|T\psi - \lambda\psi\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^2 \, d\mu_\psi^T(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |t-\lambda|^2 \, d\|\psi\|^2\delta_\lambda(t) \\ &= \|\psi\|^2|\lambda-\lambda|^2 \\ &= 0,\end{aligned} \tag{1.24}$$

[13] Por proposición 1.42 sabemos que si T es autoadjunto entonces todos sus eigenvalores son reales.

[14] Recordemos que la medida de Dirac en λ es $\delta_\lambda(\Lambda) = 0$ si $\lambda \notin \Lambda$ y $\delta_\lambda(\Lambda) = 1$ si $\lambda \in \Lambda$, $\forall\,\Lambda \in \mathcal{A}$.

[15] Ver la proposición B.14 en los apéndices.

por lo tanto $\|T\psi - \lambda\psi\|^2 = 0$ y en consecuencia $T\psi = \lambda\psi$, es decir, ψ es un eigenvector de T.

II. implica III. Por hipótesis la medida espectral de T asociada a $\psi \neq 0$ es de la forma $\mu_\psi^T = \|\psi\|^2\delta_\lambda$, utilizando el ejemplo 1.56 obtenemos

$$\begin{aligned}\|\psi\|^2 &= \|\psi\|^2 \cdot 1 \\ &= \|\psi\|^2\delta_\lambda(\{\lambda\}) \\ &= \mu_\psi^T(\{\lambda\}) \\ &= \|P^T(\{\lambda\})\psi\|^2 \\ &= \|P^T(\chi_{\{\lambda\}})\psi\|^2 \\ &= \|\chi_{\{\lambda\}}(T)\psi\|^2,\end{aligned} \tag{1.25}$$

así, $\|\psi\|^2 = \|\chi_{\{\lambda\}}(T)\psi\|^2$ y como $\chi_{\{\lambda\}}(T)$ es una proyección ortogonal, por lema 1.32 tenemos la igualdad $\psi = \chi_{\{\lambda\}}(T)\psi$.

Finalmente demostremos que III. implica II. Si existe $0 \neq \psi \in \mathfrak{H}$ tal que

$$\psi = \chi_{\{\lambda\}}(T)\psi,$$

entonces nuevamente por el ejemplo 1.56

$$\begin{aligned}\mu_\psi^T(\mathbb{R}) &= \|P^T(\mathbb{R})\psi\|^2 \\ &= \|\mathbb{I}\psi\|^2 \\ &= \|\psi\|^2 \\ &= \|\chi_{\{\lambda\}}(T)\psi\|^2 \\ &= \|P^T(\{\lambda\})\psi\|^2 \\ &= \mu_\psi^T(\{\lambda\})\end{aligned} \tag{1.26}$$

por lo que $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \mu_\psi^T(\{\lambda\}) = 0$, es decir, $\mu_\psi^T(\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}) = 0$. De un argumento análogo al utilizado con las expresiones (1.22) y (1.23) concluímos que

$$\mu_\psi^T = \|\psi\|^2\delta_\lambda.$$

□

Corolario 1.59. *Sea T autoadjunto, si λ es un eigenvalor del operador T, entonces*

$$\text{Ran } \chi_{\{\lambda\}}(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : T\psi = \lambda\psi\} = \text{Ker}\,(T - \lambda),$$

es decir, el operador $\chi_{\{\lambda\}}(T)$ es la proyección ortogonal del espacio $\mathfrak{H}$ sobre el eigenespacio correspondiente al eigenvalor λ.

Demostración. Ya que $\chi_{\{\lambda\}}(T)$ es una proyección ortogonal, sabemos por el teorema 1.30 que

$$\text{Ran } \chi_{\{\lambda\}}(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \chi_{\{\lambda\}}(T)\psi = \psi\}$$

por lo que bastaría demostrar que

$$\{\psi \in \mathfrak{H} : \chi_{\{\lambda\}}(T)\psi = \psi\} = \{\psi \in \mathfrak{H} : T\psi = \lambda\psi\},$$

pero esto es una consecuencia inmediata de la equivalencia entre las afirmaciones I. y III. del lema 1.58.

□

1.5. Notas

Secciones 1.1, 1.2 y 1.3

Los temas expuestos en estas tres secciones y las demostraciones de aquellos resultados que no presentamos pueden encontrarse en la mayoría de la literatura sobre espacios de Hilbert o Análisis funcional, en particular, el lector interesado puede consultar la literatura clásica como [Wei80], [AG93], [Kat95], [BN72], [BS87], [Kre78], [Sch02] y [RS80].

Sección 1.4

El material de la subsección 1.4.1 está basado en el Capítulo 3 de [Tes09], consideramos que ésta es una manera rápida y accesible de introducir muchos de los conceptos presentados en la sección, sin embargo, creemos que las construcciones del operador $P(f) = \int_{\mathbb{R}} f\, dP$ realizadas en los libros [Amr09], [BB03] o [Sch02] le aportan mucho más sentido a la definición de $P(f)$ como una 'integral'. La subsección 1.4.2 es sólo una brevísima introducción al Teorema espectral, existe basta literatura en donde se pueden consultar diversas y muy diferentes pruebas del teorema, por ejemplo en [Kat95], [Tes09] y [Amr09], en [dO09] se ofrece un panorama de diferentes técnicas usadas para demostrarlo.

CAPÍTULO 2

Descomposición Espectral

Si $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$, el espectro de T puede descomponerse en varias 'partes' a las que llamaremos sus **tipos espectrales**, gran parte de la Teoría de operadores se centra en el estudio detallado de cada uno de estos componentes del espectro y las aplicaciones dentro de la Física matemática son muy variadas. El objetivo de este capítulo es introducir algunas de esas descomposiciones que son la base para todo el material desarrollado en los Capítulos 3 y 4, además, en la sección 2.3 presentamos un resultado que obtuvimos a partir del análisis del teorema 2.10 y que nos pareció interesante.

Algo que queremos resaltar es que cada tipo espectral puede estudiarse con más detalle utilizando las **medidas espectrales** μ_ψ^T que introdujimos en la definición 1.46 y que están asociadas de manera única a cada operador autoadjunto T, también, las **proyecciones espectrales** $\{\chi_\Omega(T)\}_{\Omega\in\mathcal{A}}$ del ejemplo 1.56 será utilizadas frecuentemente.

2.1. Espectro puntual y espectro contínuo

Esta sección tiene como objetivo presentar una primera descomposición del espectro de un operador autoadjunto T como unión de sus 'partes' **puntual** y **continua**

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T),$$

vía la descomposición del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ como suma directa de los subespacios puntual y continuo de T que definiremos a continuación, esta descomposición será la base para las descomposiciones espectrales introducidas en la sección 2.2 y que son el objetivo principal del capítulo.

Definición 2.1. *Sea* $\{\varphi_r\}$ *el conjunto de los eigenvectores de* T*, el* **subespacio puntual** *de* $\mathfrak{H}$ *con respecto al operador* T *(que denotaremos como* $\mathfrak{H}_p(T) \subset \mathfrak{H}$*) es la cerradura del subconjunto lineal generado por el conjunto de los eigenvectores de* T*, es decir,* $\mathfrak{H}_p(T) := \overline{\text{span}\{\varphi_r\}}$*; su complemento ortogonal* $\mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^{\perp}$ *es el* **subespacio continuo** *de* $\mathfrak{H}$ *con respecto a* T*.*

Observación 2.2. *Por simplicidad llamaremos a* $\mathfrak{H}_p(T)$ *y* $\mathfrak{H}_c(T)$ *los subespacios puntual y continuo de* T *respectivamente. También los llamaremos indistintamente como* **subespacios espectrales** *de* T*.*

Como mencionamos al inicio, las medidas espectrales asociadas a un operador jugarán un papel fundamental en todos los resultados importantes del capítulo, es por ello que necesitamos definiciones alternativas a los conceptos de subespacios puntual y continuo que acabamos de dar pero que involucren a las medidas espectrales asociadas al operador en cuestión. El siguiente teorema tiene como objetivo dar esas definiciones.

Teorema 2.3. *Sea* T *un operador autoadjunto en* $\mathfrak{H}$*.*

I. $\mathfrak{H}_p(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \exists\, \Omega \subset \mathbb{R} \text{ contable y } \mu_\psi^T(\mathbb{R} \setminus \Omega) = 0\}$
$\quad = \{\psi \in \mathfrak{H} : \exists\, \Omega \subset \mathbb{R} \text{ contable y } \chi_\Omega(T)\psi = \psi\}$.

II. $\mathfrak{H}_c(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T(\{t\}) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$.

III. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_c(T)$ *y tanto* $\mathfrak{H}_p(T)$ *como* $\mathfrak{H}_c(T)$ *reducen a* T*.*

Demostración. Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$ el conjunto de todos los eigenvalores de T, supongamos que $\Lambda \neq \emptyset$. Ya que $\mathfrak{H}$ es un espacio separable, Λ es un conjunto a lo más numerable (corolario 1.43), sea entonces $\Lambda = \{\lambda_j : j \in \mathbb{N}\}$ con $\lambda_j \neq \lambda_k$ si $j \neq k$.

Demostremos I. Notemos primero que las dos caracterizaciones de $\mathfrak{H}_p(T)$ son equivalentes pues si $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto contable, entonces $\mu_\psi^T(\mathbb{R}\setminus\Omega) = 0$ si y sólo si $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \mu_\psi^T(\Omega) = 0$ si y sólo si $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) = \mu_\psi^T(\Omega)$ si y sólo si[1] $\|\psi\|^2 = \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2$ si y sólo si $\psi = \chi_\Omega(T)\psi$ (por lema 1.32). Entonces:

$\subseteq]$ Tomemos $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, ya que $\mathfrak{H}_p(T)$ es la cerradura del subconjunto lineal generado por todos los eigenvectores de T (definición 2.1) entonces [2]

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j, \qquad c_j \in \mathbb{C},\ \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

donde ψ_j es un eigenvector del eigenvalor λ_j para cada j. Demostraremos primero que

$$\chi_\Lambda(T)\psi_j = \psi_j, \quad \forall j \in \mathbb{N};$$

ya que $\Lambda = \cup_{j\geq 1}\{\lambda_j\}$, de la definición 1.44 obtenemos la igualdad

$$\chi_\Lambda(T)\psi_j = P^T(\Lambda)\psi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P^T(\{\lambda_k\})\psi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{\lambda_k\}}(T)\psi_j,$$

[1] Ya que $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) = \|P^T(\mathbb{R})\psi\|^2 = \|\mathbb{I}\psi\|^2 = \|\psi\|^2$ y $\mu_\psi^T(\Omega) = \|P^T(\Omega)\psi\|^2 = \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2$.

[2] Ver las Notas al final del capítulo.

donde cada $\chi_{\{\lambda_k\}}(T)$ es la proyección ortogonal sobre el eigenespacio correspondiente al eigenvalor λ_k (corolario 1.59). Ya que T es autoadjunto, sabemos que eigenvectores correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales (proposición 1.42) por lo que si $j \neq k$ entonces $\psi_j \in \operatorname{Ker}(T-\lambda_k)^\perp$ y en este caso $\chi_{\{\lambda_k\}}(T)\psi_j = 0$, así, de las igualdades anteriores obtenemos

$$\chi_\Lambda(T)\psi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \chi_{\{\lambda_k\}}(T)\psi_j = \chi_{\{\lambda_j\}}(T)\psi_j = \psi_j, \tag{2.2}$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $\chi_{\{\lambda_j\}}(T)$ es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Ker}(T-\lambda_j)$ y $\psi_j \in \operatorname{Ker}(T-\lambda_j)$.

Ahora bien, ya que $\chi_\Lambda(T)$ es un operador lineal y continuo (es una proyección) y utilizando las igualdades obtenidas en (2.1) y (2.2) concluímos que

$$\chi_\Lambda(T)\psi = \chi_\Lambda(T) \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\chi_\Lambda(T)\psi_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j\psi_j = \psi,$$

es decir, $\chi_\Lambda(T)\psi = \psi$, como Λ es un conjunto contable concluímos que

$$\psi \in \{\psi \in \mathfrak{H} : \exists\, \Omega \subset \mathbb{R} \text{ contable y } \chi_\Omega(T)\psi = \psi\}.$$

$\supseteq$] Ahora tomemos $\psi \in \mathfrak{H}$ tal que existe un conjunto contable $\Omega \subset \mathbb{R}$ y $\chi_\Omega(T)\psi = \psi$; sea $\Omega = \{t_j \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N}\}$, $t_j \neq t_k$ si $j \neq k$. Ya que $\Omega = \cup_{j\geq 1}\{t_j\}$, entonces

$$\psi = \chi_\Omega(T)\psi = P^T(\Omega)\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P^T(\{t_j\})\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{\{t_j\}}(T)\psi,$$

y luego

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{\{t_j\}}(T)\psi. \tag{2.3}$$

Ya que $\chi_{\{t_j\}}(T)$ una proyección ortogonal para cada $j \in \mathbb{N}$, entonces $\chi_{\{t_j\}}(T)^2 = \chi_{\{t_j\}}(T)$, por lo que la igualdad

$$\chi_{\{t_j\}}(T)\Big(\chi_{\{t_j\}}(T)\psi\Big) = \chi_{\{t_j\}}(T)\psi \tag{2.4}$$

y el lema 1.58 nos aseguran que para cada t_j tal que $\chi_{\{t_j\}}(T)\psi \neq 0$, $\chi_{\{t_j\}}(T)\psi$ es en realidad un eigenvector de T con eigenvalor t_j por lo que de la expresión (2.3) concluímos inmediatamente que ψ está en la cerradura del subconjunto lineal generado por los eigenvectores de T, es decir, $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$.

Demostremos II. $\subseteq$] Sea $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$, queremos demostrar que $\mu_\psi^T(\{t\}) = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$. Sea entonces $t \in \mathbb{R}$ y consideremos al vector $\chi_{\{t\}}(T)\psi$, tenemos dos casos:

Caso 1. Si $\chi_{\{t\}}(T)\psi = 0$ entonces

$$\mu_\psi^T(\{t\}) = \|P^T(\{t\})\psi\|^2 = \|\chi_{\{t\}}(T)\psi\|^2 = 0,$$

Caso 2. Si $\chi_{\{t\}}(T)\psi \neq 0$ entonces del mismo argumento utilizado en la expresión (2.4) podemos concluír que $\chi_{\{t\}}(T)\psi$ es un eigenvector del operador T con eigenvalor t y por lo tanto $\chi_{\{t\}}(T)\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, ya que por hipótesis $\psi \in \mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^\perp$ entonces ψ y $\chi_{\{t\}}(T)\psi$ son ortogonales, así

$$\mu_\psi^T(\{t\}) = \langle \psi, P^T(\{t\})\psi\rangle = \langle \psi, \chi_{\{t\}}(T)\psi\rangle = 0.$$

En cualquier caso $\mu_\psi^T(\{t\}) = 0$, por lo que

$$\psi \in \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T(\{t\}) = 0, \, \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

$\supseteq$] Tomemos en este caso $\psi \in \mathfrak{H}$ tal que $\mu_\psi^T(\{t\}) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$, queremos demostrar que $\psi \in \mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^\perp$, es decir $\langle \psi, \eta\rangle = 0$ para todo $\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$. Tomemos $\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$ arbitrario, como $\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces por el inciso I se cumple que existe $\Omega \subset \mathbb{R}$ contable tal que

$$\chi_\Omega(T)\eta = \eta. \tag{2.5}$$

Supongamos que $\Omega = \{t_j \in \mathbb{R} : j \in \mathbb{N}\}$, ya que $\mu_\psi^T(\{t\}) = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\chi_\Omega(T)\psi\|^2 &= \|P^T(\Omega)\psi\|^2 \\
&= \mu_\psi^T(\Omega) \\
&= \mu_\psi^T(\cup_{j\geq 1}\{t_j\}) \\
&= \sum_{j\geq 1} \mu_\psi^T(\{t_j\}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\chi_\Omega(T)\psi = 0. \tag{2.6}$$

Finalmente, de las expresiones (2.5) y (2.6) y del hecho que $\chi_\Omega(T)$ es un operador autoadjunto (es una proyección) concluímos que

$$\langle \psi, \eta\rangle = \langle \psi, \chi_\Omega(T)\eta\rangle = \langle \chi_\Omega(T)\psi, \eta\rangle = \langle 0, \eta\rangle = 0,$$

por lo tanto $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$.

Por último demostremos III. La primera parte de la afirmación es consecuencia directa de la definición de $\mathfrak{H}_c(T)$ y del teorema 1.8 (de la Proyección), ya que

$$\mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^\perp$$

y entonces $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_c(T)$. Probemos ahora que $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ son subespacios reductores del operador T, debido a la proposición A.2 es suficiente probar que $\mathfrak{H}_p(T)$ reduce a T y para esto, demostraremos que si P_p^T es la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathfrak{H}_p(T)$, entonces se tiene

$$P_p^T \chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T) P_p^T, \quad \forall\, \Omega \in \mathcal{A}$$

pues por la proposición A.6 esto garantiza que $\mathfrak{H}_p(T)$ sea un subespacio reductor de T. Tomemos entonces $\psi \in \mathfrak{H}$, ya que $P_p^T\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ el inciso I nos asegura que existe $\Delta \subset \mathbb{R}$ contable tal que $\chi_\Delta(T)P_p^T\psi = P_p^T\psi$, además (pues por corolario 1.57 todas las proyecciones ortogonales de T conmutan) tenemos

$$\chi_\Omega(T)P_p^T\psi = \chi_\Omega(T)\chi_\Delta(T)P_p^T\psi = \chi_\Delta(T)\chi_\Omega(T)P_p^T\psi$$

y este último término es un elemento de $\mathfrak{H}_p(T)$ pues por el inciso I, si Δ es un conjunto contable, cualquier vector η que cumpla $\chi_\Delta(T)\eta = \eta$ es un elemento de $\mathfrak{H}_p(T)$, en particular $\chi_\Delta(T)\chi_\Omega(T)P_p^T\psi$ cumple eso pues $\chi_\Delta(T)^2 = \chi_\Delta(T)$. Así, $\chi_\Delta(T)\chi_\Omega(T)P_p^T\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ y por la igualdad de arriba $\chi_\Omega(T)P_p^T\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, por lo tanto $P_p^T\chi_\Omega(T)P_p^T\psi = \chi_\Omega(T)P_p^T\psi$ y esto para cada $\psi \in \mathfrak{H}$

$$P_p^T\chi_\Omega(T)P_p^T = \chi_\Omega(T)P_p^T.$$

Tomando adjuntos en la expresión anterior obtenemos [3]

$$P_p^T\chi_\Omega(T) = (\chi_\Omega(T)P_p^T)^* = (P_p^T\chi_\Omega(T)P_p^T)^* = P_p^T\chi_\Omega(T)P_p^T = \chi_\Omega(T)P_p^T,$$

es decir, $P_p^T\chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T)P_p^T$ para todo $\Omega \in \mathcal{A}$.

□

El inciso III del teorema anterior es importante en el siguiente sentido: al ser $\mathfrak{H}_p(T)$ un subespacio reductor de T (y por lo tanto $\mathfrak{H}_c(T)$ también), el corolario A.3 nos asegura que el operador T puede 'descomponerse' como suma de los operadores $T_p = T|_{\mathfrak{H}_p(T)\cap\mathfrak{D}(T)}$ y $T_c = T|_{\mathfrak{H}_c(T)\cap\mathfrak{D}(T)}$, es decir, si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ y

$$\psi = \psi_p + \psi_c, \quad \psi_p \in \mathfrak{H}_p(T), \psi_c \in \mathfrak{H}_c(T)$$

entonces $T\psi = T_p\psi_p + T_c\psi_c$, lo que denotamos por

$$T = T_p \oplus T_c.$$

Además, como T es autoadjunto, por teorema A.4 inciso II, T_p y T_c son también operadores autoadjuntos en $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ respectivamente. El operador T_p es conocido como la 'parte' **puntual** de T y T_c como su parte **continua**.

Definición 2.4. *Si $\mathfrak{H}_p(T) \neq \{0\}$, el* **espectro puntual** *del operador T es*

$$\sigma_p(T) := \sigma(T_p)$$

y si $\mathfrak{H}_c(T) \neq \{0\}$, el **espectro continuo** *de T es*

$$\sigma_c(T) := \sigma(T_c),$$

es decir, el espectro puntual (continuo) del operador T es el espectro de su respectiva parte puntual T_p (continua T_c).

En el caso en que la dimensión del subespacio involucrado sea cero, diremos que la respectiva parte del espectro es vacía, es decir, si por ejemplo $\mathfrak{H}_p(T) = \{0\}$ entonces $\sigma_p(T) = \emptyset$.

[3]Los operadores P_p^T y $\chi_\Omega(T)$ son proyecciones ortogonales y por lo tanto autoadjuntos.

Corolario 2.5. *Si T es un operador autoadjunto, entonces*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T).$$

Demostración. Es consecuencia directa de la proposición A.7 y la definición anterior pues

$$\sigma(T) = \sigma(T_p) \cup \sigma(T_c) = \sigma_p(T) \cup \sigma(T_c).$$

□

Algo que vale la pena notar es que λ es eigenvalor de T si y sólo si lo es de T_p y además, T_c no tiene eigenvalores. Si λ fuera eigenvalor de T entonces existiría $\psi \neq 0$ tal que $T\psi = \lambda\psi$, es decir, ψ sería un eigenvector de T, por lo tanto $\psi \in \mathfrak{H}_p(T) \cap \mathfrak{D}(T)$ y en consecuencia

$$T_p\psi = T\psi = \lambda\psi \tag{2.7}$$

lo que inmediatamente nos dice que λ es eigenvalor de T_p; ahora bien, si λ fuera eigenvalor de T_p y $\psi \neq 0$ es tal que $T_p\psi = \lambda\psi$, automáticamente $\psi \in \mathfrak{H}_p(T) \cap \mathfrak{D}(T)$ pues por definición $\mathfrak{D}(T_p) = \mathfrak{H}_p(T) \cap \mathfrak{D}(T)$ por lo tanto se dan las igualdades en (2.7) y λ sería eigenvalor de T. Notemos también que T_c no tiene eigenvalores pues si λ fuera eigenvalor de T_c y $\psi \neq 0$ fuera tal que $T_c\psi = \lambda\psi$, de manera similar a lo dicho con anterioridad obtendríamos que $\psi \in \mathfrak{H}_c(T) \cap \mathfrak{D}(T)$ (pues $\mathfrak{D}(T_c) = \mathfrak{H}_c(T) \cap \mathfrak{D}(T)$) y además ψ sería también eigenvector de T lo que por definición implica que $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, de esta manera $\psi \in \mathfrak{H}_p(T) \cap \mathfrak{H}_c(T)$ y entonces $\psi = 0$ lo que sería una contradicción.

Una consecuencia importante de lo discutido arriba es el siguiente:

Lema 2.6. *Sea $\sigma_e(T)$ el conjunto de todos los eigenvalores del operador T, entonces*

$$\sigma_e(T) \subset \sigma_p(T).$$

Demostración. Si λ fuera eigenvalor de T también lo sería de T_p por la discusión que hicimos arriba, luego $\lambda \in \sigma(T_p) = \sigma_p(T)$.

□

Vale la pena mencionar que algunos libros[4] definen el espectro puntual $\sigma_p(T)$ de manera distinta a como lo hicimos nosotros, ellos lo definen simplemente como el conjunto de los eigenvalores del operador T. En realidad no existe gran diferencia entre las dos definiciones pues según nuestra definición, el lema anterior nos dice que el conjunto de los eigenvalores $\sigma_e(T)$ está contenido en el espectro puntual $\sigma_p(T)$ e incluso se puede demostrar que el espectro puntual de T es el conjunto de los puntos de acumulación de $\sigma_e(T)$, es decir

$$\sigma_p(T) = \overline{\sigma_e(T)}.$$

[4]Véase por ejemplo, [Wei80] y [Tes09].

2.2. Espectro absolutamente continuo y singular continuo

Un refinamiento a la parte continua del operador T introducida en la sección anterior es posible, este refinamiento da como resultado la clásica descomposición de un operador T en sus partes **puntual** T_p, **absolutamente continua** T_{ac} y **singular continua** T_{sc}, es decir

$$T = T_p \oplus T_{ac} \oplus T_{sc}, \tag{2.8}$$

así como de su espectro

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T).$$

La realización de la descomposición anterior será el objetivo de esta sección, aunque existe basta literatura al respecto, la prueba aquí presentada no hace uso del Teorema de descomposición de Lebesgue (teorema 2.16) que es un argumento común en la literatura[5], más aún, en la sección 2.3 mostramos que bajo ciertas hipótesis en realidad este teorema puede verse como una consecuencia de la descomposición (2.8).

Comenzaremos con alguna terminología necesaria, recordemos que si (X, Σ) es un espacio medible y μ, ν son dos medidas definidas en él, la notación

$$\mu \perp \nu \qquad \text{y} \qquad \mu \ll \nu$$

nos indica respectivamente que μ y ν son medidas mutuamente singulares (i.e. existe $\Omega \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega) = 0$ y $\nu(X \setminus \Omega) = 0$) y que μ es absolutamente continua con respecto a ν (i.e. $\forall B \in \Sigma$, $\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$), también, ℓ siempre denotará la medida de Lebesgue sobre los conjuntos de Borel $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}$; diremos que una medida μ es continua si $\mu(\{t\}) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Con esto en mente definimos lo siguiente:

Definición 2.7. *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$.*

I. *El subespacio* **singular** *de T es*

$$\mathfrak{H}_s(T) := \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T \perp \ell\}.$$

II. *El subespacio* **absolutamente continuo** *de T es*

$$\mathfrak{H}_{ac}(T) := \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T \ll \ell\}.$$

III. *El subespacio* **singular continuo** *de T es*

$$\mathfrak{H}_{sc}(T) := \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T \perp \ell \ \text{ y } \ \mu_\psi^T(\{t\}) = 0,\ \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

[5] Ver por ejemplo [Kat95, pág. 518].

Es inmediato notar (utilizando los dos primeros incisos del teorema 2.3) que se dan las inclusiones

$$\mathfrak{H}_p(T) \subset \mathfrak{H}_s(T), \quad \mathfrak{H}_{ac}(T) \subset \mathfrak{H}_c(T) \quad \text{y} \quad \mathfrak{H}_{sc}(T) \subset \mathfrak{H}_c(T) \tag{2.9}$$

pues si $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces μ_ψ^T está concentrada en a lo más una cantidad numerable de puntos, es decir, existe $\Omega \subset \mathbb{R}$ contable tal que $\mu_\psi^T(\mathbb{R} \setminus \Omega) = 0$ pero al ser Ω contable se tiene por la aditividad de ℓ que $\ell(\Omega) = 0$ y entonces $\mu_\psi^T \perp \ell$ que por definición implica $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$; ahora bien, si $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ entonces $\mu_\psi^T \ll \ell$ por lo que para toda $t \in \mathbb{R}$, $\mu_\psi^T(\{t\}) = 0$ pues $\ell(\{t\}) = 0$, luego, μ_ψ^T es una medida continua y $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$.

Como en la sección pasada, los subespacios espectrales definidos arriba tienen una caracterización en términos de las proyecciones espectrales asociadas al operador T.

Teorema 2.8. *Se tiene lo siguiente:*

I. $\mathfrak{H}_s(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \exists\, \Omega \subset \mathbb{R} \text{ con } \ell(\Omega) = 0 \text{ y } \chi_\Omega(T)\psi = \psi\}$.

II. $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \chi_\Omega(T)\psi = 0,\ \forall\, \Omega \in \mathcal{A} \text{ tal que } \ell(\Omega) = 0\}$.

III. $\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_s(T) \cap \mathfrak{H}_c(T)$.

Demostración. La demostración del inciso I es análoga a un argumento dado en el inciso I del teorema 2.3 pues por definición $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$ si y sólo si existe $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto de medida de Lebesgue cero tal que $\mu_\psi^T(\mathbb{R}\setminus\Omega) = 0$, entonces $\mu_\psi^T(\mathbb{R}\setminus\Omega) = 0$ si y sólo si $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \mu_\psi^T(\Omega) = 0$ si y sólo si $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) = \mu_\psi^T(\Omega)$ si y sólo si[6] $\|\psi\|^2 = \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2$ si y sólo si $\psi = \chi_\Omega(T)\psi$ (por lema 1.32).

Demostremos II. Tomemos $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y sea $\Omega \in \mathcal{A}$ un conjunto cualquiera de medida (de Lebesgue) cero, es decir, $\ell(\Omega) = 0$. Como por definición $\mu_\psi^T \ll \ell$ entonces $\mu_\psi^T(\Omega) = 0$ y luego

$$\|\chi_\Omega(T)\psi\|^2 = \|P^T(\Omega)\psi\|^2 = \mu_\psi^T(\Omega) = 0,$$

por lo que $\|\chi_\Omega(T)\psi\| = 0$ y entonces $\chi_\Omega(T)\psi = 0$. Recíprocamente, si $\chi_\Omega(T)\psi = 0$ para todo $\Omega \subset \mathbb{R}$ con $\ell(\Omega) = 0$, reordenando las igualdades anteriores obtenemos

$$\mu_\psi^T(\Omega) = \|P^T(\Omega)\psi\|^2 = \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2 = 0$$

para todo $\Omega \subset \mathbb{R}$ con $\ell(\Omega) = 0$, es decir, $\mu_\psi^T(\Omega) = 0$ si $\ell(\Omega) = 0$. Concluímos que $\mu_\psi^T \ll \ell$ y por consecuencia $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$.

El inciso III es consecuencia directa de la definición de $\mathfrak{H}_s(T)$ y del inciso II del teorema 2.3.

□

Recordemos que los subespacios espectrales $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ introducidos en la sección pasada fueron por definición subespacios del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, es decir, subconjuntos lineales cerrados de $\mathfrak{H}$ (ver definición 2.1); para el caso de los

[6]Ya que $\mu_\psi^T(\mathbb{R}) = \|P^T(\mathbb{R})\psi\|^2 = \|\mathbb{I}\psi\|^2 = \|\psi\|^2$ y $\mu_\psi^T(\Omega) = \|P^T(\Omega)\psi\|^2 = \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2$.

'subespacios' $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ que acabamos de definir no resulta evidente de la definición que ellos sean también subespacios de $\mathfrak{H}$, la siguiente proposición tiene como objetivo aclarar este aspecto.

Proposición 2.9. *$\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ y $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ son subconjuntos lineales cerrados de $\mathfrak{H}$, es decir, subespacios del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Denotaremos a las respectivas proyecciones ortogonales en estos subespacios por P_s, P_{sc} y P_{ac}.*

Demostración. Comenzaremos con $\mathfrak{H}_s(T)$, veamos primero que efectivamente es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$. Sean $\psi, \eta \in \mathfrak{H}_s(T)$, por teorema 2.8 existen Ω_ψ y Ω_η subconjuntos de $\mathbb{R}$ tales que $\ell(\Omega_\psi) = 0 = \ell(\Omega_\eta)$ y

$$\chi_{\Omega_\psi}(T)\psi = \psi, \;\; \chi_{\Omega_\eta}(T)\eta = \eta,$$

es decir, $\psi \in \operatorname{Ran} \chi_{\Omega_\psi}(T)$ y $\eta \in \operatorname{Ran} \chi_{\Omega_\eta}(T)$. Tomemos $a \in \mathbb{C}$ arbitraria, ya que $\Omega_\psi \subset \Omega_\psi \cup \Omega_\eta$ y $\Omega_\eta \subset \Omega_\psi \cup \Omega_\eta$ entonces, por la proposición 1.45 inciso III, $\operatorname{Ran} \chi_{\Omega_i} \subset \operatorname{Ran} \chi_{\Omega_\psi \cup \Omega_\eta}$ para $i \in \{\psi, \eta\}$ y entonces

$$\chi_{\Omega_\psi \cup \Omega_\eta}(T)(a\psi + \eta) = a \cdot \chi_{\Omega_\psi \cup \Omega_\eta}(T)\psi + \chi_{\Omega_\psi \cup \Omega_\eta}(T)\eta = a\psi + \eta,$$

como $\ell(\Omega_\psi \cup \Omega_\eta) = 0$ entonces por teorema 2.8, $a\psi + \eta \in \mathfrak{H}_s(T)$ y así, $\mathfrak{H}_s(T)$ es un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$.

Ahora bien, demostremos que $\mathfrak{H}_s(T)$ es cerrado. Sea $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de elementos en $\mathfrak{H}_s(T)$ tal que $\psi_j \to \psi \in \mathfrak{H}$ cuando $j \to \infty$, probemos que $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$. Por teorema 2.8 existen $\Omega_j \in \mathcal{A}$ tales que $\ell(\Omega_j) = 0$ y $\chi_{\Omega_j}(T)\psi_j = \psi_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ ($\psi \in \operatorname{Ran}\chi_{\Omega_j}(T)$). Consideremos $\Omega = \cup_{j\geq 1}\Omega_j$, por la aditividad de ℓ se tiene que $\ell(\Omega) = 0$ y como $\Omega_j \subset \Omega$ para cada j entonces $\operatorname{Ran}\chi_{\Omega_j}(T) \subset \operatorname{Ran}\chi_\Omega(T)$ (por la proposición 1.45 inciso III) así por la continuidad de la proyección obtenemos

$$\begin{aligned} \chi_\Omega(T)\psi &= \chi_\Omega(T)\Big(\lim_{j\to\infty} \psi_j\Big) \\ &= \lim_{j\to\infty} \chi_\Omega(T)\psi_j \\ &= \lim_{j\to\infty} \psi_j \\ &= \psi, \end{aligned} \tag{2.10}$$

por lo que $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$, luego, $\mathfrak{H}_s(T)$ es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$. Ya que $\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_c(T) \cap \mathfrak{H}_s(T)$ el hecho de que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ sea también un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ es consecuencia directa de que tanto $\mathfrak{H}_c(T)$ como $\mathfrak{H}_s(T)$ lo son.

Continuemos con $\mathfrak{H}_{ac}(T)$, recordemos que por el teorema 2.8 tenemos la relación

$$\mathfrak{H}_{ac}(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \chi_\Omega(T)\psi = 0, \; \forall\, \Omega \in \mathcal{A} \;\text{ tal que }\; \ell(\Omega) = 0\},$$

por lo que si $\psi, \eta \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ entonces $\forall\, \Omega \in \mathcal{A}$ tal que $\ell(\Omega) = 0$ se tiene

$$\chi_\Omega(T)(a\psi + \eta) = a\chi_\Omega(T)\psi + \chi_\Omega(T)\eta = a \cdot 0 + 0 = 0,$$

es decir, $a\psi + \eta \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, además, es claro que $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ es cerrado en $\mathfrak{H}$ pues si $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ es una sucesión de elementos en $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\psi_j \to \psi \in \mathfrak{H}$ cuando $j \to \infty$, entonces por la continuidad de la proyección:

$$\begin{aligned}\chi_\Omega(T)\psi &= \chi_\Omega(T)\Big(\lim_{j\to\infty}\psi_j\Big)\\ &= \lim_{j\to\infty}\chi_\Omega(T)\psi_j\\ &= 0\end{aligned}$$

pues cada uno de los términos $\chi_\Omega(T)\psi_j$ es cero, luego $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$.

□

En la sección pasada obtuvimos la descomposición del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ en

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_c(T),$$

donde cada uno de los subespacios $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ eran además subespacios reductores del operador T, esto a su vez nos dio la posibilidad de obtener una descomposición del operador T como $T = T_p \oplus T_c$ donde ambos operadores T_p y T_c eran también operadores autoadjuntos en $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ respectivamente; como es de esperar, lo mismo sucederá con los subespacios introducidos en esta sección (proposición 2.11) por lo que obtendremos varias descomposiciones del operador T así como de su espectro, en particular, las relaciones

$$T = T_p \oplus T_{ac} \oplus T_{sc}$$

y

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T)$$

son a quienes alude el título de este capítulo. Como mencionamos al inicio de la sección, damos una prueba del teorema 2.10 sin hacer uso del Teorema de descomposición de Lebesgue (teorema 2.16) que usualmente se utiliza para obtener la descomposición anterior de T; en la sección 2.3 este análisis fue importante ya que dio como resultado la posibilidad de probar incluso gran parte del teorema mencionado utilizando las herramientas de este capítulo.

Teorema 2.10. *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$, se tiene lo siguiente:*

i. $\mathfrak{H}_s(T) = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$.

ii. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_s(T)$.

iii. $\mathfrak{H}_c(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$.

iv. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$.

Demostración. Hemos demostrado en la proposición 2.9 que $\mathfrak{H}_p(T)$, $\mathfrak{H}_c(T)$, $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ son subespacios del espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, con esto en mente y recordando que en (2.9) probamos $\mathfrak{H}_p(T) \subset \mathfrak{H}_s(T)$, para demostrar el inciso i bastaría observar que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{H}_p(T)$ en $\mathfrak{H}_s(T)$, es decir

$$\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_p(T)^\perp \cap \mathfrak{H}_s(T), \tag{2.11}$$

pero esto es consecuencia de que por definición $\mathfrak{H}_p(T)^\perp := \mathfrak{H}_c(T)$ y de la igualdad del inciso III en el teorema 2.8.

II. Si demostramos que $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \mathfrak{H}_s(T)^\perp$ entonces tendremos la igualdad $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_s(T)$ por el Teorema de la Proyección. Probemos primero que $\mathfrak{H}_{ac}(T) \subset \mathfrak{H}_s(T)^\perp$. Sea $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, demostraremos que

$$\langle \psi, \eta \rangle = 0 \quad \forall\, \eta \in \mathfrak{H}_s(T). \tag{2.12}$$

Sea $\eta \in \mathfrak{H}_s(T)$, por teorema 2.8 existe $\Omega \in \mathcal{A}$ tal que $\ell(\Omega) = 0$ y $\chi_\Omega(T)\eta = \eta$, además, como $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, por el mismo lema tenemos que $\chi_\Omega(T)\psi = 0$, entonces por la adjuntez de la proyección

$$\langle \psi, \eta \rangle = \langle \psi, \chi_\Omega(T)\eta \rangle = \langle \chi_\Omega(T)\psi, \eta \rangle = \langle 0, \eta \rangle = 0,$$

por tanto $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$ y así $\mathfrak{H}_{ac}(T) \subset \mathfrak{H}_s(T)^\perp$. Para la otra contención tomemos $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)^\perp$, utilizando el teorema 2.8 queremos demostrar que $\chi_\Omega(T)\psi = 0$ para todo $\Omega \subset \mathbb{R}$ tal que $\ell(\Omega) = 0$. Sea entonces $\Omega \in \mathcal{A}$ con $\ell(\Omega) = 0$, ya que

$$\chi_\Omega(T)\Big(\chi_\Omega(T)\psi\Big) = \chi_\Omega(T)\psi$$

(por ser $\chi_\Omega(T)$ una proyección) el teorema 2.8 nos dice que $\chi_\Omega(T)\psi \in \mathfrak{H}_s(T)$ y por lo tanto

$$\|\chi_\Omega(T)\psi\|^2 = \langle \chi_\Omega(T)\psi, \chi_\Omega(T)\psi \rangle = \langle \psi, \chi_\Omega(T)\psi \rangle = 0$$

pues por hipótesis $\psi \in \mathfrak{H}_s(T)^\perp$, así $\chi_\Omega(T)\psi = 0$ y $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$. Concluímos que $\mathfrak{H}_s(T)^\perp \subset \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y entonces $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \mathfrak{H}_s(T)^\perp$.

III. Debido a la segunda relación de (2.9) $\mathfrak{H}_{ac}(T) \subset \mathfrak{H}_c(T)$, así, por el Teorema de la Proyección nuevamente bastaría demostrar que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ es el complemento ortogonal de $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ en $\mathfrak{H}_c(T)$, es decir, demostrar que

$$\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T)^\perp \cap \mathfrak{H}_c(T). \tag{2.13}$$

Ya que $\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_c(T) \cap \mathfrak{H}_s(T)$, demostrar la igualdad de arriba es equivalente a demostrar que $\mathfrak{H}_c(T) \cap \mathfrak{H}_s(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T)^\perp \cap \mathfrak{H}_c(T)$, pero esto es inmediato pues por el inciso anterior $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \mathfrak{H}_s(T)^\perp$ y entonces (por corolario 1.9)

$$\mathfrak{H}_s(T) = (\mathfrak{H}_s(T)^\perp)^\perp = \mathfrak{H}_{ac}(T)^\perp$$

ya que por la proposición 2.9, $\mathfrak{H}_s(T)$ es cerrado en $\mathfrak{H}$.

IV. Esta igualdad es consecuencia de la expresión

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_c(T)$$

obtenida en la sección pasada y de la igualdad $\mathfrak{H}_c(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$ del inciso anterior, por lo tanto

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T).$$

□

Proposición 2.11. *Los subespacios $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ reducen al operador T. Además, si $\mathcal{P}$ es la familia espectral de T, para cada $\Omega \in \mathcal{A}$ se tiene:*

$$\psi \in \mathfrak{H}_x(T) \Longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)\psi \in \mathfrak{H}_x(T)$$

para cada $x \in \{p, c, s, ac, sc\}$.

Demostración. Por la proposición A.2 de los apéndices, un subespacio es reductor si y sólo si su complemento ortogonal lo es, por lo tanto, teniendo en cuenta que $\mathfrak{H}_s(T)^\perp = \mathfrak{H}_{ac}(T)$ si probamos que $\mathfrak{H}_s(T)$ reduce al operador T automáticamente tendríamos que $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ también reduce. Pues bien, la prueba de que $\mathfrak{H}_s(T)$ es reductor es muy similar a la demostración que hicimos en el teorema 2.3 para argumentar que $\mathfrak{H}_p(T)$ reduce a T, simplemente debemos cambiar el conjunto contable Δ que aparece ahí por uno Ω de medida de Lebesgue cero (y utilizando la caracterización de $\mathfrak{H}_s(T)$ hecha en el teorema 2.8). La demostración de que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ reduce a T la dejaremos al final.

Para la segunda parte de la proposición, supongamos primero que $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, cuando demostramos que $\mathfrak{H}_p(T)$ era un subespacio reductor de T en el teorema 2.3, probamos en particular que

$$P_p^T \chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T) P_p^T$$

donde P_p^T era la proyección ortogonal sobre $\mathfrak{H}_p(T)$. Si por hipótesis $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces $P_p^T \psi = \psi$ y la igualdad anterior nos dice que

$$\mathcal{P}(\Omega)\psi = \chi_\Omega(T)\psi = \chi_\Omega(T) P_p^T \psi = P_p^T \chi_\Omega(T)\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$$

que es lo que queríamos demostrar. Ahora, si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ queremos demostrar que $\mathcal{P}(\Omega)\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ también, para ello, recordemos que por definición $\mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^\perp$, por lo que sería suficiente demostrar que

$$\langle \mathcal{P}(\Omega)\psi, \eta \rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{H}_p(T).$$

Sea $\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$, como $\langle \mathcal{P}(\Omega)\psi, \eta \rangle = \langle \psi, \mathcal{P}(\Omega)\eta \rangle$ y $\mathcal{P}(\Omega)\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$ por lo dicho arriba, se tiene que $\psi \perp \mathcal{P}(\Omega)\eta$ y por lo tanto $\langle \mathcal{P}(\Omega)\psi, \eta \rangle = 0$.

La demostración de la afirmación para el subespacio $\mathfrak{H}_s(T)$ es completamente análoga a la de $\mathfrak{H}_p(T)$ como se mencionó al principio, demostremos entonces la afirmación para el subespacio $\mathfrak{H}_{ac}(T)$. Sea $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, para demostrar que $\mathcal{P}(\Omega)\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, por el teorema 2.8 es suficiente demostrar que $\chi_{\Omega_1}(T)\mathcal{P}(\Omega)\psi = 0$ para todo $\Omega_1 \in \mathcal{A}$ con $\ell(\Omega_1) = 0$. Sea pues Ω_1 un conjunto de medida de Lebesgue cero, ya que $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ entonces por el mismo teorema 2.8 para ψ sabemos que $\chi_{\Omega_1}(T)\psi = 0$ y como por el corolario 1.57 todas las proyecciones ortogonales conmutan, se tiene

$$\chi_{\Omega_1}(T)\mathcal{P}(\Omega)\psi = \mathcal{P}(\Omega)\chi_{\Omega_1}(T)\psi = 0$$

pues $\mathcal{P}(\Omega)$ es un operador lineal. La afirmación para el subespacio $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ es una consecuencia de los casos anteriores pues $\mathfrak{H}_{sc}(T) = \mathfrak{H}_s(T) \cap \mathfrak{H}_c(T)$.

Como dijimos, demostraremos ahora que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ es un subespacio reductor del operador T. Primero, notemos que por lo demostrado arriba sabemos que si

$\varphi \in \mathfrak{H}_{sc}(T)$ entonces $\mathcal{P}(\Omega)\varphi \in \mathfrak{H}_{sc}(T)$ para todo $\Omega \in \mathcal{A}$, entonces, si P_{sc}^T es la proyección sobre el subespacio $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ tenemos la relación

$$\mathcal{P}(\Omega)P_{sc}^T\psi \in \mathfrak{H}_{sc}(T), \quad \forall \psi \in \mathfrak{H}.$$

Lo anterior inmediatamente nos da la igualdad entre operadores: $P_{sc}^T\mathcal{P}(\Omega)P_{sc}^T = \mathcal{P}(\Omega)P_{sc}^T$ para todo $\Omega \in \mathcal{A}$, y esto a su vez que

$$P_{sc}^T\chi_\Omega(T)P_{sc}^T = \chi_\Omega(T)P_{sc}^T, \quad \forall \Omega \in \mathcal{A},$$

tomando adjuntos obtenemos[7]

$$P_{sc}^T\chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T)P_{sc}^T, \quad \forall \Omega \in \mathcal{A},$$

con esto, la proposición A.6 nos afirma que $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ es entonces un subespacio reductor del operador T.

□

Debido a la proposición anterior y al corolario A.3 podemos definir la parte **singular** de T como $T_s := T|_{\mathfrak{H}_s(T)\cap\mathfrak{D}(T)}$, su parte **absolutamente continua** $T_{ac} := T|_{\mathfrak{H}_{ac}(T)\cap\mathfrak{D}(T)}$ y su parte **singular continua** $T_{sc} := T|_{\mathfrak{H}_{sc}(T)\cap\mathfrak{D}(T)}$, además, por el teorema A.4 cada uno es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ respectivamente. El corolario siguiente enuncia finalmente la tan aludida descomposición del operador T como suma de las tres partes definidas arriba.

Corolario 2.12. *Si T es un operador autoadjunto, entonces*

$$T = T_p \oplus T_{ac} \oplus T_{sc},$$

es decir, para toda $\psi \in \mathfrak{D}(T)$

$$T\psi = T_p\psi_p + T_{ac}\psi_{ac} + T_{sc}\psi_{sc}$$

donde $\psi = \psi_p + \psi_{ac} + \psi_{sc}$, con $\psi_p \in \mathfrak{H}_p(T)$, $\psi_{ac} \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\psi_{sc} \in \mathfrak{H}_{sc}(T)$.

Demostración. Por el teorema 2.10 tenemos la descomposición

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$$

lo que muestra que cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ tiene una única descomposición en la forma $\psi = \psi_p + \psi_{ac} + \psi_{sc}$ con $\psi_p \in \mathfrak{H}_p(T)$, $\psi_{ac} \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\psi_{sc} \in \mathfrak{H}_{sc}(T)$, además, ya que cada uno de estos subespacios reducen al operador T, entonces $\psi_p, \psi_{ac}, \psi_{sc} \in \mathfrak{D}(T)$ y por definición $\psi_p \in \mathfrak{D}(T_p)$, $\psi_{ac} \in \mathfrak{D}(T_{ac})$ y $\psi_{sc} \in \mathfrak{D}(T_{sc})$, así

$$\begin{aligned} T\psi &= T(\psi_p + \psi_{ac} + \psi_{sc}) \\ &= T\psi_p + T\psi_{ac} + T\psi_{sc} \\ &= T_p\psi_p + T_{ac}\psi_{ac} + T_{sc}\psi_{sc}. \end{aligned}$$

□

[7] Este argumento ya lo aclaramos en la demostración de que $\mathfrak{H}_p(T)$ es un subespacio reductor de T (ver teorema 2.3).

Definición 2.13. *Si los subespacios $\mathfrak{H}_{sc}(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_s(T)$ no son nulos, el espectro* **singular continuo** $\sigma_{sc}(T)$, **absolutamente continuo** $\sigma_{ac}(T)$ *y* **singular** $\sigma_s(T)$ *de T son definidos como el espectro de T_{sc}, T_{ac} y T_s respectivamente, es decir*

$$\sigma_{sc}(T) := \sigma(T_{sc}), \;\; \sigma_{ac}(T) := \sigma(T_{ac}) \;\; y \;\; \sigma_s(T) := \sigma(T_s).$$

En el caso en que los subespacios tengan dimensión cero, diremos que su respectiva parte del espectro es vacía, es decir, si por ejemplo $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \{0\}$ entonces $\sigma_{ac}(T) = \emptyset$. Como en la sección pasada, la proposición A.7 junto con los resultados mencionados arriba nos ofrecen otras descomposiciones del espectro de un operador autoadjunto T en lo que denominamos sus **tipos espectrales**:[8]

Teorema 2.14. *Si T es un operador autoadjunto, entonces*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T).$$

Además, $\sigma(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_s(T)$.

Demostración. Por teorema 2.10 tenemos $\mathfrak{H}_c(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T)$ así que de manera similar a la demostración del corolario anterior obtenemos la descomposición $T_c = T_{ac} \oplus T_{sc}$, la proposición A.7 nos garantiza entonces que $\sigma(T_c) = \sigma(T_{ac}) \cup \sigma(T_{sc})$, es decir

$$\sigma_c(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T).$$

Ya que en la sección pasada obtuvimos la relación $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T)$, finalmente tenemos que

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T).$$

De manera análoga $\sigma(T) = \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_s(T)$ pues $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_s(T)$.

$\square$

Para finalizar, introducimos alguna terminología que utilizamos en lo que resta de este trabajo y que es adoptada en la mayoría de la literatura.

Definición 2.15. *Considerando la descomposición espectral del Teorema 2.14, decimos que el operador autoadjunto T tiene espectro* **puramente puntual** *si $\sigma_{ac}(T) = \emptyset = \sigma_{sc}(T)$, espectro* **puramente continuo** *si $\sigma_p(T) = \emptyset$, espectro* **puramente absolutamente continuo** *si $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{sc}(T)$ y espectro* **puramente singular continuo** *si $\sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{ac}(T)$. También decimos que T es puramente puntual, puramente continuo, puramente absolutamente continuo o puramente singular continuo respectivamente.*

Notemos que, si por ejemplo, T es puramente continuo, por definición se tiene que $\sigma_p(T) = \emptyset$, si $\mathfrak{H}_p(T) \neq \{0\}$ por definición tendríamos que $\sigma(T_p) = \emptyset$ pero esto no puede pasar pues por el teorema A.4 de los apéndices

$$T_p : \mathfrak{D}(T_p) \subset \mathfrak{H}_p(T) \to \mathfrak{H}_p(T)$$

es un operador autoadjunto y sabemos que el espectro de operadores autoadjuntos siempre es no vacío (teorema 1.41), así, si T es puramente continuo necesariamente $\mathfrak{H}_p(T) = \{0\}$. Análogamente con los demás subespacios.

[8] No confundir con la definición de ‘tipo espectral’ dada en [AG93].

2.3. Un resultado interesante

La sección pasada tuvo como objetivo la realización de la descomposición

$$T = T_p \oplus T_{ac} \oplus T_{sc}$$

cuando T es un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, así como de su espectro

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ac}(T) \cup \sigma_{sc}(T);$$

para la demostración fueron fundamentales las relaciones obtenidas en el teorema 2.10, particularmente la descomposición del espacio $\mathfrak{H}$ como

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_{sc}(T). \tag{2.14}$$

Como lo hemos venido comentando, existe un teorema en Teoría de la medida conocido como el **Teorema de descomposición de Lebesgue** que de cierta manera motivó las descomposiciones anteriores, de hecho, la mayoría de la literatura clásica en Análisis funcional hace uso de este teorema para demostrar las descomposiciones del teorema 2.10 y en particular para demostrar la relación (2.14), como podemos notar en la demostración que presentamos en la sección anterior, nosotros no hacemos uso de este teorema e incluso, mostramos a continuación que el Teorema de descomposición de Lebesgue puede ser demostrado con base en la descomposición (2.14), al menos para medidas de Borel definidas en $\mathbb{R}$.[9]

Teorema 2.16 (**De descomposición de Lebesgue**). *Sean μ, ν dos medidas σ-finitas en un espacio medible (X, Σ), entonces μ puede descomponerse de manera única como*

$$\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_{sc}$$

donde μ_p es una medida puramente puntual, μ_{ac} es absolutamente continua con respecto a ν y μ_{sc} es singular continua con respecto a ν. [10]

Clásicamente la demostración del teorema anterior se realiza a la par con la del Teorema de Radon-Nicodým, que es un teorema muy importante en Teoría de la medida; lo que haremos aquí es demostrar el Teorema de descomposición de Lebesgue al menos para cuando las medidas μ y ν son σ-finitas de Borel en $\mathbb{R}$ y ν no le da peso a conjuntos contables.

Comenzaremos la prueba por casos y después trataremos el caso general. Tomemos entonces μ y ν dos medidas de Borel en $\mathbb{R}$ σ-finitas, supongamos primero que μ es finita y $\nu = \ell$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, queremos demostrar que μ se puede descomponer como

$$\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_{sc}$$

[9] Consultar el Apéndice B para las definiciones.

[10] Sean μ, ν dos medidas en un espacio medible (X, Σ), decimos que μ es **absolutamente continua** con respecto a ν si $\forall B \in \Sigma$, $\nu(B) = 0 \Rightarrow \mu(B) = 0$; decimos que μ es **singular continua** con respecto a ν si μ y ν son mutuamente singulares (i.e., existe $\Omega \in \Sigma$ tal que $\mu(\Omega) = 0$ y $\nu(X \setminus \Omega) = 0$) y además es continua (i.e., $\mu(\{t\}) = 0$, $\forall t \in X$); finalmente, μ es **puramente puntual** si existe $\Omega \subset X$ contable tal que $\mu(X \setminus \Omega) = 0$. Si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue ℓ, diremos simplemente que es absolutamente continua, lo mismo cuando μ sea singular continua con respecto a ℓ.

donde μ_p es una medida puntual, μ_{ac} es absolutamente continua y μ_{sc} es singular continua. Ya que μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$, el espacio $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ de todas las 'funciones' cuadrado μ-integrables[11] es un espacio de Hilbert separable con el producto interior usual

$$\langle g, f\rangle := \int_{\mathbb{R}} g(t)\overline{f(t)}\, d\mu(t);$$

lo que haremos primero será definir una **familia espectral** P en el espacio $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ (ver definición 1.44) de la siguiente manera: para cada boreliano $\Omega \in \mathcal{A}$

$$P(\Omega) := \mathcal{M}_{\chi_\Omega}$$

donde $\mathcal{M}_{\chi_\Omega} : \mathfrak{D}(\mathcal{M}_{\chi_\Omega}) \subset \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ es el operador de multiplicación por la función característica χ_Ω, es decir, para toda $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{M}_{\chi_\Omega}) \subset \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ se tiene que

$$P(\Omega)f = \chi_\Omega \cdot f,$$

en las Notas al final del capítulo justificaremos el hecho de que $P : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}))$ es en efecto una familia espectral en $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$. Ahora bien, consideremos la función identidad $h(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, por la proposición 1.51 sabemos que el operador lineal en $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ dado por

$$P(h) = \int_{\mathbb{R}} h\, dP$$

es un operador autoadjunto, denotemos a este operador como $\hat{T}$; ya que por el Teorema espectral (teorema 1.52) todo operador autoadjunto T tiene asociada una única familia espectral P tal que $T = \int_{\mathbb{R}} t\, dP$, de nuestra construcción es evidente que P es la familia espectral asociada a $\hat{T}$, así

$$\hat{T} : \mathfrak{D}(\hat{T}) \subset \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$$

es un operador autoadjunto tal que su familia espectral es precisamente P y entonces sus **medidas espectrales** están dadas por

$$\begin{aligned}
\mu_f^{\hat{T}}(\Omega) &:= \langle f, P(\Omega)f\rangle \\
&= \langle f, \chi_\Omega f\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{\chi_\Omega f(t)}\, d\mu(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega f(t)\overline{f(t)}\, d\mu(t) \\
&= \int_{\Omega} f(t)\overline{f(t)}\, d\mu(t) \\
&= \int_{\Omega} |f(t)|^2\, d\mu(t), \qquad \forall \Omega \in \mathcal{A}
\end{aligned}$$

para cada $f \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$. En particular, si $f = \mathbf{1}$ la función constante igual a uno, $\mathbf{1}(t) = 1$, $\forall t \in \mathbb{R}$, la medida espectral de $\hat{T}$ asociada a f es

$$\mu_{\mathbf{1}}^{\hat{T}}(\Omega) = \int_{\Omega} |\mathbf{1}(t)|^2\, d\mu(t) = \int_{\Omega} d\mu(t) = \mu(\Omega), \tag{2.15}$$

[11] Consultar Apéndice B.

es decir, la medida espectral de $\hat{T}$ en $f = \mathbf{1} \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}}$, coincide con nuestra medida original μ.

Además, utilizando el teorema 2.10 obtenemos que

$$\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}) = \mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T}) \oplus \mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T}) \oplus \mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$$

donde $\mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T})$, $\mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T})$ y $\mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$ son los subespacios puntual, absolutamente continuo y singular continuo de $\hat{T}$ respectivamente. Ya que μ es una medida finita, la función constante uno $\mathbf{1}$ es un elemento de $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ y entonces por la descomposición anterior

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_p + \mathbf{1}_{ac} + \mathbf{1}_{sc}$$

donde $\mathbf{1}_p \in \mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T})$, $\mathbf{1}_{ac} \in \mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T})$ y $\mathbf{1}_{sc} \in \mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$, así, la medida espectral de $\hat{T}$ en $\mathbf{1}$, $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}}$, es la suma de las tres medidas $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p}$, $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}}$ y $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}}$ determinadas por los componentes de $\mathbf{1}$, es decir:

$$\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}} = \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p} + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}} + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}} \tag{2.16}$$

ya que por definición

$$\begin{aligned}
\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}}(\Omega) &= \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p+\mathbf{1}_{ac}+\mathbf{1}_{sc}}(\Omega) \\
&= \langle \mathbf{1}_p + \mathbf{1}_{ac} + \mathbf{1}_{sc}, P(\Omega)(\mathbf{1}_p + \mathbf{1}_{ac} + \mathbf{1}_{sc})\rangle \\
&= \langle \mathbf{1}_p + \mathbf{1}_{ac} + \mathbf{1}_{sc}, P(\Omega)\mathbf{1}_p + P(\Omega)\mathbf{1}_{ac} + P(\Omega)\mathbf{1}_{sc}\rangle \\
&= \langle \mathbf{1}_p, P(\Omega)\mathbf{1}_p\rangle + \langle \mathbf{1}_{ac}, P(\Omega)\mathbf{1}_{ac}\rangle + \langle \mathbf{1}_{sc}, P(\Omega)\mathbf{1}_{sc}\rangle \\
&= \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p}(\Omega) + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}}(\Omega) + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}}(\Omega)
\end{aligned}$$

pues todos los términos cruzados que resultan de desarrollar la tercera línea son cero (ya que por la proposición 2.11 cada uno de los subespacios $\mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T})$, $\mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T})$ y $\mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$ son invariantes bajo la familia espectral P y así, $P(\Omega)\mathbf{1}_p \in \mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T})$, $P(\Omega)\mathbf{1}_{ac} \in \mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T})$, $P(\Omega)\mathbf{1}_{sc} \in \mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$ y estos subespacios son ortogonales entre sí por teorema 2.10).

Con esto, hemos obtenido todo lo que necesitamos pues por la igualdad obtenida en (2.15) nuestra medida original μ es igual a $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}}$, entonces

$$\mu = \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p} + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}} + \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}},$$

y como $\mathbf{1}_p \in \mathrm{L}^2_{\mu,p}(\hat{T})$, $\mathbf{1}_{ac} \in \mathrm{L}^2_{\mu,ac}(\hat{T})$ y $\mathbf{1}_{sc} \in \mathrm{L}^2_{\mu,sc}(\hat{T})$, el teorema 2.3 y la definición 2.7 nos aseguran que

- $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p}$ es una medida puramente puntual
- $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}}$ es absolutamente continua y
- $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}}$ es singular continua

que es lo que queríamos demostrar; la demostración de la unicidad es estándar, para ello, supongamos que existen otras medidas que cumplen la afirmación del teorema 2.16, μ_p, μ_{ac} y μ_{sc} tales que $\mu = \mu_p + \mu_{ac} + \mu_{sc}$, entonces

$$\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}} - \mu_{ac} = \mu_p + \mu_{sc} - \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p} - \mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}},$$

la medida del lado izquierdo es absolutamente continua y la medida del lado derecho es singular, por lo tanto, ambos lados son iguales a cero y $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{ac}} = \mu_{ac}$, análogamente se demuestra que $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_p} = \mu_p$ y $\mu^{\hat{T}}_{\mathbf{1}_{sc}} = \mu_{sc}$.

Hasta aquí hemos demostrado el Teorema de descomposición de Lebesgue cuando μ es una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$ y ν es la medida de Lebesgue, notemos que la suposición de que $\nu = \ell$ sólo fue hecha porque en los teoremas que utilizamos de la sección anterior, particularmente el teorema 2.10, los subespacios espectrales están definidos en función de la medida de Lebesgue, un análisis minucioso nos convencerá de que en las pruebas de estos teoremas sólo utilizamos algunas propiedades de la medida de Lebesgue y entonces podríamos cambiar a ℓ por cualquier otra medida de Borel σ-finita en $\mathbb{R}$ que no le de peso a conjuntos contables y obtener resultados análogos a los de la sección anterior, así, podríamos repetir la prueba que acabamos de dar y obtener el Teorema de descomposición de Lebesgue para este caso más general.

Por último, pasar de la finitud de μ a la σ-finitud implica un proceso de límite pues si μ es una medida σ-finita en $\mathbb{R}$ existe una cubierta $\{X_j\}_{j\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ tal que $X_j \subset X_{j+1}$ con

$$\mu(X_j) < \infty$$

para cada $j \in \mathbb{N}$, por lo que podemos definir medidas $\mu_j(\Omega) := \mu(X_j \cap \Omega)$ tal que

$$\mu(\Omega) := \lim_{j\to\infty} \mu_j(\Omega), \quad \forall \Omega \in \mathcal{A}$$

y cada una de estas medidas μ_j es finita.

2.4. Notas

Sección 2.1

Esta sección está basada en el Capítulo 12 de [dO09] además del Capítulo 27 de [BB03]. En la demostración del teorema 2.3 dijimos que si $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces

$$\psi = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j, \qquad c_j \in \mathbb{C},\ \forall j \in \mathbb{N}$$

donde ψ_j es un eigenvector del eigenvalor λ_j para cada j; esto es consecuencia de que $\mathfrak{H}_p(T)$ tiene una base ortonormal de eigenvectores a lo más numerable y esto último puede verse de la siguiente manera: como $\mathrm{Ker}(T - \lambda_j)$ es un subespacio de $\mathfrak{H}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ y $\mathfrak{H}$ es separable, $\mathrm{Ker}(T - \lambda_j)$ es separable también (teorema 3.5 de [Wei80]), entonces por la proposición 1.14 cada uno de estos subespacios tiene una base ortonormal a lo más numerable, digamos β_j, como eigenvectores correspondientes a eigenvalores diferentes son ortogonales, el conjunto $\cup_{j\geq 1}\beta_j$ es una base ortonormal a lo más numerable de $\mathfrak{H}_p(T)$.

Sección 2.2

Los libros [Amr09], [BB03] y [Wei80] son buenas referencias para algunos de los resultados enunciados en esta sección. El inciso II del teorema 2.10 se lo debemos a la proposición 5.4.7 del libro [BEH08].

Sección 2.3

Justificamos aquí que $P : \mathcal{A} \to \mathrm{Proj}(\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}))$ dada por

$$P(\Omega) := \mathcal{M}_{\chi_\Omega}, \quad \forall\, \Omega \in \mathcal{A}$$

es en efecto una familia espectral en el espacio $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, como dijimos, $\mathcal{M}_{\chi_\Omega} : \mathfrak{D}(\mathcal{M}_{\chi_\Omega}) \subset \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R}) \to \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ es el operador de multiplicación por la función característica χ_Ω, es decir, para toda $f \in \mathfrak{D}(\mathcal{M}_{\chi_\Omega}) \subset \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ se tiene que

$$P(\Omega)f = \mathcal{M}_{\chi_\Omega} f = \chi_\Omega \cdot f.$$

Lo primero que hay que justificar es que para cada $\Omega \in \mathcal{A}$, $P(\Omega)$ es en realidad una proyección ortogonal en $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, es decir, $P(\Omega) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $P(\Omega)^2 = P(\Omega)$ y es un operador autoadjunto. Probemos que el dominio de $P(\Omega)$ es todo $\mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, sea $f \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, ya que $P(\Omega)f := \chi_\Omega \cdot f$ y

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_\Omega \cdot f|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} |\chi_\Omega|^2 |f|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega |f|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu < \infty,$$

entonces $P(\Omega)f \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$, es decir, $\mathfrak{D}(P(\Omega)) = \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$. De las igualdades anteriores también se sigue que

$$\|P(\Omega)f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |P(\Omega)f|^2 d\mu = \int_{\mathbb{R}} |\chi_\Omega \cdot f|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu = \|f\|^2,$$

es decir, $\|P(\Omega)f\| \leq \|f\| \quad \forall f \in \mathrm{L}^2_\mu(\mathbb{R})$. Concluímos que $P(\Omega)$ es un operador acotado, por lo tanto, $P(\Omega) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Como

$$P(\Omega)^2 f := P(\Omega)\Big(P(\Omega)f\Big) = \chi_\Omega^2 \cdot f = \chi_\Omega \cdot f = P(\Omega)f$$

entonces $P(\Omega)^2 = P(\Omega)$ y además

$$\langle g, P(\Omega)f\rangle = \int_{\mathbb{R}} g \cdot \overline{\chi_\Omega \cdot f}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} g \cdot \chi_\Omega \cdot \overline{f}\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} \chi_\Omega \cdot g \cdot \overline{f}\, d\mu = \langle P(\Omega)g, f\rangle$$

por lo que $P(\Omega)$ es también un operador autoadjunto. Concluímos que $P(\Omega)$ es una proyección ortogonal. Por la definición 1.44 sólo nos falta justificar que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$ y que para la unión $\Omega = \cup_{j\geq 1}\Omega_j$ con $\Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset$ si $j \neq k$, se tiene

$$P(\Omega)f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} P(\Omega_j)f \tag{2.17}$$

para toda $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$. La primera afirmación es evidente pues $P(\mathbb{R})f := \chi_\mathbb{R} \cdot f = f$ para toda $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$ y por lo tanto $P(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$. Ahora bien, si $\Omega = \cup_{j\geq 1}\Omega_j$ es una unión disjunta como lo mencionamos arriba, tenemos la convergencia puntual

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j}(t) = \chi_\Omega(t)$$

y como para cada $f \in L^2_\mu(\mathbb{R})$ se cumple

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j}(t) - \chi_\Omega(t)\Big|^2 |f(t)|^2 \leq |\chi_\Omega(t)|^2 |f(t)|^2 \in L^1_\mu(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big\|\sum_{j=1}^{n} P(\Omega_j)f - P(\Omega)f\Big\|^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} \Big|\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j} f(t) - \chi_\Omega f(t)\Big|^2 d\mu(t) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} \Big|\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j}(t) - \chi_\Omega(t)\Big|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) \\
&= \int_\mathbb{R} \lim_{n\to\infty} \Big|\sum_{j=1}^{n} \chi_{\Omega_j}(t) - \chi_\Omega(t)\Big|^2 |f(t)|^2 d\mu(t) = 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple la igualdad en (2.17).

CAPÍTULO 3

Algunos resultados clásicos en Dinámica Cuántica

Supongamos que $\mathfrak{H} = \mathbb{C}$ y que T, ψ son elementos fijos de $\mathbb{C}$, para una función $\psi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ consideremos la ecuación

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t) \quad \text{con condición inicial} \quad \psi(0) = \psi,$$

sabemos que la solución a esta ecuación es $\psi(t) = \psi\, e^{-itT}$. La primera parte del capítulo está destinada a generalizar la ecuación anterior y mostrar la existencia de soluciones para cuando T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$ y $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, después demostramos algunos teoremas clásicos que nos explican cualitativamente cómo la descomposición de $\mathfrak{H}$ en subespacios espectrales introducida en el capítulo anterior es de especial importancia para conocer el comportamiento de la solución $\psi(t)$. En general, diferentes subespacios proporcionan diferentes comportamientos de $e^{-itT}\psi$, particularmente cuando $t \to \infty$.

3.1. Grupos de evolución unitarios y el Teorema de Stone

Nuestro mayor interés en esta sección son las soluciones al problema con valores iniciales

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T)$$

para $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador lineal y autoadjunto, en este trabajo llamaremos a la ecuación de arriba la **ecuación dinámica de Schrödinger**. Además, daremos la prueba de un teorema de M. Stone de 1932 el cual tiene una importancia comparable con la del Teorema espectral; por un lado establece una correspondencia uno a uno entre los grupos de evolución unitarios fuertemente continuos en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ y los operadores autoadjuntos en $\mathfrak{H}$, y por el otro, desde un punto de vista dinámico, afirma que la evolución de un sistema es generada por un operador autoadjunto y únicamente determinada por una ecuación diferencial de primer orden, la ecuación dinámica de Schrödinger.

Definición 3.1. *Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert, una función $U : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es un* **grupo uni-paramétrico de operadores unitarios** *en $\mathfrak{H}$ (o simplemente un* **grupo de evolución unitario** *en $\mathfrak{H}$), si $U(t)$ es un operador unitario y $U(t+s) = U(t)U(s) \quad$ para todos $s, t \in \mathbb{R}$.*

Una consecuencia inmediata de la definición es que $U(0)U(t) = U(t)$ para todo t, además, por la demostración de la proposición 1.36, si $U(t)$ es unitario entonces es una biyección, por lo que $U(t)^{-1}$ existe y se tiene por la igualdad anterior que

$$U(0)U(t)U(t)^{-1} = U(t)U(t)^{-1},$$

por lo que $U(0) = \mathbb{I}$. También $U(t)U(-t) = U(-t)U(t) = U(t-t) = U(0) = \mathbb{I}$, con lo cual $U(-t) = U(t)^{-1}$, utilizando la proposición 1.36, tenemos además

$$U(-t) = U(t)^{-1} = U(t)^*, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Diremos que el grupo de evolución $t \to U(t)$ es **fuertemente continuo** si

$$\lim_{t \to t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi, \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R},\ \forall \psi \in \mathfrak{H},$$

o de manera equivalente, si $t \to U(t)\psi$ es una función continua para cada $\psi \in \mathfrak{H}$. La propiedad de que un grupo de evolución sea fuertemente continuo será muy importante a la hora de establecer los resultados principales de este capítulo.

Definición 3.2. *Sea $t \to U(t)$ un grupo de evolución en $\mathfrak{H}$, el operador T definido por*

$$\mathfrak{D}(T) := \left\{ \psi \in \mathfrak{H} : \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi \ \text{ existe} \right\},$$

$$T\psi := i \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi, \quad \psi \in \mathfrak{D}(T),$$

es llamado el **generador infinitesimal** *de $t \to U(t)$.*[1]

Notemos que $\mathfrak{D}(T)$ es claramente un subconjunto lineal de $\mathfrak{H}$ pues $U(t)$ es un operador lineal para cada t y el límite también es lineal. Más adelante demostraremos que la hipótesis de continuidad fuerte en un grupo de evolución obliga a que el dominio de su generador infinitesimal, además de ser un subconjunto lineal, sea un subconjunto denso de $\mathfrak{H}$.

Demostraremos a continuación un lema que será útil más adelante.

[1] Observemos que un elemento $\psi \in \mathfrak{H}$ está en el dominio de T si y sólo si la función $U(t)\psi$ es diferenciable en $t = 0$ ya que por definición la derivada en $t = 0$ de la función $U(t)\psi$ está dada por

$$U'(0)\psi := \lim_{h \to 0} \frac{U(0+h)\psi - U(0)\psi}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{U(h)\psi - \mathbb{I}\psi}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(U(h) - \mathbb{I})\psi.$$

Lema 3.3. *Si T es el generador infinitesimal del grupo de evolución $t \to U(t)$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$*

$$U(t)\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}(T) \quad \text{y} \quad TU(t) = U(t)T.$$

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, como para cada $t \in \mathbb{R}$ el operador $U(t)$ es lineal, tenemos que para toda $\psi \in \mathfrak{D}(T)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})U(t)\psi &= \frac{1}{h}\Big(U(h)U(t)-U(t)\Big)\psi \\ &= \frac{1}{h}\Big(U(h+t)-U(t)\Big)\psi \\ &= \frac{1}{h}\Big(U(t+h)-U(t)\Big)\psi \\ &= \frac{1}{h}\Big(U(t)U(h)-U(t)\Big)\psi \\ &= U(t)\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})\psi\end{aligned} \tag{3.2}$$

tomando el límite cuando $h \to 0$ en las igualdades de arriba y considerando que $U(t)$ es un operador continuo conluímos que si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ entonces $U(t)\psi \in \mathfrak{D}(T)$, es decir

$$U(t)\mathfrak{D}(T) \subset \mathfrak{D}(T).$$

Utilizando este último hecho, la otra contención $\mathfrak{D}(T) \subset U(t)\mathfrak{D}(T)$ es consecuencia directa de que para $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, se tiene la igualdad $\psi = U(t)(U(-t)\psi)$.

Además, como T es el operador infinitesimal de $t \to U(t)$, por definición $T\psi = i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})\psi$ y por las igualdades de arriba tenemos explícitamente

$$\begin{aligned}TU(t)\psi &= i\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})U(t)\psi \\ &= i\lim_{h\to 0}U(t)\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})\psi \\ &= U(t)i\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})\psi \\ &= U(t)T\psi\end{aligned}$$

para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, es decir, $TU(t) = U(t)T$.

□

Abordaremos ahora el problema de encontrar las soluciones para la ecuación de Schrödinger mencionada al inicio de esta sección. Consideremos el siguiente problema: dado un operador $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ autoadjunto, ¿existirá un grupo de evolución $t \to U(t)$ para el cual T sea su generador infinitesimal? La respuesta está dada en el siguiente:

Teorema 3.4. *Sea T un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, utilizando los resultados de la sección 1.4.2 definamos*

$$U(t) := e^{-itT} \quad \text{para cada } t \in \mathbb{R},$$

entonces

i. *$t \to U(t)$ es un grupo de evolución unitario fuertemente continuo.*

ii. *El límite $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi)$ existe si y solo si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ en cuyo caso $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi) = -iT\psi$, es decir, T es el generador infinitesimal de $t \to U(t)$.*

Demostración. Para cada $t \in \mathbb{R}$ definamos $f_t(x) = e^{-itx}$. Utilizando el Teorema espectral y los resultados de la sección 1.4.2, por definición

$$U(t) = e^{-itT} := f_t(T) = P^T(f_t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, dP^T(x), \tag{3.3}$$

donde P^T es la familia espectral del operador T.

Demostremos primero que $t \to U(t)$ es un grupo de evolución unitario fuertemente continuo. Como para cada $t \in \mathbb{R}$ la función $f_t(x)$ es acotada, por teorema 1.48 $U(t) \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Además, por la proposición 1.49 se tiene que para todos $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} U(t)U(s) &= f_t(T)f_s(T) \\ &= P^T(f_t)P^T(f_s) \\ &= P^T(f_t f_s) \\ &= P^T(f_{t+s}) \\ &= f_{s+t}(T) \\ &= U(t+s), \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde la igualdad $f_t f_s = f_{t+s}$ es consecuencia de que $e^{-itx}e^{-isx} = e^{-i(t+s)x}$. Notemos también que $f_t f_{-t} = f_{-t} f_t = \mathbf{1}$ y $\overline{f}_t = f_{-t}$ pues

$$\begin{aligned} \overline{f}_t(x) &= \overline{e^{-itx}} \\ &= \overline{cos(-tx) + i\, sen(-tx)} \\ &= cos(-tx) - i\, sen(-tx) \\ &= cos(tx) + i\, sen(tx) \\ &= e^{itx} \\ &= e^{-i(-t)x} \\ &= f_{-t}(x), \end{aligned} \tag{3.5}$$

por lo que utilizando la proposición 1.49 tenemos

$$\mathbb{I} = P^T(\mathbf{1}) = P^T(f_t f_{-t}) = P^T(f_t \overline{f}_t) = P^T(f_t)P^T(\overline{f}_t) = P^T(f_t)P^T(f_t)^* = U(t)U(t)^*,$$

de manera análoga podemos demostrar $\mathbb{I} = U(t)^*U(t)$. Así, $U(t)^* = U(t)^{-1}$ y por la proposición 1.36, $U(t)$ es un operador unitario para cada $t \in \mathbb{R}$. Por esto último y por (3.4) concluímos que $t \to U(t)$ es un grupo de evolución unitario. Para probar la continuidad fuerte observemos que si $t_0 \in \mathbb{R}$ y $\psi \in \mathfrak{H}$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0} \|U(t)\psi - U(t_0)\psi\|^2 &= \lim_{t\to t_0} \|e^{-itT}\psi - e^{-it_0T}\psi\|^2 \\ &= \lim_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}} |e^{-itx} - e^{-it_0x}|^2\, d\mu_\psi^T(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde la última igualdad es consecuencia del corolario 1.55.

Como $|e^{-itx} - e^{-it_0x}| \leq |e^{-itx}| + |e^{-it_0x}| = 1 + 1 = 2$, entonces para cada $t \in \mathbb{R}$

$$|e^{-itx} - e^{-it_0x}|^2 \leq 4 \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi^T)$$

pues μ_ψ^T es finita, así, de (3.6) y utilizando el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_0} \|U(t)\psi - U(t_0)\psi\|^2 &= \lim_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}} |e^{-itx} - e^{-it_0x}|^2 \, d\mu_\psi^T(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to t_0} |e^{-itx} - e^{-it_0x}|^2 \, d\mu_\psi^T(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} 0 \; d\mu_\psi^T(x) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

por tanto, $\lim_{t\to t_0} U(t)\psi = U(t_0)\psi$ y $t \to U(t)$ es un grupo de evolución fuertemente continuo, lo que prueba I.

Para demostrar II, probemos primero la implicación de regreso, i.e., si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ entonces $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi)$ existe y es igual a $-iT\psi$.

Sea $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \lim_{t\to 0} \left[\frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi) \right] - (-iT\psi) \right\|^2 &= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi) - (-iT\psi) \right\|^2 \\
&= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}(e^{-itT}\psi - \psi) + iT\psi \right\|^2 \\
&= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{1}{t}(e^{-itT} - \mathbb{I})\psi + iT\psi \right\|^2 \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{t}(e^{-itx} - 1) + ix|^2 d\mu_\psi^T(x),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

nuestra intención es demostrar que éste último límite es cero pues eso implicaría automáticamente que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)\psi - \psi)$ existe y es igual a $-iT\psi$. Utilizaremos nuevamente el Teorema de convergencia dominada, para ello, tenemos que probar que

$$|\frac{1}{t}(e^{-itx} - 1) + ix|^2 \leq g(x) \qquad \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{3.8}$$

para alguna función $g \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi^T)$.

Sea $t \neq 0$, notemos que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\begin{aligned}
|e^{ix} - e^{iy}| &= |e^{-i\frac{(x+y)}{2}}||e^{ix} - e^{iy}| \\
&= |e^{-i\frac{(x+y)}{2}}(e^{ix} - e^{iy})| \\
&= |e^{i\frac{(x-y)}{2}} - e^{-i\frac{(x-y)}{2}}| \\
&= \left|2i \sin\frac{x-y}{2}\right| \\
&= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|,
\end{aligned}$$

por lo que

$$|e^{-itx}-1| = |e^{-itx}-e^{i0}| = 2\left|\sin\frac{-tx}{2}\right| < 2\left|\frac{-tx}{2}\right| = |tx|$$

(donde la última desigualdad es consecuencia de que $|\sin(x)| < |x| \quad \forall x \neq 0$). Así,

$$|e^{-itx}-1| < |tx|$$

y como $t \neq 0$

$$|\frac{1}{t}(e^{-itx}-1)| < |x|,$$

luego

$$|\frac{1}{t}(e^{-itx}-1)+ix| < |x|+|x| = 2|x|.$$

Finalmente

$$|\frac{1}{t}(e^{-itx}-1)+ix|^2 \leq 4|x|^2,$$

por lo que sólo faltaría demostrar que $4|x|^2 \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi^T)$ para tener (3.8). Si denotamos $f(x)=x,$ por el Teorema espectral sabemos que

$$T = \int_{\mathbb{R}} t\; dP^T(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dP^T(t) = P^T(f),$$

y

$$\mathfrak{D}(P^T(f)) = \left\{\psi \in \mathfrak{H} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, d\mu_\psi^T(x) < \infty\right\}$$

por lo que

$$\psi \in \mathfrak{D}(T) \Leftrightarrow \psi \in \mathfrak{D}(P^T(f)) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu_\psi^T(x) < \infty \Leftrightarrow |x|^2 = |f(x)|^2 \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi^T),$$

ya que por hipótesis $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, entonces $|x|^2 \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi^T)$, lo que prueba (3.8).

Ahora sí, retomando (3.7), por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\left\|\frac{1}{t}(U(t)\psi-\psi)-(-iT\psi)\right\|^2 &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{t}(e^{-itx}-1)+ix|^2 d\mu_\psi^T(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0}|\frac{1}{t}(e^{-itx}-1)+ix|^2 d\mu_\psi^T(x)\\
&= \int_{\mathbb{R}} 0\; d\mu_\psi^T(x)\\
&= 0
\end{aligned}$$

pues $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{-itx}-1) = -ix$. Por lo tanto $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)\psi-\psi)$ existe y es igual a $-iT\psi$.

Demostremos ahora la implicación de ida, es decir, probaremos que para toda $\psi \in \mathfrak{H}$, si el límite $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)\psi-\psi)$ existe entonces $\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Consideremos el generador infinitesimal A del grupo de evolución $t \to U(t)$, ya que por definición

$$\mathfrak{D}(A) := \left\{\psi \in \mathfrak{H} : \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)-\mathbb{I})\psi \;\text{ existe}\right\},$$

lo que queremos demostrar en realidad es la contención $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(T)$. Si analizamos con detenimiento lo que demostramos en la implicación anterior, nos daremos cuenta que en realidad probamos que el operador A es una extensión del operador T, es decir, demostramos que $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ y $T\psi = A\psi$ para todo $\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Lo que haremos ahora es demostrar que A no sólo es una extensión de T, sino que además es una extensión simétrica. Para ello, lo primero que hay que notar es que $\mathfrak{D}(A)$ es denso en $\mathfrak{H}$ pues al ser T autoadjunto, $\mathfrak{D}(T)$ es denso y como $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ por el inciso anterior, entonces $\mathfrak{D}(A)$ es denso también. Por otro lado, recordando la observación hecha en (3.1) tenemos que para toda $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(A)$:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, A\psi \rangle &= \langle \varphi\,,\, i \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi \rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\, i\, \langle \varphi\,,\, \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi \rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\, i\, \langle \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})^*\varphi\,,\, \psi \rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\, i\, \langle \frac{1}{t}(U(t)^* - \mathbb{I}^*)\varphi\,,\, \psi \rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\, \langle -i\frac{1}{t}(U(t)^* - \mathbb{I})\varphi\,,\, \psi \rangle \\
&= \lim_{t\to 0}\, \langle i\frac{1}{-t}(U(-t) - \mathbb{I})\varphi\,,\, \psi \rangle \\
&= \langle i \lim_{t\to 0} \frac{1}{-t}(U(-t) - \mathbb{I})\varphi\,,\, \psi \rangle \\
&= \langle A\varphi, \psi \rangle,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

es decir, A es un operador simétrico y por lo tanto es una extensión simétrica de T. Ya que T es un operador autoadjunto, T no tiene extensiones simétricas (corolario 1.24) por lo que $T = A$ y $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(T)$, en particular, $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(T)$.

Conclu\'imos además que T es entonces el generador infinitesimal del grupo de evolución unitario $t \to e^{-itT}$.

□

Una consecuencia del teorema anterior es la existencia de una única solución para la ecuación de Schrödinger:

Corolario 3.5. *Sea $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador lineal y autoadjunto. Entonces la ecuación con valor inicial*

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T)$$

tiene una única solución para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ y la solución es $\psi(t) := e^{-itT}\psi$.

Demostración. Sea $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, si denotamos $U(t) := e^{-itT}$ para cada $t \in \mathbb{R}$, entonces $\psi(t) = U(t)\psi$. El teorema 3.4 nos afirma que $t \to U(t)$ es un grupo de evolución fuertemente continuo y T es su generador infinitesimal, utilizando el lema 3.3 y las igualdades en (3.2) obtenemos

$$
\begin{aligned}
i\frac{d}{dt}\psi(t) &:= i\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\psi(t+h)-\psi(t)) \\
&= i\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(t+h)\psi - U(t)\psi) \\
&= i\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(U(h)-\mathbb{I})U(t)\psi \\
&= TU(t)\psi \\
&= T\psi(t),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

es decir, $\psi(t) = e^{-itT}\psi$ es solución a la ecuación, además $\psi(0) = U(0)\psi = \mathbb{I}\psi = \psi$, por lo que también se cumple la condición inicial . [2]

Para la unicidad de la solución, sea $\eta(t)$ otra solución, entonces para toda t:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\psi(t)-\eta(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\Big\langle \psi(t)-\eta(t), \psi(t)-\eta(t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \psi(t)-\eta(t), \frac{d}{dt}(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle + \Big\langle \frac{d}{dt}(\psi(t)-\eta(t)), \psi(t)-\eta(t)\Big\rangle \\
&= \Big\langle \psi(t)-\eta(t), \frac{d}{dt}(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle + \overline{\Big\langle \psi(t)-\eta(t), \frac{d}{dt}(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle} \\
&= 2\,\mathfrak{Re}\Big\langle \psi(t)-\eta(t), \frac{d}{dt}(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle \\
&= 2\,\mathfrak{Re}\Big\langle \psi(t)-\eta(t), -iT(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle \\
&= 2\,\mathfrak{Re} - i\Big\langle \psi(t)-\eta(t), T(\psi(t)-\eta(t))\Big\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

ya que T es autoadjunto y por lo tanto $\langle\psi, T\psi\rangle \in \mathbb{R},\ \forall\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Con esto tenemos que $\|\psi(t)-\eta(t)\|^2$ es constante y como $\psi(0)-\eta(0) = \psi-\psi = 0$, entonces $\|\psi(t)-\eta(t)\|^2 = 0$, por lo que $\psi(t) = \eta(t)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, lo que prueba la unicidad de $\psi(t)$.

□

Consideremos ahora el problema recíproco al planteado en el corolario 3.5, es decir, si tenemos $t \to U(t)$ un grupo de evolución fuertemente continuo en $\mathfrak{H}$, ¿existirá un operador autoadjunto T tal que $t \to U(t)\psi$ sea solución a la ecuación con valor inicial

$$
i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T)?
$$

Este es el contexto de nuestro siguiente teorema, conocido como el **Teorema de Stone**:

---

[2] Una útil observación en este punto y que utilizaremos más adelante es que las igualdades en (3.10) son válidas sin el explícito supuesto de que $U(t) := e^{-itT}$, es decir, son válidas únicamente sabiendo que el operador T es el generador infinitesimal del grupo de evolución $t \to U(t)$.

Teorema 3.6 (Stone). *Sea $t \to U(t)$ un grupo de evolución fuertemente continuo en $\mathfrak{H}$, entonces su generador infinitesimal T es autoadjunto y además $U(t) = e^{-itT}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Dividiremos la demostración en tres partes, primero probaremos que $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$, luego que T es esencialmente autoadjunto, es decir, $\overline{T}$ es autoadjunto y por último que $T = \overline{T}$ y $U(t) = e^{-itT}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\mathfrak{D}(T)$ *es denso en* $\mathfrak{H}$. Notemos que $\mathfrak{D}(T)$ es no vacío pues $0 \in \mathfrak{D}(T)$. Demostraremos que para cada $\psi \in \mathfrak{H}$ existe $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}(T)$ tal que $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \psi$.

Sea $\psi \in \mathfrak{H}$, definamos para cada $\tau > 0$

$$\psi_\tau := \int_0^\tau U(t)\psi \, dt \, ,$$

(donde la integral puede definirse vía límites de sumas de Riemann de manera similar a la integral de Riemann usual), probaremos que

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\psi_\tau = \psi.$$

Para ello utilicemos el hecho que si $f : I \subset \mathbb{R} \to X$ es una función continua, entonces $F(t) = \int_{t_0}^t f(s)ds \in C^1(I, X)$ y $\frac{d}{dt}F(t) = f(t)$; [3] en nuestro caso $U(t)\psi : \mathbb{R} \to \mathfrak{H}$ es una función continua (pues $U(t)$ es fuertemente continuo) y entonces

$$F(t) = \int_0^t U(s)\psi \, ds \in C^1(\mathbb{R}, \mathfrak{H}) \qquad y \qquad \frac{d}{dt}F(t) = U(t)\psi,$$

en particular:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\psi_\tau &= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(\psi_{0+\tau} - \psi_0) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}\Big(\int_0^{0+\tau} U(t)\psi \, dt - \int_0^0 U(t)\psi \, dt\Big) \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\tau}(F(0+\tau) - F(0)) \qquad (3.12) \\
&= \frac{d}{dt}F(0) \\
&= U(0)\psi \\
&= \psi \, ,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. Con esto tenemos definidos elementos $\frac{1}{\tau}\psi_\tau$ que convergen a ψ cuando $t \to 0$, probemos además que $\frac{1}{\tau}\psi_\tau \in \mathfrak{D}(T)$ para toda $\tau > 0$.

Recordemos que por definición del generador infinitesimal, $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ si y solo si $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi$ existe, entonces para demostrar que $\frac{1}{\tau}\psi_\tau \in \mathfrak{D}(T)$ bastaría

[3] Escribimos $f \in C^1(I, X)$ si $f : I \subset \mathbb{R} \to X$ y

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

existe para toda $t \in I$.

demostrar que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t)-\mathbb{I})\frac{1}{\tau}\psi_\tau$ existe. Ya que $U(t)$ es un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos:[4]

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(U(t)-\mathbb{I})\psi_\tau &= \frac{1}{t}(U(t)\psi_\tau - \psi_\tau)\\
&= \frac{1}{t}(U(t)\int_0^\tau U(s)\psi\, ds - \int_0^\tau U(s)\psi\, ds)\\
&= \frac{1}{t}(\int_0^\tau U(t)U(s)\psi\, ds - \int_0^\tau U(s)\psi\, ds)\\
&= \frac{1}{t}\int_0^\tau U(t+s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds\\
&= \frac{1}{t}\int_t^{t+\tau} U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(la última igualdad es consecuencia de que la integral es invariante bajo traslaciones). Ahora bien, considerando los casos $t<\tau$, $t=\tau$ o $\tau<t$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}\int_t^{t+\tau} U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^\tau U(s)\psi\, ds &= \frac{1}{t}\int_\tau^{\tau+t} U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t U(\tau+s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

nuevamente la segunda igualdad es consecuencia de la invarianza de la integral bajo traslaciones. Retomando (3.13) y utilizando (3.14) tenemos finalmente que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t}(U(t)-\mathbb{I})\psi_\tau &= \frac{1}{t}\int_0^t U(\tau+s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds\\
&= \frac{1}{t}\int_0^t U(\tau)U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds\\
&= \frac{1}{t}U(\tau)\int_0^t U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds\\
&= U(\tau)\frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds - \frac{1}{t}\int_0^t U(s)\psi\, ds\\
&= U(\tau)\frac{1}{t}\psi_t - \frac{1}{t}\psi_t.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Tomando el límite cuando $t \to 0$ en ambos lados de (3.15) y utilizando (3.12) obtenemos

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(U(t)-\mathbb{I})\psi_\tau = U(\tau)\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\psi_t - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\psi_t = U(\tau)\psi - \psi,$$

[4]Si $f:\mathbb{R}\to\mathfrak{H}$ es integrable y $S\in\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ entonces

$$S\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} Sf(t)\, dt.$$

como $U(\tau)\psi - \psi \in \mathfrak{H}$, entonces $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})\psi_\tau$ existe y $\psi_\tau \in \mathfrak{D}(T)$, luego $\frac{1}{\tau}\psi_\tau \in \mathfrak{D}(T)$ para todo $\tau > 0$. Definiendo $\varphi_k := \frac{1}{k}\psi_k$ obtenemos por (3.12) que $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}(T)$ y $\lim_{k\to\infty} \varphi_k = \psi$, por lo tanto, $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$.

T es esencialmente autoadjunto. Por lo demostrado arriba $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$ y de manera análoga a (3.9) podemos demostrar que $\langle\varphi, T\psi\rangle = \langle T\varphi, \psi\rangle$ para cualesquiera $\varphi, \psi \in \mathfrak{D}(T)$, por lo que T es un operador simétrico, como todo operador simétrico es cerrable (proposición 1.27) sea $\overline{T}$ la cerradura de T. Para probar que T es esencialmente autoadjunto es suficiente demostrar que $\mathrm{Ker}(T^* - \overline{z}) = \{0\}$ para alguna $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (proposición 1.29).

Tomemos $z = -i$ y supongamos que $\varphi \in \mathrm{Ker}(T^* - \overline{z}) = \mathrm{Ker}(T^* - i)$, es decir $T^*\varphi = i\varphi$; tenemos que para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle\varphi, U(t)\psi\rangle &= \langle\varphi, \frac{d}{dt}U(t)\psi\rangle \\
&= \langle\varphi, -iTU(t)\psi\rangle \\
&= -i\langle T^*\varphi, U(t)\psi\rangle \\
&= -i\langle\, i\varphi, U(t)\psi\rangle \\
&= \langle\, \varphi, U(t)\psi\rangle,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(la segunda igualdad es consecuencia del lema 3.3 y de (3.10)). Así, (3.16) nos dice que $\langle\varphi, U(t)\psi\rangle$ es solución a la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}f(t) = f(t)$ con condición inicial $\langle\varphi, \psi\rangle$ en $t = 0$, por tanto

$$\langle\varphi, U(t)\psi\rangle = e^t\langle\varphi, \psi\rangle \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

ya que el lado izquierdo de la igualdad es una función acotada[5] y la exponencial en el lado derecho no lo es, tenemos que $\langle\varphi, \psi\rangle = 0$ y esto para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ ya que ψ fue un elemento arbitrario de $\mathfrak{D}(T)$, como $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$, a cada $\psi \in \mathfrak{H}$ puedo aproximarlo por una sucesión de elementos en el dominio de T y dado que el producto interno es continuo en cada entrada se tiene que $\langle\varphi, \psi\rangle = 0 \quad \forall\psi \in \mathfrak{H}$, en particular $\langle\varphi, \varphi\rangle = 0$ y por tanto $\varphi = 0$. Tomamos $\varphi \in \mathrm{Ker}(T^* - i)$ y demostramos que $\varphi = 0$, entonces $\mathrm{Ker}(T^* - i) \subseteq \{0\}$, así $\mathrm{Ker}(T^* - i) = \{0\}$ y T es esencialmente autoadjunto, es decir, $\overline{T}$ es autoadjunto.

$T = \overline{T}$ y $U(t) = e^{-itT}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo demostrado arriba $\overline{T}$ es un operador autoadjunto, entonces de acuerdo al teorema 3.4, $\overline{T}$ es el (único) generador infinitesimal de un grupo de evolución fuertemente continuo $t \to V(t)$, donde

$$V(t) = e^{-it\overline{T}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostraremos que $U(t) = V(t) \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ y como consecuencia $T = \overline{T}$, pues T es el generador infinitesimal de $t \to U(t)$.

Sea $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, abreviaremos $\psi(t) = (U(t) - V(t))\psi$. Considerando el lema 3.3

[5] Ya que $U(t)$ es unitario para cada t se tiene $|\langle\varphi, U(t)\psi\rangle| \leq \|\varphi\|\|U(t)\psi\| = \|\varphi\|\|\psi\|$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

y (3.10) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{d}{dt}U(t)\psi - \frac{d}{dt}V(t)\psi \\ &= -iTU(t)\psi - (-i\overline{T}V(t)\psi) \\ &= -i\overline{T}U(t)\psi - (-i\overline{T}V(t)\psi) \\ &= -i\overline{T}\psi(t), \end{aligned} \tag{3.17}$$

donde $\overline{T}U(t)\psi = TU(t)\psi$ ya que $T \subseteq \overline{T}$ y $U(t)\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Entonces de manera similar a (3.11) y utilizando (3.17) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle\psi(t), \psi(t)\rangle \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\,\langle\psi(t), \frac{d}{dt}\psi(t)\rangle \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\,\langle\psi(t), -i\overline{T}\psi(t)\rangle \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\, - i\langle\psi(t), \overline{T}\psi(t)\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

ya que $\overline{T}$ es autoadjunto y por lo tanto $\langle\psi, \overline{T}\psi\rangle \in \mathbb{R}, \ \forall\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Por tanto $\|\psi(t)\|^2$ es contante y ya que $\psi(0) = (U(0) - V(0))\psi = \psi - \psi = 0$ entonces $\psi(t) = 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, es decir, $U(t)\psi = V(t)\psi$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y para toda $\psi \in \mathfrak{D}(T)$.

Por último, como $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$ y $U(t), V(t)$ son operadores continuos entonces podemos concluir que $U(t)\psi = V(t)\psi$ para toda $t \in \mathbb{R}$ y $\psi \in \mathfrak{H}$, así

$$U(t) = V(t) = e^{-it\overline{T}} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto $T = \overline{T}$ pues T es el generador infinitesimal de $t \to U(t)$. Concluímos que T es autoadjunto y $U(t) = e^{-itT}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

□

Corolario 3.7. *Sea $t \to U(t)$ un grupo de evolución unitario fuertemente continuo, entonces existe un operador autoadjunto T (su generador infinitesimal), tal que $t \to U(t)\psi$ es solución única al problema con valor inicial*

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T)$$

para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$.

Demostración. Por Teorema de Stone el generador infinitesimal T de $t \to U(t)$ es autoadjunto y además $U(t) = e^{-itT}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, utilizando el corolario 3.5 tenemos que $\psi(t) := e^{-itT}\psi = U(t)\psi$ es solución única a la ecuación para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$.

□

Hasta este punto vale la pena hacer algunas observaciones,

Observación 3.8. *Notemos que los teoremas 3.4 y 3.6 que hemos demostrado son en cierto sentido recíprocos pues el primero toma un operador autoadjunto T y a partir de él construye un grupo de evolución unitario fuertemente continuo $U(t) = e^{-itT}$; el segundo inicia con un grupo de evolución unitario fuertemente continuo $t \to U(t)$ y le asocia un operador autoadjunto T que es precisamente su generador infinitesimal.*

Resumiendo, en espacios de Hilbert hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los grupos de evolución fuertemente continuos y el conjunto de los operadores autoadjuntos en $\mathfrak{H}$, esto es una motivación para el estudio abstracto de los operadores autoadjuntos.

Observación 3.9. *Al igual que lo mencionado arriba, los corolarios 3.5 y 3.7 también son recíprocos desde el punto de vista de la ecuación con valor inicial*

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T), \tag{3.19}$$

ya que el corolario 3.5 afirma que si se tiene una ecuación como la anterior (para cualquier operador T autoadjunto) entonces se puede encontrar una solución a la ecuación por medio de $\psi(t) := e^{-itT}\psi$ y que además es única; por otro lado, el corolario 3.7 afirma que para cualquier grupo de evolución $t \to U(t)$ siempre puedo construir una ecuación de la forma (3.19) con T autoadjunto tal que $t \to U(t)\psi$ sea su única solución.

3.2. Probabilidad de retorno

Pensemos que la 'evolución' de un sistema está dada por un grupo de evolución fuertemente continuo $t \to U(t)$, si T es el generador infinitesimal de este grupo, por lo resultados de la sección anterior sabemos que $U(t) = e^{-itT}$. Entonces $t \to e^{-itT}$ describe la dinámica del sistema y la evolución del estado $\psi \in \mathfrak{H}$ es dada por

$$\psi(t) = e^{-itT}\psi.$$

El objetivo principal de esta sección es relacionar propiedades de las medidas espectrales de un operador autoadjunto T con el comportamiento para largos valores de t del grupo de evolución e^{-itT}.

Recordemos del Capítulo 2 que dado un operador autoadjunto $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, podemos descomponer el espacio $\mathfrak{H}$ en subespacios espectrales asociados al operador T (teorema 2.10), en general, diferentes subespacios proporcionan diferentes comportamientos de $e^{-itT}\psi$, particularmente cuando $t \to \infty$. En esta sección estudiaremos algunos de estos diversos comportamientos.

3.2.1. Probabilidad de retorno (o de supervivencia) de estados

Sea T un operador autoadjunto, para cada $\psi \in \mathfrak{H}$, sean $\mu_\psi = \mu_\psi^T$ las correspondientes medidas espectrales asociadas al operador T introducidas en la sección

1.4.1. Recordemos que $\psi(t) = e^{-itT}\psi$ es la única solución para la ecuación

$$i\frac{d}{dt}\psi(t) = T\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi \in \mathfrak{D}(T).$$

Definiremos a continuación las cantidades que serán importantes para estudiar el comportamiento de $e^{-itT}\psi$ para largos valores de t:

Definición 3.10. *Sea $\psi \in \mathfrak{H}$ con $\|\psi\| = 1$.*

I. *La* **probabilidad de retorno** *a la condición inicial ψ al tiempo t es*

$$p_\psi(t) := |\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle|^2,$$

más generalmente definimos $p_{\eta,\psi}(t) := |\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle|^2$.

II. *El* **promedio de la probabilidad de retorno** *al tiempo $t \neq 0$ es*

$$\langle p_\psi\rangle(t) := \frac{1}{t}\int_0^t p_\psi(s)\, ds,$$

de manera similar definimos $\langle p_{\eta,\psi}\rangle(t)$.

Ahora bien, recordemos que por el Teorema espectral y el teorema 1.48

$$\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_\psi(x),$$

si denotamos como $\hat{\mu}_\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_\psi(x)$, entonces $\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle = \hat{\mu}_\psi(t)$. Llamemos a $\hat{\mu}_\psi(t)$ la *transformada de Fourier de la medida* $\mu_\psi(t)$. Con estas consideraciones en mente, se tienen las útiles igualdades

$$p_\psi(t) := |\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle|^2 = \left|\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_\psi(x)\right|^2 = |\hat{\mu}_\psi(t)|^2, \tag{3.20}$$

de donde podemos notar que el comportamiento de la probabilidad de supervivencia $p_\psi(t)$ está claramente relacionado con las medidas espectrales μ_ψ del operador T. Como dijimos al inicio de la sección, diferentes subespacios espectrales de T proporcionan diferentes comportamientos de $e^{-itT}\psi$, es decir, dependiendo del subespacio en el que se encuentre ψ tendremos diferentes propiedades de $p_{\eta,\psi}(t)$ y $\langle p_{\eta,\psi}\rangle(t)$, especialmente cuando $t \to \infty$.

Recordemos que si ψ es un eigenvector de T entonces $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, la primera proposición que demostraremos nos dice qué pasa con $p_\psi(t)$ cuando nuestro estado inicial $\psi \in \mathfrak{H}$ es un eigenvector de T:

Proposición 3.11. *Sea $\psi \in \mathfrak{H}$ un eigenvector de T con $\|\psi\| = 1$, entonces*

$$p_\psi(t) := |\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle|^2 = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T\psi = \lambda\psi$, por el lema 1.58 tenemos que $\mu_\psi = \|\psi\|^2\delta_\lambda$ con δ_λ la medida de Dirac en λ y utilizando la proposición B.12 obtenemos

$$\begin{aligned} p_\psi(t) &:= |\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle|^2 \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_\psi(x) \right|^2 \\ &= \left| \|\psi\|^2 e^{-it\lambda} \right|^2 \\ &= (\|\psi\|^2)^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Ahora bien, por definición

$$\mathfrak{H}_{ac}(T) = \{\psi \in \mathfrak{H} : \mu_\psi^T \ll \ell\},$$

donde ℓ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, daremos una proposición que nos dirá cómo es el comportamiento de $p_{\eta,\psi}(t)$ cuando $t \to \infty$ y $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$. Para ello necesitaremos los siguiente lemas:

Lema 3.12. *Cada uno de los subespacios $\mathfrak{H}_p(T)$, $\mathfrak{H}_c(T)$, $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ reduce a los operadores $U(t) := e^{-itT}$ para toda $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $t \in \mathbb{R}$, ya que $U(t) := e^{-itT}$ es un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, es suficiente demostrar que cada uno de los subespacios es $U(t)$-invariante, es decir, para todo $\psi \in \mathfrak{H}$

$$\text{si } \psi \in \mathfrak{H}_x(T) \Longrightarrow U(t)\psi \in \mathfrak{H}_x(T),$$

para cada $x \in \{p, c, s, ac, sc\}$. Primero demostraremos que $U(t)$ conmuta con todas las proyecciones espectrales de T, en símbolos:

$$P^T(\Omega)U(t) = U(t)P^T(\Omega), \quad \forall\Omega \in \mathcal{A}.$$

De acuerdo a las igualdades en (3.3), la igualdad anterior es equivalente a demostrar que $P^T(\chi_\Omega)P^T(f_t) = P^T(f_t)P^T(\chi_\Omega)$ para cada $\Omega \in \mathcal{A}$, pero esto último es consecuencia inmediata del inciso II de la proposición 1.49. Ahora bien, ya que por los teoremas 2.3 y 2.8 todos los subespacios espectrales tienen una caracterización vía las medidas espectrales de T, para demostrar que si $\psi \in \mathfrak{H}_x(T)$ entonces $U(t)\psi \in \mathfrak{H}_x(T)$ bastaría demostrar que sus correspondientes medidas espectrales son iguales, es decir, $\mu_\psi = \mu_{U(t)\psi}$. Esto último es consecuencia de que

$$\mu_{U(t)\psi}(\Omega) = \|P^T(\Omega)U(t)\psi\|^2 = \|U(t)P^T(\Omega)\psi\|^2 = \|P^T(\Omega)\psi\|^2 = \mu_\psi(\Omega)$$

pues $U(t)$ es un operador unitario.

□

Lema 3.13 (Riemann-Lebesgue). *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\hat{f}$ denota su transformación de Fourier, $\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ipx} f(x)\, dx$, entonces $\hat{f}$ es continua y además*

$$\lim_{|p|\to\infty} \hat{f}(p) = 0.$$

Tomemos entonces $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, sabemos que la medida μ_ψ es finita y además la medida de Lebesgue ℓ es σ-finita, como μ_ψ es absolutamente continua con respecto a ℓ, el Teorema de Radon-Nikodým nos dice que existe una función $f \geq 0$ Borel-medible tal que

$$\mu_\psi(\Omega) = \int_\Omega f(x)\, dx \quad \text{ para todo } \Omega \in \mathcal{A},$$

(donde $\int_\Omega f(x)\, dx$ es la integral con respecto a la medida de Lebesgue) y en este caso

$$\int_{\mathbb{R}} g \; d\mu_\psi = \int_{\mathbb{R}} gf \; dx$$

para cada función $g \in \mathrm{L}^1(\mu_\psi)$. En nuestro caso, podemos decir aún más de la función $f \geq 0$ obtenida arriba, como μ_ψ es finita se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \mu_\psi(\mathbb{R}) < \infty,$$

es decir, $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Una consecuencia importante de estos hechos es la siguiente proposición:

Proposición 3.14. *Sea T un operador autoadjunto. Si $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, entonces*

$$\lim_{t\to\infty} \langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{H}$$

por lo que

$$\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\psi}(t) = 0.$$

Demostración. Primero demostraremos la afirmación para cuando $\eta = \psi$. Ya que por hipótesis $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$, por definición μ_ψ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue ℓ, por lo que de las observaciones hechas antes del enunciado de la proposición tenemos:

$$\langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mu_\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\ \hat{f}(t),$$

con $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Utilizando el Lema de Riemann-Lebesgue obtenemos

$$\lim_{t\to\infty} \langle \psi, e^{-itT}\psi\rangle = \sqrt{2\pi} \lim_{t\to\infty} \hat{f}(t) = 0.$$

Probaremos ahora que $\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle \to 0$ cuando $t \to \infty$ para cada $\eta \in \mathfrak{H}$ y $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$. Notemos que si $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ entonces $e^{-itT}\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ para toda $t \in \mathbb{R}$ (lema 3.12) y así $\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle = 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$ si $\eta \in \mathfrak{H}_s(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T)^\perp$; ya que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{ac}(T) \oplus \mathfrak{H}_s(T)$ lo anterior nos dice que es suficiente considerar el caso cuando $\eta \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$. Utilizando la identidad de polarización (proposición 1.4) llegamos a que $\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle$ es una combinación lineal de cuatro términos de la forma $\langle \eta + \alpha\psi, e^{-itT}(\eta + \alpha\psi)\rangle$ con $\eta + \alpha\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, ya que cada uno de estos términos converge a cero por el caso que demostramos al inicio, concluímos que

$$\lim_{t\to\infty} \langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle = 0, \quad \forall \eta \in \mathfrak{H}.$$

El límite $\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\psi}(t) = 0$ es consecuencia directa de la igualdad anterior pues $p_{\eta,\psi}(t) := |\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle|^2$.

$\square$

Ahora bien, hemos demostrado entonces que $\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\psi}(t) = 0$ para $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\eta \in \mathfrak{H}$, ya que $\mathfrak{H}_{ac}(T) \subset \mathfrak{H}_c(T)$ vale la pena preguntarnos lo siguiente: ¿el límite $\lim_{t\to\infty} p_{\eta,\psi}(t)$ también será cero si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$? La respuesta es parcialmente cierta porque $p_{\eta,\psi}(t)$ tenderá a cero sólo cuando tomemos el promedio sobre el parámetro t, es decir, para elementos $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ sucederá que $\lim_{t\to\infty}\langle p_{\eta,\psi}\rangle(t) = 0$ (proposición 3.16). Para ello, demostramos primero un lema que utilizaremos más adelante.

Lema 3.15. *Sea $t \to U(t)$ un grupo de evolución fuertemente continuo, T su generador infinitesimal. Entonces si $B \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y $BU(t) = U(t)B$ para todo $t \in \mathbb{R}$, los subespacios $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ reducen al operador B.*

Demostración. Observemos que B^* también conmuta con $U(t)$ pues $BU(t) = U(t)B$ implica que $U(t)^*B^* = B^*U(t)^*$ y como $U(t)^* = U(-t)$ por (3.1), entonces $U(t)B^* = B^*U(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

Ya que $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{H}$, para demostrar que $\mathfrak{H}_p(T)$ reduce a B es suficiente demostrar que $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_p(T)^\perp$ son B-invariantes (Apéndice A). Primero tomemos ψ un eigenvector de T con $T\psi = \lambda\psi$, ya que B conmuta con $U(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y es un operador continuo, de un argumento análogo a la demostración del lema 3.3 concluímos que $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})B\psi$ existe y por consecuencia $B\psi \in \mathfrak{D}(T)$, además, explícitamente se tiene que

$$\begin{aligned} TB\psi &= i \lim_{t\to 0}(U(t) - \mathbb{I})B\psi \\ &= B\, i \lim_{t\to 0}(U(t) - \mathbb{I})\psi \\ &= BT\psi \\ &= B\lambda\psi \\ &= \lambda B\psi \end{aligned}$$

por lo que $B\psi$ es también un eigenvector de T, por tanto $B\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ y esto para cada eigenvector ψ de T. Ya que $\mathfrak{H}_p(T)$ es la **cerradura** del subconjunto lineal generado por todos los eigenvectores de T y B es un operador continuo, automáticamente tenemos que si $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces $B\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, es decir, el subespacio $\mathfrak{H}_p(T)$ es B-invariante. Del hecho que $U(t)^*B^* = B^*U(t)^*$ para cada $t \in \mathbb{R}$ podemos argumentar de manera análoga a la anterior y concluir que B^* también deja invariante a $\mathfrak{H}_p(T)$.

Para demostrar que B deja invariante a $\mathfrak{H}_p(T)^\perp$ tomemos $\varphi \in \mathfrak{H}_p(T)^\perp$, queremos probar que $B\varphi \in \mathfrak{H}_p(T)^\perp$ para lo cual bastaría demostrar que $\langle B\varphi, \psi\rangle = 0 \ \ \forall\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$. Sea entonces $\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$, como $\langle B\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, B^*\psi\rangle$ y $B^*\psi \in \mathfrak{H}_p(T)$ por lo hecho arriba, entonces $\langle B\varphi, \psi\rangle = \langle\varphi, B^*\psi\rangle = 0$ que es lo que queríamos demostrar, luego, B también deja invariante a $\mathfrak{H}_p(T)^\perp$. Concluímos entonces que $\mathfrak{H}_p(T)$ reduce al operador B, además, ya que un subespacio es reductor si y sólo si su complemento ortogonal lo es (proposición A.2), $\mathfrak{H}_c(T)$ es también un subespacio reductor de B.

□

En particular, notemos que el lema anterior es otra justificación del hecho que los subespacios $\mathfrak{H}_p(T)$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ reducen a los operadores $U(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$, ya que por definición se tiene que $U(t)U(s) = U(t+s) = U(s)U(t) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$. Finalmente demostramos la respuesta que dimos a una pregunta planteada párrafos arriba al respecto del comportamiento de $p_{\eta,\psi}(t)$ cuando $t \to \infty$ y cuando nuestro estado inicial ψ pertenece al subespacio $\mathfrak{H}_c(T)$.

Proposición 3.16. *Sea T un operador autoadjunto. Si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$, entonces para cada $\eta \in \mathfrak{H}$*

$$\lim_{t\to\infty} \langle p_{\eta,\psi}\rangle(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \eta, e^{-isT}\psi\rangle|^2\, ds = 0.$$

Demostración. Denotemos por $U(t) := e^{-itT}$ para cada $t \in \mathbb{R}$ al grupo de evolución $t \to e^{-itT}$. Sea $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$, por el lema 3.12 sabemos que $U(t)\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por lo que si $\eta \in \mathfrak{H}_p(T)$ entonces $\langle \eta, U(t)\psi\rangle = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y en este caso la afirmación es trivial. Ya que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_p(T) \oplus \mathfrak{H}_c(T)$ será suficiente analizar el caso cuando $\eta \in \mathfrak{H}_c(T)$ y en este caso, podemos utilizar además la identidad de polarización (proposición 1.4) para expresar a $\langle \eta, U(t)\psi\rangle$ como combinación lineal de cuatro términos de la forma $\langle \eta + \alpha\psi, U(t)(\eta + \alpha\psi)\rangle$ con $\eta + \alpha\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Por todo lo anterior, la afirmación de la proposición se reduce al caso cuando $\eta = \psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ pero ésto es una simple consecuencia de la proposición 4.2 del Capítulo 4.

□

Los resultados anteriores tienen significado en Mecánica cuántica, si $\|\eta\| = \|\psi\| = 1$, un cálculo sencillo nos muestra que el vector $\langle \eta, \psi\rangle\eta$ es la proyección de ψ sobre el subespacio unidimensional generado por η, por lo que $|\langle \eta, \psi\rangle|^2$ puede interpretarse como la 'parte' de ψ que está en el estado η. Del mismo modo podemos interpretar $p_{\eta,\psi} = |\langle \eta, e^{-itT}\psi\rangle|^2$, la probabilidad de supervivencia al estado η.

Así, lo demostrado en esta sección nos dice que bajo la evolución $e^{-itT}\psi$, en promedio cualquier estado η es completamente abandonado si nuestro estado inicial ψ está en $\mathfrak{H}_c(T)$, pues por la proposición 3.16, $\langle p_{\eta,\psi}\rangle(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$; además, según la proposición 3.14 el promedio sobre $p_{\eta,\psi}(t)$ no es necesario si $\psi \in \mathfrak{H}_{ac}(T)$. Por otra parte, en la primera sección del Capítulo 4 demostraremos que la afirmación recíproca de la proposición 3.16 también es verdadera (cuando $\eta = \psi$) y por lo tanto si nuestro estado inicial ψ está en $\mathfrak{H}_p(T)$ tenemos que $\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) > 0$ lo que nos dice que bajo la evolución $e^{-itT}\psi$ nuestro estado inicial no es completamente 'olvidado'.

3.3. El Teorema de RAGE

En esta sección demostraremos un resultado conocido como el **Teorema de RAGE**, nombrado así por las aportaciones de D. Ruelle (1969), W. O. Amrein y V. Georgescu (1973) y finalmente por V. Enss (1978). Decidimos demostrar el Teorema de RAGE ya que provee una conexión entre la dinámica de las soluciones de una ecuación lineal de evolución (como la ecuación dinámica de Schrödinger introducida al inicio del capítulo) y las propiedades espectrales del operador lineal autoadjunto que genera la dinámica, el generador infinitesimal.

Antes de enunciarlo, demostremos el siguiente teorema:

Teorema 3.17. *Sea T un operador autoadjunto, $t \to U(t)$ un grupo de evolución unitario fuertemente continuo y B un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Supongamos que existe un operador $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tal que i) $DU(t) = U(t)D$ para toda $t \in \mathbb{R}$, ii)* Ran (D) *es denso en $\mathfrak{H}$ y iii) BD es un operador compacto* [6]*. Entonces para cada $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ se cumple*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \|BU(s)\psi\|^2 \, ds = 0.$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ y tomemos $\varepsilon > 0$, probaremos que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para toda $t \geq t_0$

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|BU(s)\psi\|^2 \, ds < \varepsilon.$$

Si B es el operador $\mathbf{0}$ la afirmación es trivial, supongamos entonces que $B \neq \mathbf{0}$. Ya que Ran (D) es denso en $\mathfrak{H}$, existe $\psi_0 \in \mathfrak{H}$ tal que

$$\|\psi - D\psi_0\|^2 < \frac{\varepsilon}{9\|B\|^2}.$$

Denotemos por P_c a la proyección ortogonal de $\mathfrak{H}$ sobre $\mathfrak{H}_c(T)$, como por hipótesis $D \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y $DU(t) = U(t)D$ para toda $t \in \mathbb{R}$, el lema 3.15 nos dice que $\mathfrak{H}_c(T)$ reduce al operador D y entonces por teorema A.4 tenemos la igualdad $DP_c\psi_0 = P_cD\psi_0$. Si denotamos por $h = P_c\psi_0$ se cumple

$$\begin{aligned}
\|\psi - Dh\|^2 &= \|P_c\psi - P_cD\psi_0\|^2 \\
&\leq \|P_c\|^2 \|\psi - D\psi_0\|^2 \\
&\leq \|\psi - D\psi_0\|^2 \\
&< \frac{\varepsilon}{9\|B\|^2},
\end{aligned} \tag{3.21}$$

donde $P_c\psi = \psi$ pues $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$.

Si $h = 0$, de las desigualdades de arriba tenemos

$$\frac{1}{t} \int_0^t \|BU(s)\psi\|^2 \, ds \leq \|B\|^2 \|U(s)\|^2 \frac{1}{t} \int_0^t \|\psi\|^2 \, ds \leq \|B\|^2 \frac{1}{t} \Big(\frac{t\varepsilon}{9\|B\|^2} \Big) = \frac{\varepsilon}{9} < \varepsilon,$$

para cada t, por lo que tenemos el resultado.

Si $h \neq 0$, del hecho que BD es un operador compacto podemos escoger un operador de rango finito K tal que [7]

$$\|BD - K\|^2 < \frac{\varepsilon}{9\|h\|^2}. \tag{3.22}$$

Además, por la proposición 1.38 tenemos la siguiente expresión para K:

$$K(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{n} \langle \eta_k, \,\cdot\, \rangle \varphi_k, \quad \text{con} \quad \eta_k, \varphi_k \in \mathfrak{H},$$

[6] Sean $\mathfrak{H}_1$ y $\mathfrak{H}_2$ espacios de Hilbert, un operador $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ es **compacto** si cada sucesión acotada $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathfrak{D}(T)$ contiene una subsucesión $\{\psi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ tal que $\{T\psi_{n_k}\}_{k\geq 1}$ es convergente. Además, si T es un operador compacto entonces $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

[7] Si T es un operador compacto, entonces existe una sucesión $\{K_n\}_{n\geq 1}$ de operadores de rango finito tal que $K_n \to T$ en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

por lo que utilizando la desigualdad en espacios de Hilbert $\| \sum_{k=0}^{n} f_k\|^2 \leq n \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|^2$, además de (3.21) y (3.22), concluímos que

$$\begin{aligned} \|BU(s)\psi\|^2 &= \|BU(s)(\psi - Dh) + (BD-K)U(s)h + KU(s)h\|^2 \\ &\leq 3(\|BU(s)(\psi - Dh)\|^2 + \|(BD-K)U(s)h\|^2 + \|KU(s)h\|^2 \\ &= 3\|BU(s)(\psi - Dh)\|^2 + 3\|(BD-K)U(s)h\|^2 + 3\|KU(s)h\|^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 3\Big\|\sum_{k=0}^{n}\langle \eta_k, U(s)h\rangle\varphi_k\Big\|^2 \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{3} + 3n\sum_{k=0}^{n}|\langle\eta_k, U(s)h\rangle|^2\|\varphi_k\|^2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}\int_0^t \|BU(s)\psi\|^2\,ds &\leq \frac{1}{t}\int_0^t \frac{2\varepsilon}{3}\,dt + \frac{1}{t}\int_0^t 3n\sum_{k=0}^{n}|\langle\eta_k, U(s)h\rangle|^2\|\varphi_k\|^2\,ds \\ &= \frac{2\varepsilon}{3} + 3n\sum_{k=0}^{n}\|\varphi_k\|^2\,\frac{1}{t}\int_0^t|\langle\eta_k, U(s)h\rangle|^2\,ds, \end{aligned} \tag{3.24}$$

el último sumando del lado derecho es una suma finita de términos cada uno de los cuales converge a cero cuando $t \to \infty$ por proposición 3.16 (por el Teorema de Stone $U(s) = e^{-isT}$ con T autoadjunto) ya que $h = P_c\psi_0 \in \mathfrak{H}_c(T)$, por lo tanto existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que para toda $t \geq t_0$

$$3n\sum_{k=0}^{n}\|\varphi_k\|^2\,\frac{1}{t}\int_0^t|\langle\eta_k, U(s)h\rangle|^2\,ds < \frac{\varepsilon}{3},$$

así, de (3.24) obtenemos

$$\frac{1}{t}\int_0^t \|BU(s)\psi\|^2\,ds < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \text{para toda } t \geq t_0,$$

luego,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \|BU(s)\psi\|^2\,ds = 0.$$

□

Enunciaremos ahora un teorema muy importante y que se debe a los aportaciones primero de D. Ruelle en [Rue69], y después de W. O. Amrein y V. Georgescu en [AG73], la demostración es consecuencia de la proposición anterior.

Teorema 3.18. *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$ y $K \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ un operador compacto, entonces para cada $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$*

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|Ke^{-itT}\psi\|^2\,dt = 0.$$

Demostración. Es consecuencia de aplicar el teorema 3.17 al grupo de evolución $t \to U(t) := e^{-itT}$ con $D := \mathbb{I}$ y $B := K$.

$\square$

Una importante generalización del teorema anterior tiene que ver con no pedir necesariamente que el operador K sea compacto. Enss en su artículo [Ens78] demostró que las afirmaciones del teorema anterior son válidas para operadores $C \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ que cumplen que $C(T+i)^{-1}$ es compacto; el resultado es conocido comúnmente como el Teorema de RAGE y lo enunciamos a continuación:

Teorema 3.19 (Ruelle–Amrein–Georgescu–Enss). *Sea T un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$ y $C \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tal que $C(T+i)^{-1}$ es compacto. Entonces para toda $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ se tiene*

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|Ce^{-itT}\psi\|^2\,dt = 0.$$

Demostración. Por suposición tenemos que $C \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, si tomamos $B := C$, $D := (T+i)^{-1}$ como en las hipótesis del teorema 3.17 y demostramos que $(T+i)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ además de i) $(T+i)^{-1}U(t) = U(t)(T+i)^{-1}$ para toda $t \in \mathbb{R}$, ii) $\operatorname{Ran}(T+i)^{-1}$ es denso en $\mathfrak{H}$ y iii) $C(T+i)^{-1}$ es compacto, entonces el teorema 3.17 nos da el resultado.

Como T es autoadjunto, $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, por lo que $-i \in \rho(T)$ y por definición $R_{-i} := (T+i)^{-1} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{D}(T+i)$ existe y $(T+i)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

i) Ahora bien, por lema 3.3 tenemos que $U(t)T = TU(t) \ \ \forall t \in \mathbb{R},$ por lo que de la linealidad de $U(t)$ y T obtenemos

$$U(t)(T+i) = U(t)T + iU(t) = TU(t) + iU(t) = (T+i)U(t),$$

es decir, $(T+i)$ conmuta con $U(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$. Sea $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}(T+i)^{-1}U(t) &= (T+i)^{-1}U(t)(T+i)(T+i)^{-1}\\ &= (T+i)^{-1}(T+i)U(t)(T+i)^{-1}\\ &= U(t)(T+i)^{-1},\end{aligned}$$

luego, $(T+i)^{-1}$ también conmuta con $U(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$.

ii) Por definición de operador inverso tenemos que $\operatorname{Ran}(T+i)^{-1} = \mathfrak{D}(T+i)$, pero $\mathfrak{D}(T+i) = \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(i\mathbb{I}) = \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{D}(T)$ y $\mathfrak{D}(T)$ es denso por la demostración del Teorema de Stone, luego, $\operatorname{Ran}(T+i)^{-1}$ es denso en $\mathfrak{H}$. iii) $C(T+i)^{-1}$ es compacto por hipótesis.

Por todo lo anterior se cumplen las hipótesis de el teorema 3.17 y como consecuencia, si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ entonces

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \|Ce^{-itT}\psi\|^2\,dt = 0.$$

$\square$

Así, propiedades espectrales del operador T son relacionadas con el comportamiento para grandes valores de t del grupo de evolución unitario e^{-itT}.

3.4. Notas

Sección 3.1

Un complemento para el material de esta sección y su relación con la Mecánica cuántica puede encontrarse en los libros [Tes09], [dO09], [BEH08], [Amr09] y en la valiosa sección VIII.11 de [RS80]. También, un análisis muy interesante del Teorema de Stone empezando desde su 'expresión' en el caso dimensionalmente finito y llegando hasta operadores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ puede encontrarse en el primer capítulo de [EN06].

Sección 3.2

El material de esta sección está basado en una pequeña parte del Capítulo 13 del libro [dO09], también se pueden encontrar ahí muchas de las demostraciones de la sección que no presentamos en este trabajo por ejemplo el Lemma de Riemann-Lebesgue, recomendamos este libro para quien esté interesado en profundizar los conceptos de Dinámica cuántica expuestos en esta sección. La demostración de las proposiciones 3.14 y 3.16 se las debemos al Capítulo 5 de [Amr09].

Sección 3.3

Esta sección se basa en el Capítulo 4 del libro [Amr81] de W. O. Amrein quien fue uno de los matemáticos a quienes se les debe resultados de tipo del Teorema de RAGE. Los libros [Tes09] y [dO09] también pueden servir como referencia.

CAPÍTULO 4

'Bienvenidos al País de las Maravillas'

Como mencionamos en la introducción, durante las décadas de 1960, 1970 y 1980 el espectro singular continuo era considerado como una 'patología' dentro de la Teoría de operadores e 'indeseable' para la Teoría matemática de la mecánica cuántica. Alrededor del año 1994, B. Simon inició con la publicación de varios resultados donde demostraba que este tipo de espectro es en realidad un fenómeno mucho más común de lo que se pensaba hasta ese momento, de hecho, era un fenómeno 'denso' para muchas clases de operadores. De entre esos primeros resultados que revolucionaron la visión sobre los operadores con espectro singular continuo, quizá el más notable fue al que denominó: el Teorema Wonderland.

Dado un espacio métrico completo (X, d) de operadores autoadjuntos actuando en un espacio de Hilbert separable $\mathfrak{H}$, bajo ciertas condiciones se garantiza que los operadores en X que tienen espectro puramente singular continuo forman un conjunto genérico, es decir, un conjunto G_δ denso en X. Ésto es lo que afirma el Teorema Wonderland y que demostramos detalladamente en este capítulo, la prueba está basada en dos resultados técnicos de interés independiente y usamos para uno de ellos una prueba sugerida por por S. De Bièvre y G. Forni en 1998.

4.1. Preparando el teorema principal

4.1.1. El Teorema de Wiener

Recordemos del Capítulo 3 (proposición 3.16) que si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ entonces

$$\lim_{t\to\infty} \langle p_\psi \rangle(t) = 0.$$

Comenzaremos esta sección demostrando que el recíproco de la afirmación anterior también es verdadero, es decir, si tomamos $\psi \in \mathfrak{H}$ arbitrario tal que

$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = 0$ entonces $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$. Para ello, demostraremos antes un teorema clásico sobre la transformada de Fourier[1] de una medida de Borel finita μ.

Teorema 4.1 (Wiener). *Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y $\hat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\,d\mu(x)$ su respectiva transformada de Fourier. Si* [2]

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{\lambda\}) \neq 0\} = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$$

es el conjunto de los puntos discretos de μ, entonces

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\})^2 < \infty.$$

Demostración. Observemos primero que la suma del lado derecho de la igualdad anterior es convergente pues por la σ-aditividad y finitud de μ obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\}) = \mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{\lambda_k\}\Big) = \mu(\Lambda) \leq \mu(\mathbb{R}) < \infty \tag{4.1}$$

por lo que la sucesión de términos $\mu(\{\lambda_k\})_{k\geq 1}$ es sumable y por lo tanto acotada, así, existe $M \geq 0$ tal que $\mu(\{\lambda_k\}) \leq M$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(\{\lambda_k\})^2 = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{\lambda_k\})\mu(\{\lambda_k\}) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(\{\lambda_k\})M = M\sum_{k=1}^{n} \mu(\{\lambda_k\}),$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ en la desigualdad anterior obtenemos finalmente por (4.1) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\})^2 \leq M\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\}) < \infty.$$

Ahora bien, demostremos la igualdad que afirma el teorema. De las igualdades en (3.20) se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big|\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\,d\mu(x)\Big|^2\,ds \\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\,d\mu(x)\Big)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isy}\,d\mu(y)\Big)}\,ds,\end{aligned} \tag{4.2}$$

pues $\hat{\mu}(s) \in \mathbb{C}$ para cada $s \in \mathbb{R}$. Además, ya que para funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μ-integrables, con $f = u + iv$ donde $\mathfrak{Re}(f) = u$ y $\mathfrak{Im}(f) = v$, se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu := \int_{\mathbb{R}} u\,d\mu + i\int_{\mathbb{R}} v\,d\mu,$$

[1] Ver (3.20).

[2] Como μ es una medida de Borel finita, utilizando el lema B.5 tenemos que Λ es un conjunto contable.

entonces

$$\begin{aligned}\overline{\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu} &= \overline{\int_{\mathbb{R}} u\,d\mu + i\int_{\mathbb{R}} v\,d\mu}\\ &= \int_{\mathbb{R}} u\,d\mu - i\int_{\mathbb{R}} v\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}} u\,d\mu + i\int_{\mathbb{R}} -v\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{f}\,d\mu,\end{aligned}$$

por tanto, de (4.2) obtenemos [3]

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\,d\mu(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} \overline{e^{-isy}}\,d\mu(y)\Big)\,ds\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\,d\mu(x)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{isy}\,d\mu(y)\Big)\,ds\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{isy}\,d\mu(y)\Big)\,d\mu(x)\Big)\,ds \qquad (4.3)\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-isx}e^{isy}\,d\mu(y)\Big)\,d\mu(x)\Big)\,ds\\ &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)s}\,d\mu(y)\Big)\,d\mu(x)\Big)\,ds,\end{aligned}$$

además, como $|e^{-i(x-y)s}| \leq 1$ y la medida μ es finita podemos utilizar el Teorema de Fubini (teorema B.15) en esta última expresión para obtener la igualdad

$$\frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}}\Big(\int_{\mathbb{R}} e^{-i(x-y)s}\,d\mu(y)\Big)\,d\mu(x)\Big)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x-y)s}\ \ d(\mu\otimes\mu)(x,y)\Big)\,ds,$$

así, de (4.3) y la igualdad anterior se tiene

$$\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x-y)s}\ \ d(\mu\otimes\mu)(x,y)\Big)\,ds.$$

Utilizando nuevamente el Teorema de Fubini[4] podemos cambiar el orden de integración en el lado derecho de la igualdad, por lo que integrando primero con respecto a s obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds &= \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(x-y)s}\ \ d(\mu\otimes\mu)(x,y)\Big)\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\Big(\frac{1}{t}\int_0^t e^{-i(x-y)s}\ \ ds\Big)\,d(\mu\otimes\mu)(x,y) \qquad (4.4)\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F_t(x,y)\ d(\mu\otimes\mu)(x,y),\end{aligned}$$

[3] En (3.5) probamos que $\overline{e^{-isy}} = e^{-i(-s)y}$.

[4] Podemos usarlo debido a que la medida $\mu\otimes\mu$ es finita (pues μ lo es) y también la medida de Lebesgue es finita en $[0,t]$.

donde[5]

$$F_t(x,y) = \begin{cases} \dfrac{i(e^{-i(x-y)t}-1)}{(x-y)t} & \text{si} \quad x \neq y \\ \\ 1 & \text{si} \quad x = y\,. \end{cases}$$

Luego, si $x = y$ claramente $\lim_{t\to\infty} F_t(x,y) = 1$ y como $|i(e^{-i(x-y)t}-1)| \leq 2$, para $x \neq y$ se tiene

$$\lim_{t\to\infty} F_t(x,y) = 0,$$

lo que podemos expresar como:

$$\lim_{t\to\infty} F_t(x,y) = \chi_{\{y\}}(x) \tag{4.5}$$

donde

$$\chi_{\{y\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = y \\ 0 & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Además, recordemos que en la demostración del teorema 3.4 se probó que

$$|e^{-itx} - 1| \leq |tx|,$$

por lo tanto, si $t > 0$ y $x \neq y$ se tiene

$$|F_t(x,y)| = \Big|\frac{i(e^{-i(x-y)t}-1)}{(x-y)t}\Big| = \frac{|i(e^{-i(x-y)t}-1)|}{|(x-y)t|} \leq 1$$

y entonces (ya que $\mu \otimes \mu$ es finita):

$$|F_t(x,y)| \leq 1 \in \mathrm{L}^1(\mu\otimes\mu) \qquad \forall\, t > 0. \tag{4.6}$$

Ahora bien, de (4.4) obtenemos la expresión

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\, ds = \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} F_t(x,y)\ d(\mu\otimes\mu)(x,y)$$

por lo que utilizando (4.5) y (4.6) podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue a la integral del lado derecho para tener

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\, ds &= \lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} F_t(x,y)\ d(\mu\otimes\mu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \lim_{t\to\infty} F_t(x,y)\ d(\mu\otimes\mu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\{y\}}(x)\ d(\mu\otimes\mu)(x,y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x)\Big)\, d\mu(y), \end{aligned} \tag{4.7}$$

[5]Si $x \neq y$, $\frac{1}{t}\int_0^t e^{-i(x-y)s}\, ds = \frac{1}{t}\frac{e^{-i(x-y)s}}{-i(x-y)}\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{e^{-i(x-y)t}}{-i(x-y)t} - \frac{1}{-i(x-y)t} = \frac{i(e^{-i(x-y)t}-1)}{(x-y)t}$.

en donde la última igualdad es consecuencia nuevamente del Teorema de Fubini. La integral

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x) \tag{4.8}$$

puede calcularse de la siguiente manera: pensando en y como un elemento fijo queremos integrar la función $x \mapsto \chi_{\{y\}}(x)$, notemos que esta función sólo toma los valores 0 o 1, por lo que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x) &= 0 \cdot \mu(\chi_{\{y\}}^{-1}[0]) + 1 \cdot \mu(\chi_{\{y\}}^{-1}[1]) \\ &= 0 \cdot \mu(\mathbb{R} - \{y\}) + 1 \cdot \mu(\{y\}) \\ &= \mu(\{y\}).\end{aligned} \tag{4.9}$$

La expresión anterior es válida para cualquier $y \in \mathbb{R}$ por lo que la integral en (4.8) **no** será cero sólo para los puntos discretos de μ, es decir, sólo para aquellos $y \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{\lambda\}) \neq 0\}$. Entonces podemos escribir:

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x) = \begin{cases} \mu(\{y\}) & \text{si} \quad y \in \Lambda \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \Lambda\,. \end{cases}$$

Como lo mencionamos al inicio de la demostración, dado que μ es una medida de Borel finita, $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto contable, de esta manera podemos reescribir la igualdad anterior como

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\}) \cdot \chi_{\{\lambda_k\}}(y), \quad \text{para cada} \quad y \in \mathbb{R} \tag{4.10}$$

que sustituyendo en (4.7) y utilizando el Teorema de convergencia monótona de Lebesgue (teorema B.10) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\, ds &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{y\}}(x)\, d\mu(x) \Big)\, d\mu(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\}) \cdot \chi_{\{\lambda_k\}}(y) \Big)\, d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{\lambda_k\}) \cdot \chi_{\{\lambda_k\}}(y)\ d\mu(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{\lambda_k\}) \cdot \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{\lambda_k\}}(y)\ d\mu(y).\end{aligned} \tag{4.11}$$

De manera similar a (4.9) podemos afirmar que

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{\lambda_k\}}(y)\, d\mu(y) = \mu(\{\lambda_k\})$$

y así, de (4.11) concluímos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}(s)|^2\,ds &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{\lambda_k\})\int_{\mathbb{R}}\chi_{\{\lambda_k\}}(y)\,d\mu(y)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{\lambda_k\})\cdot\mu(\{\lambda_k\})\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu(\{\lambda_k\})^2,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

□

Proposición 4.2. *Sea T un operador autoadjunto. Para cualquier $\psi \in \mathfrak{H}$, el límite*

$$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |\langle\psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2\,ds$$

existe. Además

$$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad \psi\in\mathfrak{H}_c(T).$$

Demostración. Sea $\psi \in \mathfrak{H}$, sabemos del Capítulo 2 que todas las medidas espectrales μ_ψ son de Borel y además finitas, entonces, si denotamos con $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu_\psi(\{\lambda\}) \neq 0\}$ al conjunto de los puntos discretos de la medida μ_ψ, el hecho que el límite

$$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t)$$

exista para cualquier $\psi \in \mathfrak{H}$ es consecuencia directa del Teorema de Wiener pues por las igualdades en (3.20)

$$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}_\psi(s)|^2\,ds < \infty.$$

La segunda parte de la proposición también es consecuencia del Teorema de Wiener ya que al tener las igualdades

$$\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t |\hat{\mu}_\psi(s)|^2\,ds = \sum_{k=1}^{\infty}\mu_\psi(\{\lambda_k\})^2$$

(donde $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ es el conjunto de puntos discretos de μ_ψ), tenemos claramente que $\lim_{t\to\infty}\langle p_\psi\rangle(t) = 0$ si y sólo si $\mu_\psi(\{\lambda\}) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ si y sólo si μ_ψ es una medida contínua si y sólo si $\psi \in \mathfrak{H}_c(T)$ (teorema 2.3).

□

4.1.2. Convergencia de operadores autoadjuntos

Esta sección tiene como finalidad introducir algunos conceptos relativos a la convergencia de operadores autoadjuntos, especialmente cuando se trata de operadores no acotados. Recordemos que para operadores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tenemos tres tipos de convergencia, es decir, si T_n y T denotan operadores acotados actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$, entonces:

I. T_n **converge débilmente** a T si $\langle\varphi, T_n\psi\rangle \to \langle\varphi, T\psi\rangle$ para cualesquiera $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$, y lo denotamos como $T_n \xrightarrow{w} T$.

II. T_n **converge fuertemente** a T si $T_n\psi \to T\psi$ para toda $\psi \in \mathfrak{H}$, lo denotamos como $T_n \xrightarrow{s} T$.

III. T_n **converge en norma** o **uniformemente** a T si $T_n \to T$ en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Denotamos este hecho simplemente como $T_n \to T$.

Un primer intento para la definición de convergencia de operadores autoadjuntos no necesariamente acotados sería la adaptación de las primeras dos definiciones arriba enlistadas, pero esto no es tan sencillo pues la simple adaptación de la definición $T_n \xrightarrow{s} T$ sólamente tendría sentido para $\psi \in \cap_n \mathfrak{D}(T_n)$ que podría consistir únicamente del vector cero. En este caso, la manera usual de tratar el concepto de convergencia es llevarlo al terreno de sus correspondientes resolventes o grupos de evolución en un sentido que aclararemos a continuación.

Recordemos que si T es un operador autoadjunto, entonces por el teorema 1.41 se tiene que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \rho(T)$, por lo que $R_z(T) := (T - z\mathbb{I})^{-1}$ es un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, además, por la demostración del teorema 3.4 sabemos también que e^{-itT} es un operador en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ para cada $t \in \mathbb{R}$, así, definiremos la convergencia de operadores autoadjuntos en función de la convergencia de sus respectivos resolventes o grupos de evolución que por lo dicho arriba, son operadores en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Con estas consideraciones introducimos las siguientes definiciones:

Definición 4.3. *Sean $\{T_n\}_{n\geq 1}$ y T operadores autoadjuntos actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Decimos que*

I. T_n **converge fuertemente** *a T en el* **sentido de sus resolventes** *(SR) si $R_i(T_n) \xrightarrow{s} R_i(T)$, en este caso escribimos $T_n \xrightarrow{SR} T$.*

II. T_n **converge fuertemente** *a T en el* **sentido dinámico** *(SD) si , para cada $t \in \mathbb{R}$, $e^{-itT_n} \xrightarrow{s} e^{-itT}$ y lo denotamos por $T_n \xrightarrow{SD} T$.*

De manera análoga a lo anterior, podemos definir los conceptos de **convergencia débil** y **en norma** en el sentido de sus resolventes y en el sentido dinámico. A continuación enunciamos (sin prueba) algunas propiedades importantes que relacionan los conceptos introducidos en la definición 4.3 y que necesitamos para demostrar el teorema principal de este capítulo, el lector interesado puede consultar las demostraciones en el capítulo 10 de [dO09] o en el capítulo 8 de [RS80].

Proposición 4.4. *Sean $\{T_n\}_{n\geq 1}$ y T operadores autoadjuntos actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$. Entonces*

$$T_n \xrightarrow{SR} T \quad \textit{si y sólo si} \quad T_n \xrightarrow{SD} T.$$

Proposición 4.5. *Sean $\{T_n\}_{n\geq 1}$ y T como en las hipótesis de la proposición anterior. Entonces $T_n \xrightarrow{SR} T$ si y sólo si $f(T_n) \xrightarrow{s} f(T)$ para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua y acotada.*

4.2. El Teorema Wonderland

En esta sección enunciamos y demostramos el Teorema Wonderland que ya se introdujo al inicio del capítulo, la prueba está basada fundamentalmente en las proposiciones 4.8 y 4.10, por lo que la demostración de éstas últimas será nuestro primer objetivo. Cabe señalar que la demostración de la proposición 4.8 no es la misma que aparece en el artículo original [Sim95] de B. Simon, por el contrario, desarrollamos con todo detalle un comentario hecho por S. De Bièvre y G. Forni en [BF98] donde se propone utilizar el Teorema de Wiener (teorema 4.1) para la demostración; ya en el año 2009 C. R. de Oliveira en su libro [dO09] retomó la demostración propuesta en [BF98] pero consideramos que omite nuevamente todos los detalles involucrados en la prueba. Antes de comenzar con la demostración, introducimos las siguientes definiciones:

Definición 4.6. *Un espacio métrico (X, d) de operadores autoadjuntos (no necesariamente acotados) actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$ separable y dimensionalmente infinito, será* **regular** *si:*

I. *(X, d) es completo.*

II. *si $T_n \to T$ con la métrica d, entonces $T_n \xrightarrow{SR} T$. Es decir, convergencia con la métrica d implica convergencia fuerte en el sentido de sus resolventes.*

Definición 4.7. *Sea (X, d) un espacio métrico, diremos que un conjunto $D \subset X$ es G_δ si existe una familia contable de conjuntos abiertos $\{A_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ tales que*

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Probaremos a continuación la primera de las dos proposiciones (4.8 y 4.10) en las cuales está basada la demostración de nuestro teorema principal, supondremos en ambas proposiciones que el espacio (X, d) es un espacio regular. Resultados de las secciones pasadas serán utilizados.

Proposición 4.8. *El conjunto $Y := \{T \in X : \sigma_p(T) = \emptyset\}$ es G_δ en X.*

Demostración. Si T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$, para cada $\psi \in \mathfrak{H}$ el promedio de la probabilidad de retorno en el tiempo t es [6]

$$\langle p_\psi^T \rangle(t) = \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT}\psi \rangle|^2 \, ds.$$

Sean $\psi \in \mathfrak{H}$ y $t > 0$ **elementos fijos**. Lo primero que haremos es demostrar que la función con dominio X y codominio $\mathbb{R}$ dada por

$$T \longmapsto \left\langle p_\psi^T \right\rangle(t) \tag{4.12}$$

[6] Dado un operador autoadjunto T, en la sección 3.2.1 se denotó al promedio de la probabilidad de retorno al estado ψ en el tiempo t como $\langle p_\psi \rangle(t)$, notemos que en esta notación no se hizo mención explícita al operador T en cuestión ya que por lo general se ha trabajado con un solo operador, de aquí en adelante esto cambiará y en la notación especificaremos el operator T del que estemos hablando, es decir, escribiremos $\langle p_\psi^T \rangle(t)$.

es contínua. Para ello, sea $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores en X tal que $T_n \to T$ para algún $T \in X$, demostraremos que $\langle p_\psi^{T_n}\rangle(t) \to \langle p_\psi^{T}\rangle(t)$, es decir, demostraremos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t |\langle \psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2\, ds.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$|\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2 \leq \|\psi\|^2 \|e^{-isT_n}\psi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \|e^{-isT_n}\|^2 \|\psi\|^2,$$

pero e^{-isT_n} es un operador unitario (teorema 3.4 inciso I) por lo que $\|e^{-isT_n}\| = 1$.[7] Así,

$$|\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2 \leq \|\psi\|^4$$

y por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2 \right| \leq \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot \|\psi\|^4 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \qquad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.13}$$

Por otro lado, ya que $T_n \to T$ y por hipótesis (X, d) es un espacio regular, entonces $T_n \xrightarrow{SR} T$, pero por la proposición 4.4 esto pasa si y sólo si $T_n \xrightarrow{SD} T$, por lo que para cada $s \in \mathbb{R}$:

$$e^{-isT_n} \xrightarrow{s} e^{-isT},$$

en particular

$$e^{-isT_n}\psi \longrightarrow e^{-isT}\psi$$

y como el producto interno es continuo entrada a entrada así como el valor absoluto, obtenemos el límite puntual (para cada $s \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{n\to\infty} |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2 = |\langle \psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2.$$

De lo anterior se sigue inmediatamente que (para cada $s \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{n\to\infty} \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2 = \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2. \tag{4.14}$$

Finalmente, por las afirmaciones en (4.13) y (4.14) podemos utilizar el Teorema de convergencia dominada para obtener

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2\, ds &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2\, ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\,t]}(s)\cdot |\langle \psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2\, ds \\
&= \int_0^t |\langle \psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2\, ds
\end{aligned}$$

[7] Si $A : \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ es un operador unitario, entonces

$$\|A\| := \sup_{\xi\neq 0} \frac{\|A\xi\|}{\|\xi\|} = \sup_{\xi\neq 0} 1 = 1$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t |\langle\psi, e^{-isT_n}\psi\rangle|^2\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t |\langle\psi, e^{-isT}\psi\rangle|^2\, ds.$$

Así, hemos demostrado que si $T_n \to T$ entonces $\langle p_\psi^{T_n}\rangle(t) \to \langle p_\psi^{T}\rangle(t)$, por lo que la función en (4.12) es contínua.

Como la imagen inversa de un conjunto abierto en el codominio es nuevamente un conjunto abierto en el dominio si la función es contínua, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\left\{ T \in X :\ \langle p_\psi^T\rangle(t) < \frac{1}{n} \right\} \tag{4.15}$$

es abierto en X pues es la imagen inversa del conjunto $(-\infty, \frac{1}{n})$ bajo la función (4.12).

Ahora bien, sea $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ una base ortonormal del espacio $\mathfrak{H}$, demostraremos que

$$\sigma_p(T) = \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{t\to\infty} \langle p_{\psi_j}^T\rangle(t) = 0 \quad \text{para toda} \ \ j \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

$\Rightarrow$] Supongamos que $\sigma_p(T) = \emptyset$, por la observación hecha después de la definición 2.15 sabemos que $\mathfrak{H}_p(T) = \{0\}$ y por lo tanto

$$\mathfrak{H}_c(T) := \mathfrak{H}_p(T)^\perp = \{0\}^\perp = \mathfrak{H}.$$

Así, $\psi_j \in \mathfrak{H}_c(T)$ para cada ψ_j, por lo que utilizando el regreso de la proposición 4.2 se tiene que

$$\lim_{t\to\infty} \langle p_{\psi_j}^T\rangle(t) = 0 \quad \text{para cada} \ \ \psi_j.$$

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $\lim_{t\to\infty} \langle p_{\psi_j}^T\rangle(t) = 0$ para cada ψ_j, por la implicación de ida de la proposición 4.2 tenemos que $\psi_j \in \mathfrak{H}_c(T)$ para toda $j \in \mathbb{N}$, como $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ es base ortonormal de $\mathfrak{H}$ y $\mathfrak{H}_c(T)$ es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$, automáticamente tenemos que $\mathfrak{H}_c(T) = \mathfrak{H}$ y $\mathfrak{H}_p(T) = \{0\}$. Así, por definición 2.4:

$$\sigma_p(T) := \emptyset,$$

que es lo que queríamos demostrar.

Con todo esto en mano, probaremos finalmente que $Y := \{T \in X : \sigma_p(T) = \emptyset\}$ es G_δ en X. Hemos demostrado en (4.15) que para $\psi \in \mathfrak{H}$, $t > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ elementos fijos, el conjunto

$$\left\{ T \in X :\ \langle p_\psi^T\rangle(t) < \frac{1}{n} \right\}$$

es abierto en X, en particular, para cada $\psi_j \in \{\psi_j\}_{j=1}^\infty$ y $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$\bigcup_{t\in\mathbb{N}} \left\{ T \in X :\ \langle p_{\psi_j}^T\rangle(t) < \frac{1}{n} \right\}$$

es un conjunto abierto de X pues es la unión de conjuntos abiertos. Probaremos que

$$Y = \bigcap_{j,n\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_j} \rangle(t) < \frac{1}{n} \Big\}, \tag{4.17}$$

es decir, Y es la intersección contable de conjuntos abiertos de X (Y es G_δ en X).

$\subseteq$] Sea $T \in Y$, por definición $\sigma_p(T) = \emptyset$. Sean $j_0, n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrarios, queremos demostrar que

$$T \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) < \frac{1}{n_0} \Big\}.$$

Utilizando (4.16) se tiene que $\lim_{t\to\infty} \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) = 0$. Como[8] $\langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) > 0$ para cada $t > 0$, la afirmación anterior implica que existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda $t \geq t_0$

$$0 < \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) < \frac{1}{n_0},$$

así, en particular

$$T \in \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t_0) < \frac{1}{n_0} \Big\}$$

y por lo tanto

$$T \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) < \frac{1}{n_0} \Big\}.$$

$\supseteq$] Tomemos T en el conjunto del lado derecho de (4.17), queremos demostrar que $T \in Y$, es decir, probaremos que $\sigma_p(T) = \emptyset$. Utilizando (4.16) es suficiente demostrar que

$$\lim_{t\to\infty} \langle p^T_{\psi_j} \rangle(t) = 0 \quad \text{para cada} \quad \psi_j.$$

Sea ψ_{j_0} un elemento fijo de la base ortonormal, por hipótesis

$$T \in \bigcap_{j,n\in\mathbb{N}} \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_j} \rangle(t) < \frac{1}{n} \Big\},$$

lo que quiere decir que para cada $j \in \mathbb{N}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$T \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_j} \rangle(t) < \frac{1}{n} \Big\},$$

[8]Sea $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ una base ortonormal de $\mathfrak{H}$. Si $\psi_j \in \{\psi_j\}_{j\geq 1}$ entonces $0 < \langle p^T_{\psi_j} \rangle(t)$ para cada $t > 0$, es decir,

$$0 < \frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_j, e^{-isT} \psi_j \rangle|^2 \, ds.$$

Demostración. Recordemos que $s \mapsto e^{-isT}$ es un grupo de evolución fuertemente continuo por lo que $s \mapsto |\langle \psi_j, e^{-isT} \psi_j \rangle|^2$ es una función contínua. Además, dado que $e^{-i0T} = \mathbb{I}$, se tiene que

$$|\langle \psi_j, e^{-i0T} \psi_j \rangle|^2 = |\langle \psi_j, \mathbb{I} \psi_j \rangle|^2 = |\langle \psi_j \psi_j \rangle|^2 > 0$$

pues $\psi_j \neq 0$. Así, la función $s \mapsto |\langle \psi_j, e^{-isT} \psi_j \rangle|^2$ es contínua y positiva en $s = 0$, por lo que $\frac{1}{t} \int_0^t |\langle \psi_j, e^{-isT} \psi_j \rangle|^2 \, ds > 0$ para cada $t > 0$.

en particular, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$T \in \bigcup_{t\in\mathbb{N}} \Big\{ T \in X : \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) < \frac{1}{n} \Big\},$$

ya que $\langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) > 0$ para cada $t > 0$, la expresión de arriba implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t_n) < \frac{1}{n}. \tag{4.18}$$

Por la proposición 4.2 el límite $\lim_{t\to\infty} \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t)$ existe y por (4.18) podemos construir una sucesión estrictamente creciente $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ con la propiedad de que

$$\lim_{k\to\infty} \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(x_k) = 0,$$

es decir, estamos encontrando una subsucesión que converge a cero, como el límite original existe, éste tiene que ser cero también, es decir

$$\lim_{t\to\infty} \langle p^T_{\psi_{j_0}} \rangle(t) = 0,$$

que es lo que queríamos probar.

Por lo tanto se tiene la igualdad en (4.17) y Y es un conjunto G_δ en X.

□

A continuación probaremos un lema que utilizaremos para demostrar la proposición 4.10, el lema caracteriza las medidas de Borel finitas (en $\mathbb{R}$) que son mutuamente singulares con respecto a la medida de Lebesgue.

Lema 4.9. *Sea $\mu \neq 0$ una medida de Borel finita y ℓ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, entonces μ y ℓ son mutuamente singulares ($\mu \perp \ell$) si y sólo si existe una sucesión de funciones contínuas $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$, $n \geq 1$, tal que*

I. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\ell < \frac{1}{2^n}$ *y*

II. $\displaystyle\mu(\mathbb{R}) - \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu < \frac{1}{2^n}$.

Demostración. ⇒] Supongamos que $\mu \perp \ell$, es decir, supongamos que existe un conjunto de Borel $C \subset \mathbb{R}$ tal que $\ell(C) = 0$ y $\mu(\mathbb{R} \setminus C) = 0$. Ya que μ y ℓ son regulares [9], se tiene

$$\ell(C) = \inf \{ \ell(U) : U \subset \mathbb{R} \text{ es abierto}, C \subset U \} \tag{4.19}$$

$$\mu(C) = \sup \{ \mu(K) : K \subset \mathbb{R} \text{ es compacto}, K \subset C \}. \tag{4.20}$$

[9]Como puede consultarse en [Rud87, pág.48] al ser μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ entonces μ es regular, además, ya que ℓ es la medida de Lebesgue, ℓ es regular.

Como $\ell(C) = 0$, utilizando (4.19) podemos afirmar que existe una sucesión de conjuntos abiertos $\{O_n\}_{n\geq 1}$ tal que

$$C \subset O_n \quad y \quad \ell(O_n) < \frac{1}{2^n}, \tag{4.21}$$

además, de (4.20) existe una sucesión de compactos $\{K_n\}_{n\geq 1}$ tales que cumplen

$$K_n \subset C \quad y \quad \mu(C) - \frac{1}{2^n} < \mu(K_n),$$

por lo que utilizando el hecho que $\mu(\mathbb{R} \setminus C) = 0$ y μ es finita se tiene

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{R} \setminus K_n) &= \mu\Big((C \setminus K_n) \cup (\mathbb{R} \setminus C)\Big) \\
&= \mu(C \setminus K_n) + \mu(\mathbb{R} \setminus C) \\
&= \mu(C \setminus K_n) \\
&= \mu(C) - \mu(K_n) \\
&< \frac{1}{2^n}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Así, utilizando el **Lema de Uryshon**[10] existe una sucesión de funciones contínuas $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ que 'separa' a los cerrados K_n y $\mathbb{R} \setminus O_n$, es decir, $f_n(x) = 1$ para toda $x \in K_n$ y $f_n(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R} \setminus O_n$. Entonces por (4.21)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\ell &= \int_{\mathbb{R}\setminus O_n} f_n \, d\ell + \int_{O_n} f_n \, d\ell \\
&= \int_{O_n} f_n \, d\ell \\
&\leq \ell(O_n) \\
&< \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

lo que demuestra el inciso I. Para demostrar II, notemos que $(1 - f_n)(x) = 0$ para toda $x \in K_n$, por lo que utilizando (4.22) se tiene

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{R}) - \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu &= \int_{\mathbb{R}} 1 \, d\mu - \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 - f_n) \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus K_n} (1 - f_n) \, d\mu - \int_{K_n} (1 - f_n) \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus K_n} (1 - f_n) \, d\mu \\
&\leq \mu(\mathbb{R} \setminus K_n) \\
&< \frac{1}{2^n},
\end{aligned}$$

[10]**Lema de Uryshon**. Si A y B son conjuntos cerrados y disjuntos de un espacio normal X, entonces existe una función contínua $f : X \to [0,1]$ tal que $\forall a \in A$, $f(a) = 0$ y $\forall b \in B$, $f(b) = 1$.

que es lo que queríamos demostrar.

$\Leftarrow$] Ahora supongamos que existe una sucesión de funciones contínuas $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$ que cumplen I y II como en las hipótesis, queremos demostrar que $\mu \perp \ell$.

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$, $C_n := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < f_n(x)\}$, entonces

$$\ell(C_n) = \int_{C_n} 1\, d\ell = 2\int_{C_n} \frac{1}{2}\, d\ell \leq 2\int_{C_n} f_n\, d\ell \leq 2\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\ell \overset{\text{I.}}{<} 2\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = \frac{1}{2^{n-1}} \tag{4.23}$$

y

$$\begin{aligned}
\mu(\mathbb{R}\setminus C_n) &= \mu(\mathbb{R}\setminus C_n) - \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} f_n\, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} f_n\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} 1\, d\mu - \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} f_n\, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} f_n\, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} (1-f_n)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} f_n\, d\mu \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} (1-f_n)\, d\mu + \int_{\mathbb{R}\setminus C_n} \frac{1}{2}\, d\mu \\
&= \mu(\mathbb{R}) - \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu + \frac{\mu(\mathbb{R}\setminus C_n)}{2} \\
&\overset{\text{II.}}{<} \frac{1}{2^n} + \frac{\mu(\mathbb{R}\setminus C_n)}{2},
\end{aligned}$$

por lo que $\frac{\mu(\mathbb{R}\setminus C_n)}{2} < \frac{1}{2^n}$ y por tanto

$$\mu(\mathbb{R}\setminus C_n) < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{4.24}$$

Ahora bien, definamos

$$C := \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} C_n,$$

demostraremos que $\ell(C) = 0$ y $\mu(\mathbb{R}\setminus C) = 0$. Como

$$\mathbb{R}\setminus C = \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} (\mathbb{R}\setminus C_n)$$

y $\{\cup_{n\geq m} C_n\}_{m=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de conjuntos medibles que por (4.23) cumple

$$\ell(\cup_{n\geq 1} C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} < \infty,$$

entonces por la proposición B.2 y las igualdades en (4.23) y (4.24) se tiene

$$\ell(C) = \ell\Big(\bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} C_n\Big) = \lim_{m\to\infty} \ell(\bigcup_{n\geq m} C_n) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq m}^{\infty} \ell(C_n) \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{n\geq m}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$$

y también

$$\begin{aligned}\mu(\mathbb{R}\setminus C) &= \mu\Big(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq m}(\mathbb{R}\setminus C_n)\Big)\\ &= \lim_{m\to\infty}\mu\Big(\bigcap_{n\geq m}(\mathbb{R}\setminus C_n)\Big)\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\mu(\mathbb{R}\setminus C_m)\\ &\leq \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2^{m-1}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Así, $\ell(C) = 0$ y $\mu(\mathbb{R}\setminus C) = 0$ (además $C \neq \emptyset$ pues $\mu \neq 0$), es decir, $\mu \perp \ell$.

□

Proposición 4.10. *El conjunto* $W := \{T \in X : \sigma_{ac}(T) = \emptyset\}$ *es* G_δ *en* X.

Demostración. Definamos para cada $\psi \in \mathfrak{H}$ el conjunto

$$Q(\psi) := \{T \in X : \mu_\psi^T \perp \ell\},$$

si $\{\psi_j\}_{j\geq 1}$ es una base ortonormal de $\mathfrak{H}$ lo primero que demostraremos será que

$$W = \bigcap_{j\geq 1} Q(\psi_j). \tag{4.25}$$

$\supseteq]$ Si $T \in \cap_j Q(\psi_j)$ entonces $\mu_{\psi_j}^T \perp \ell$ para cada $j \geq 1$ por lo que $\psi_j \in \mathfrak{H}_s(T)$, como $\mathfrak{H}_s(T)$ es un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ se tiene que $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_s(T)$ y por el teorema 2.10

$$\mathfrak{H}_{ac}(T) = \mathfrak{H}_s(T)^\perp = \mathfrak{H}^\perp = \{0\}.$$

Así, $T_{ac} : \{0\} \to \{0\}$ y como consecuencia

$$\sigma_{ac}(T) := \sigma(T_{ac}) = \emptyset,$$

luego, $T \in W$.

$\subseteq]$ Supongamos que $T \in W$, entonces $\sigma_{ac}(T) = \emptyset$ y por definición $\sigma(T_{ac}) = \emptyset$, ya que $T_{ac} := T|_{\mathfrak{H}_{ac}(T)}$ es un operador autoadjunto y por tanto tiene espectro no vacío (teoremas A.4 y 1.41) necesariamente $\mathfrak{H}_{ac}(T) = \{0\}$, luego

$$\mathfrak{H}_s(T) = \mathfrak{H}_{ac}(T)^\perp = \{0\}^\perp = \mathfrak{H}.$$

Así, $\{\psi_j\}_{j\geq 1} \subset \mathfrak{H}_s(T)$ por lo que $\mu_{\psi_j}^T \perp \ell$ para cada $j \geq 1$ y entonces

$$T \in \bigcap_{j\geq 1} Q(\psi_j).$$

Ahora bien, para cada función contínua $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ podemos definir el conjunto

$$\mathcal{U}_n(f,\psi) := \Big\{T \in X : \langle\psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi\rangle = \mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mu_\psi^T < \frac{1}{2^n}\Big\},$$

afirmamos que para cada $\psi \in \mathfrak{H}$

$$Q(\psi) = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{f\in D_n} \mathcal{U}_n(f,\psi) \tag{4.26}$$

donde D_n es el conjunto de funciones contínuas $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ tales que $\int_{\mathbb{R}} f\, d\ell < \frac{1}{2^n}$. Para demostrarlo es suficiente utilizar el lema 4.9 pues $T \in Q(\psi)$ si y sólo si $\mu_\psi^T \perp \ell$ si y sólo si existe una sucesión de funciones contínuas $f_n : \mathbb{R} \to [0,1]$, $n \geq 1$, tales que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\, d\ell < \frac{1}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \mu_\psi^T(\mathbb{R}) - \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\mu_\psi^T < \frac{1}{2^n},$$

es decir, si y sólo si para cada $n \geq 1$ existe una función $f_n \in D_n$ tal que $T \in \mathcal{U}_n(f_n,\psi)$, si y sólo si

$$T \in \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{f\in D_n} \mathcal{U}_n(f,\psi).$$

De las igualdades en (4.25) y (4.26) podemos escribir finalmente la expresión

$$W = \bigcap_{j\geq 1} \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{f\in D_n} \mathcal{U}_n(f,\psi_j), \tag{4.27}$$

si demostramos que para $\psi \in \mathfrak{H}$ el conjunto $\mathcal{U}_n(f,\psi)$ es abierto para cada $f \in D_n$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto

$$\bigcup_{f\in D_n} \mathcal{U}_n(f,\psi_j)$$

será también un conjunto abierto para cada $j, n \geq 1$ pues es la unión arbitraria de conjuntos abiertos, de esta manera la expresión en (4.27) probará que W es la intersección contable de conjuntos abiertos, es decir, un conjunto G_δ. Demostremos pues que si $\psi \in \mathfrak{H}$, $\mathcal{U}_n(f,\psi)$ es abierto en X para cada $f \in D_n$.

Demostraremos equivalentemente que el complemento de $\mathcal{U}_n(f,\psi)$

$$\mathcal{U}_n(f,\psi)^c = \left\{T \in X : \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi\rangle \geq \frac{1}{2^n}\right\},$$

es un conjunto cerrado en X para toda $f \in D_n$. Sea $f \in D_n$ (entonces f es contínua y acotada pues $f[\mathbb{R}] \subseteq [0,1]$) y tomemos $\{T_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de operadores en $\mathcal{U}_n(f,\psi)^c$ tal que $T_k \to T$ para algún $T \in X$, demostraremos que $T \in \mathcal{U}_n(f,\psi)^c$. Ya que (X,d) es un espacio regular entonces $T_k \xrightarrow{SR} T$ y por la proposición 4.5 se tiene $f(T_k) \xrightarrow{s} f(T)$, en particular para $\psi \in \mathfrak{H}$

$$f(T_k)\psi \to f(T)\psi.$$

Como el producto interno es continuo entrada a entrada, afirmamos que

$$\lim_{k\to\infty} \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T_k))\psi\rangle = \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi\rangle \tag{4.28}$$

y entonces

$$\langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi \rangle \geq \frac{1}{2^n} \tag{4.29}$$

ya que si $\langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi \rangle < \frac{1}{2^n}$ se tendría que $0 < \frac{1}{2^n} - \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi \rangle$ por lo que de (4.28) existiría $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k \geq N$

$$|\langle \psi, (\mathbb{I} - f(T_k))\psi \rangle - \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi \rangle| < \frac{1}{2^n} - \langle \psi, (\mathbb{I} - f(T))\psi \rangle$$

y así

$$\langle \psi, (\mathbb{I} - f(T_k))\psi \rangle < \frac{1}{2^n},$$

lo que es una contradicción pues $T_k \in \mathcal{U}_n(f, \psi)^c$ para toda $k \geq 1$. Así, (4.29) se cumple y

$$T \in \mathcal{U}_n(f, \psi)^c,$$

luego, $\mathcal{U}_n(f, \psi)^c$ es cerrado, por tanto, $\mathcal{U}_n(f, \psi)$ es un conjunto abierto de X y concluímos la demostración.

□

Recordemos una definición que dimos al inicio del capítulo: dado un espacio métrico (X, d), diremos que un conjunto $B \subseteq X$ es **genérico** si es denso en X ($\overline{B} = X$) y además es un conjunto G_δ. Con esta definición en mente, enunciamos a continuación el Teorema 'Wonderland', la prueba está basada en las proposiciones que acabamos de demostrar.

Teorema 4.11 (Wonderland). *Sea (X, d) un espacio regular. Si ambos conjuntos*

- $C_p = \{T \in X : \sigma_{sc}(T) = \emptyset = \sigma_{ac}(T)\}$, *y*
- $C_{ac} = \{T \in X : \sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{sc}(T)\}$

son densos en X, entonces el conjunto $C_{sc} = \{T \in X : \sigma_p(T) = \emptyset = \sigma_{ac}(T)\}$ es genérico en X. Es decir, el conjunto C_{sc} de operadores en X con espectro puramente singular continuo es genérico.

Demostración. Usando la notación de las proposiciones 4.8 y 4.10, observemos que si $T \in C_p$ en particular $\sigma_{ac}(T) = \emptyset$ y entonces $T \in W$, así $C_p \subseteq W$. Como por hipótesis C_p es denso en X, tenemos que W también lo es, además, sabemos por la proposición 4.10 que W es un conjunto G_δ, luego, W es un conjunto genérico. Similarmente tenemos que $C_{ac} \subseteq Y$, por lo que Y es un subconjunto denso de X y como por la proposición 4.8 Y es G_δ, entonces Y también es genérico en X.

Claramente se tiene que

$$C_{sc} = Y \cap W, \tag{4.30}$$

por lo que si demostramos que $Y \cap W$ es un conjunto genérico en X habremos terminado la demostración. Probemos en general que si A y B son conjuntos genéricos de un espacio métrico completo, también lo es $A \cap B$.

Supongamos pues que A y B son conjuntos genéricos, como A y B son conjuntos G_δ se tiene que

$$A = \bigcap_{n\geq 1} A_n \quad \text{y} \quad B = \bigcap_{n\geq 1} B_n,$$

donde $\{A_n\}_{n\geq 1}$ y $\{B_n\}_{n\geq 1}$ son familias de conjuntos abiertos. Por otro lado, ya que tanto A como B son densos, se tiene que A_n y B_n también son conjuntos densos para cada $n \in \mathbb{N}$ pues

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n \subseteq A_n \quad \text{y} \quad \bigcap_{n\geq 1} B_n \subseteq B_n,$$

así, para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n y B_n son conjuntos abiertos y densos en el espacio métrico. Utilizando el Teorema de Baire [11] concluímos que

$$A \cap B = \Big(\bigcap_{n\geq 1} A_n\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{n\geq 1} B_n\Big)$$

es un conjunto denso, pues es la intersección contable de conjuntos abiertos y densos. Es claro también que si A y B son conjuntos G_δ, $A \cap B$ es también un conjunto G_δ pues sigue siendo una intersección contable de conjuntos abiertos, luego, $A \cap B$ es un conjunto G_δ denso, es decir, un conjunto **genérico** en el espacio métrico.

De esta manera, como (X, d) es un espacio regular, por definición es un espacio métrico completo, así, de la expresión en (4.30) y por lo argumentado arriba, concluímos que C_{sc} es un conjunto genérico en X.

$\square$

En el artículo original de Barry Simon [Sim95] podemos encontrar numerosas e interesantes aplicaciones del Teorema Wonderland, recomendamos al lector consultar este artículo así como los ejemplos de la sección 12.6 del libro [dO09]. A manera de comentario, discutiremos brevemente uno de los ejemplos que puede consultarse con todo detalle en las referencias arriba citadas.

Sea $\mathfrak{H}$ un espacio de Hilbert separable y denotemos por X_{01} al conjunto

$$X_{01} := \{T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H}) : T \text{ es autoadjunto y } \sigma(T) = [0,1]\},$$

utilizando el Teorema Wonderland se puede probar que el subconjunto de todos los operadores con espectro puramente singular continuo es genérico en X_{01}. Para utilizar el Teorema Wonderland tenemos que asegurar que el conjunto X_{01} es un espacio regular, debido a que $X_{01} \subset \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ es natural definir la métrica en X_{01} de la siguiente manera:

$$d(T, S) := \|T - S\| \quad \forall\, T, S \in X_{01}.$$

[11] **Teorema de Baire**. Si (X, d) es un espacio métrico completo entonces para cada colección contable $\{U_n\}_{n\geq 1}$ de conjuntos abiertos y densos, su intersección

$$\bigcap_{n\geq 1} U_n$$

es también un conjunto denso de X.

Utilizando la proposición 4.12 (cuya demostración puede consultarse en [dO09, págs. 261-265]) es fácil concluír que X_{01} es un conjunto cerrado de $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ y por lo tanto X_{01} es completo con respecto a la métrica d, además por el inciso I es evidente que la convergencia con la métrica d implica convergencia fuerte en el sentido de sus resolventes, es decir, (X_{01}, d) es un espacio **regular**.

Proposición 4.12. *Sean $\{T_n\}_{n\geq 1}$, T operadores autoadjuntos.*

I. *Si T y $T_n \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $T_n \to T$ en $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ si y sólo si T_n converge en norma a T en el sentido de sus resolventes (consultar sección 4.1.2).*

II. *Supongamos que T_n converge en norma a T en el sentido de sus resolventes, si $t_0 \in \sigma(T)$ entonces existe una sucesión $t_n \in \sigma(T_n)$ tal que $t_n \to t_0$.*

Se puede probar así (véase por ejemplo [Sim95] o [dO09]) que el conjunto C_p de los operadores en X_{01} con espectro puramente puntual y el conjunto C_{ac} de los operadores en X_{01} con espectro puramente absolutamente continuo son densos en X_{01}, luego, el Teorema Wonderland nos afirma entonces que el conjunto C_{sc} de todos los operadores en X_{01} con espectro **puramente singular continuo** es un conjunto genérico en X_{01}.

4.3. Notas

Sección 4.1

La demostración del Teorema de Wiener presentada en esta sección se debe a la detallada prueba hecha por D. B. Pearson en su libro [Pea88]. Las proposiciones sobre convergencia de operadores autoadjuntos de la subsección 4.1.2 fueron tomadas de [dO09] y ahí mismo pueden consultarse las demostraciones.

APÉNDICE A

Subespacios Reductores

Introducimos a continuación el concepto de **subespacio reductor** de un operador T y demostramos algunas propiedades relativas a ellos que utilizamos para demostrar que los subespacios $\mathfrak{H}_p(T)$, $\mathfrak{H}_c(T)$, $\mathfrak{H}_s(T)$, $\mathfrak{H}_{ac}(T)$ y $\mathfrak{H}_{sc}(T)$ definidos en el Capítulo 2 son además subespacios reductores del operador T.

Definición A.1. *Sea T un operador lineal actuando en un espacio de Hilbert $\mathfrak{H}$.*

Si E es un subconjunto lineal cerrado del espacio $\mathfrak{H}$ y P_E es la proyección ortogonal sobre E, el subespacio E se dice **invariante bajo** *T o T-***invariante** *si*

$$T[E \cap \mathfrak{D}(T)] \subseteq E.$$

Si E y $E^{\perp}$ son T-invariantes y además

$$P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T),$$

entonces E es llamado un **subespacio reductor** *de T, también diremos que E* **reduce** *al operador T.*

Proposición A.2. *El subespacio E reduce al operador T si y sólo si $E^{\perp}$ reduce al operador T. Luego, si E es un subespacio reductor de T se tiene*

$$\mathfrak{D}(T) = P_E[\mathfrak{D}(T)] \oplus P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)],$$

o equivalentemente

$$\mathfrak{D}(T) = [E \cap \mathfrak{D}(T)] \oplus [E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T)].$$

Demostración. Para la primera afirmación basta probar que $P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T)$ si y sólo si $P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T)$, pero esto es consecuencia directa del hecho que $\mathbb{I} = P_E + P_{E^{\perp}}$ ya que si, por ejemplo, $P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T)$ entonces

$$P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)] = (\mathbb{I} - P_E)[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T).$$

Ahora bien, supongamos que E es un subespacio reductor de T, por lo dicho arriba $E^{\perp}$ es también un subespacio reductor de T y así

$$P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T) \quad \text{y} \quad P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T), \tag{A.1}$$

debido a esto y al hecho que para todo $\psi \in \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} = E \oplus E^{\perp}$

$$\psi = P_E\psi + P_{E^{\perp}}\psi \tag{A.2}$$

podemos concluír que $\mathfrak{D}(T) = P_E[\mathfrak{D}(T)] + P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)]$, para ver que es suma directa notemos que por (A.1) (y recordando que $\mathrm{Ran}P_E = E$) también se tienen las igualdades $P_E[\mathfrak{D}(T)] = E \cap \mathfrak{D}(T)$ y $P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)] = E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T)$ por lo que $P_E[\mathfrak{D}(T)] \cap P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)] = E \cap E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T) = \{0\}$. Luego,

$$\mathfrak{D}(T) = P_E[\mathfrak{D}(T)] \oplus P_{E^{\perp}}[\mathfrak{D}(T)]$$

y también

$$\mathfrak{D}(T) = [E \cap \mathfrak{D}(T)] \oplus [E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T)].$$

□

Corolario A.3. *Si E es un subespacio reductor de T, las expresiones $T_E := T|_{E\cap\mathfrak{D}(T)}$ y $T_{E^{\perp}} := T|_{E^{\perp}\cap\mathfrak{D}(T)}$, es decir:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(T_E) := E \cap \mathfrak{D}(T), \quad T_E\psi := T\psi \quad \forall\psi \in E \cap \mathfrak{D}(T) \\ \mathfrak{D}(T_{E^{\perp}}) := E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T), \quad T_{E^{\perp}}\psi := T\psi \quad \forall\psi \in E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T), \end{aligned}$$

definen operadores en E y $E^{\perp}$ respectivamente, además

$$T\psi = T_E(P_E\psi) + T_{E^{\perp}}(P_{E^{\perp}}\psi) \qquad \forall\psi \in \mathfrak{D}(T).$$

A esto último lo denotamos como

$$T = T_E \oplus T_{E^{\perp}}.$$

Demostración. Si E es un subespacio reductor del operador T, por el corolario anterior $E^{\perp}$ también es reductor, además, ya que ambos son T-invariantes, los operadores T_E y $T_{E^{\perp}}$ están bien definidos. Sea entonces $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, como escribimos en (A.2) tenemos la descomposición $\psi = P_E\psi + P_{E^{\perp}}\psi$ y por (A.1) $P_E\psi, P_{E^{\perp}}\psi \in \mathfrak{D}(T)$, así

$$T\psi = T(P_E\psi + P_{E^{\perp}}\psi) = TP_E\psi + TP_{E^{\perp}}\psi = T_E(P_E\psi) + T_{E^{\perp}}(P_{E^{\perp}}\psi).$$

□

Hemos dicho hasta el momento que si E es un subespacio reductor de T, las restricciones de T a $E \cap \mathfrak{D}(T)$ y $E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T)$ definen operadores T_E y $T_{E^{\perp}}$ tal que $T = T_E \oplus T_{E^{\perp}}$, el siguiente teorema muestra que si además T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$, T_E y $T_{E^{\perp}}$ son también operadores autoadjuntos actuando en E y $E^{\perp}$ respectivamente.

Teorema A.4. *Sea E un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ y $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ un operador lineal, entonces*

i. *E reduce al operador T si y sólo si $P_E T \subset T P_E$. Si en particular $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, la afirmación es verdadera con la igualdad $P_E T = T P_E$.*

ii. *Si T es autoadjunto y E reduce a T, entonces T_E y $T_{E^\perp}$ son operadores autoadjuntos en E y $E^\perp$ respectivamente.*

Demostración. Demostremos i.

$\Rightarrow$] Supongamos que E reduce a T, demostremos que $P_E T \subset T P_E$. Tenemos que demostrar dos cosas, la primera es que $\mathfrak{D}(P_E T) \subseteq \mathfrak{D}(T P_E)$ y la segunda

$$P_E T\psi = T P_E \psi \qquad \forall \psi \in \mathfrak{D}(P_E T),$$

observemos que

$$\mathfrak{D}(P_E T) = \{\psi \in \mathfrak{D}(T) : T\psi \in \mathfrak{D}(P_E)\} = \{\psi \in \mathfrak{D}(T) : T\psi \in \mathfrak{H}\} = \mathfrak{D}(T),$$

por lo tanto, necesitamos demostrar que $\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T P_E)$, es decir

$$\mathfrak{D}(T) \subseteq \{\psi \in \mathfrak{H} : P_E \psi \in \mathfrak{D}(T)\} \tag{A.3}$$

pero ya que E es un subespacio reductor de T se cumple la contención $P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T)$, luego, si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ entonces $P_E \psi \in \mathfrak{D}(T)$ y por lo tanto se tiene (A.3). Resta demostrar que

$$P_E T\psi = T P_E \psi \qquad \forall \psi \in \mathfrak{D}(P_E T) = \mathfrak{D}(T),$$

sea pues $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, por la proposición A.2

$$P_E T\psi = P_E T(P_E \psi + P_{E^\perp}\psi) = P_E(T P_E \psi + T P_{E^\perp}\psi) = T P_E \psi$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $T P_E \psi \in E$ y $T P_{E^\perp}\psi \in E^\perp$ pues E y $E^\perp$ son T-invariantes.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $P_E T \subset T P_E$, queremos demostrar que E reduce a T. Por hipótesis tenemos que $\mathfrak{D}(P_E T) \subseteq \mathfrak{D}(T P_E)$ pero como argumentamos más arriba $\mathfrak{D}(P_E T) = \mathfrak{D}(T)$, por lo tanto

$$\mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{D}(T P_E),$$

esto quiere decir que si $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, entonces $\psi \in \{\psi \in \mathfrak{H} : P_E \psi \in \mathfrak{D}(T)\}$, equivalentemente escribimos

$$P_E[\mathfrak{D}(T)] \subseteq \mathfrak{D}(T).$$

Falta observar que E y $E^\perp$ son T-invariantes, notemos primero que $P_{E^\perp} T = (\mathbb{I} - P_E) = T - P_E T \subset T - T P_E = T(\mathbb{I} - P_E) = T P_{E^\perp}$, es decir, también se cumple que $P_{E^\perp} T \subset T P_{E^\perp}$. Ahora bien, tomemos $\psi \in E \cap \mathfrak{D}(T)$, ya que $P_E \psi = \psi$ y por hipótesis $P_E T\psi = T P_E \psi \ \ \forall \psi \in \mathfrak{D}(T)$, se cumple

$$T\psi = T P_E \psi = P_E T \psi \in E,$$

es decir, $T[E \cap \mathfrak{D}(T)] \subseteq E$. De manera análoga se demuestra que $E^\perp$ es T-invariante utilizando el hecho que $P_{E^\perp} T \subset T P_{E^\perp}$.

Demostremos ii. Supongamos ahora que T es autoadjunto y que E reduce a T, probaremos que $T_E : \mathfrak{D}(T_E) \subseteq E \to E$ es también un operador autoadjunto en E.

Tenemos que demostrar primero que $\mathfrak{D}(T_E)$ es denso en E, para ello, tomemos $\psi \in E \subset \mathfrak{H}$ y sea $\varepsilon > 0$, ya que T es autoadjunto y por lo tanto $\mathfrak{D}(T)$ es denso en $\mathfrak{H}$, existe $\varphi \in \mathfrak{D}(T)$ tal que $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$, luego

$$\begin{aligned}
\|\psi - \varphi\|^2 &= \|\psi - (P_E\varphi + P_{E^\perp}\varphi)\|^2 \\
&= \|\psi - P_E\varphi - P_{E^\perp}\varphi\|^2 \\
&= \|\psi - P_E\varphi\|^2 - 2\,\mathfrak{Re}\langle \psi - P_E\varphi, P_{E^\perp}\varphi\rangle + \|P_{E^\perp}\varphi\|^2 \\
&= \|\psi - P_E\varphi\|^2 + \|P_{E^\perp}\varphi\|^2 \\
&< \varepsilon^2
\end{aligned}$$

y entonces $\|\psi - P_E\varphi\|^2 < \varepsilon^2$ por lo que

$$\|\psi - P_E\varphi\| < \varepsilon, \tag{A.4}$$

como E reduce a T entonces $P_E\varphi \in \mathfrak{D}(T)$ y claramente $P_E\varphi \in E$, es decir, $P_E\varphi \in \mathfrak{D}(T) \cap E = \mathfrak{D}(T_E)$, luego, la expresión en (A.4) nos dice que $\mathfrak{D}(T_E)$ es denso en E, sea entonces T_E^* el adjunto de T_E como un operador en E [1]. Ya que T_E es la restricción a E del operador autoadjunto T entonces T_E es simétrico (por lo tanto hermitiano) y entonces claramente $T_E \subset T_E^*$, restaría probar que $\mathfrak{D}(T_E^*) \subset \mathfrak{D}(T_E)$. Para ello, sea $\psi \in \mathfrak{D}(T_E^*) \subset E$, como para toda $\zeta \in \mathfrak{D}(T)$ se tiene

$$\begin{aligned}
\langle \psi, T\zeta\rangle &= \langle \psi, T(P_E\zeta + P_{E^\perp}\zeta)\rangle \\
&= \langle \psi, TP_E\zeta + TP_{E^\perp}\zeta\rangle \\
&= \langle \psi, TP_E\zeta\rangle + \langle \psi, TP_{E^\perp}\zeta\rangle \\
&= \langle \psi, TP_E\zeta\rangle \\
&= \langle \psi, T_EP_E\zeta\rangle \\
&= \langle T_E^*\psi, P_E\zeta\rangle \\
&= \langle T_E^*\psi, P_E\zeta\rangle + \langle T_E^*\psi, P_{E^\perp}\zeta\rangle \\
&= \langle T_E^*\psi, P_E\zeta + P_{E^\perp}\zeta\rangle \\
&= \langle T_E^*\psi, \zeta\rangle
\end{aligned}$$

entonces existe $T_E^*\psi \in E$ tal que $\langle \psi, T\zeta\rangle = \langle T_E^*\psi, \zeta\rangle \quad \forall \zeta \in \mathfrak{D}(T)$, por lo tanto $\psi \in \mathfrak{D}(T^*)$. Como T es autoadjunto $\mathfrak{D}(T^*) = \mathfrak{D}(T)$ y entonces

$$\psi \in E \cap \mathfrak{D}(T^*) = E \cap \mathfrak{D}(T) := \mathfrak{D}(T_E),$$

luego $\psi \in \mathfrak{D}(T_E)$ y $\mathfrak{D}(T_E^*) \subset \mathfrak{D}(T_E)$. Como ya teníamos que $T_E \subset T_E^*$ y por lo anterior $\mathfrak{D}(T_E^*) = \mathfrak{D}(T_E)$, concluímos que $T_E = T_E^*$, es decir, T_E es un operador autoadjunto en E. Análogamente se demuestra que $T_{E^\perp}$ es autoadjunto en $E^\perp$. $\square$

---

[1] Recordemos que el **operador adjunto** T^* de un operador lineal densamente definido $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}(T^*) &= \{\psi \in \mathfrak{H} | \exists \tilde{\psi} \in \mathfrak{H} : \langle \psi, T\varphi\rangle = \langle \tilde{\psi}, \varphi\rangle, \forall \varphi \in \mathfrak{D}(T)\} \\
T^*\psi &= \tilde{\psi}.
\end{aligned}$$

Demostraremos a continuación un lema técnico que nos ayudará para demostrar la proposición A.6 cuya finalidad es dar una condición suficiente para que un subespacio E sea un subespacio reductor del operador autoadjunto T. Recordemos que si T es un operador autoadjunto en $\mathfrak{H}$, por el Teorema Espectral T tiene asociada una familia espectral P^T tal que $T = \int_{\mathbb{R}} t\, dP^T$ y para cada $\psi \in \mathfrak{H}$, μ_ψ^T denota la medida espectral de T asociada al vector ψ.

Lema A.5. *Sea $h(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$, T un operador autoadjunto y la proyección ortogonal P_E tal que*

$$P_E \chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T) P_E, \quad \forall\, \Omega \in \mathcal{A}.$$

Entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\geq 1}$ de funciones simples tal que $f_n \to h$ en $\mathrm{L}^2_{\mu_\psi^T}(\mathbb{R})$ para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ y además,

$$P_E f_n(T) = f_n(T) P_E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada j, $-n2^n + 1 \leq j \leq n2^n$, definamos:

$$A_n := (-\infty, -n), \quad B_n := [n, \infty), \quad J_{n,j} := [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}),$$

y sea

$$f_n(t) := -n\chi_{A_n}(t) + \sum_{j=-n2^n+1}^{0} (\frac{j}{2^n})\chi_{J_{n,j}}(t) + \sum_{j=1}^{n2^n} (\frac{j-1}{2^n})\chi_{J_{n,j}}(t) + n\chi_{B_n}(t).$$

Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n es una función simple y claramente $f_n(t) \to h(t)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$, además, $|f_n(t)| \leq |h(t)|$. Sea $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, entonces $\int_{\mathbb{R}} t^2\, \mu_\psi^T(t) < \infty$ y como

$$\begin{aligned} |h(t) - f_n(t)|^2 &\leq (|h(t)| + |f_n(t)|)^2 \\ &\leq (2\,\text{máx}\{|h(t)|, |f_n(t)|\})^2 \\ &= (2|h(t)|)^2 \\ &= 2^2|h(t)|^2 \in \mathrm{L}^1_{\mu_\psi^T}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

utilizando el Teorema de convergencia dominada tenemos:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |h(t) - f_n(t)|^2\, d\mu_\psi^T = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} |h(t) - f_n(t)|^2\, d\mu_\psi^T = \int_{\mathbb{R}} 0\, \mu_\psi^T = 0$$

y así, $f_n \to h$ en $\mathrm{L}^2_{\mu_\psi^T}(\mathbb{R})$ para cada $\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Ya que

$$f_n(T) = -n\chi_{A_n}(T) + \sum_{j=-n2^n+1}^{0} (\frac{j}{2^n})\chi_{J_{n,j}}(T) + \sum_{j=1}^{n2^n} (\frac{j-1}{2^n})\chi_{J_{n,j}}(T) + n\chi_{B_n}(T)$$

y por hipótesis $P_E\chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T)P_E$ para todo $\Omega \in \mathcal{A}$, entonces P_E conmuta con cada uno de los términos de la suma anterior, por lo que P_E conmuta con $f_n(T)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, es decir

$$P_E f_n(T) = f_n(T) P_E, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

□

Proposición A.6. *Sea T un operador autoadjunto, E un subconjunto lineal cerrado de $\mathfrak{H}$ y P_E la proyección ortogonal sobre E. Entonces, si*

$$P_E\chi_\Omega(T) = \chi_\Omega(T)P_E, \quad \forall\, \Omega \in \mathcal{A},$$

E es un subespacio reductor de T.

Demostración. Por teorema A.4 inciso I es suficiente demostrar que $P_ET \subset TP_E$, para ello, recordemos que por (1.19) y (1.21) $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ si y sólo si $\int_{\mathbb{R}} t^2\, \mu_\psi^T(t) < \infty$ y en este caso $\|T\psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} t^2\, \mu_\psi^T(t)$. Tomemos entonces $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, ya que

$$\begin{aligned}\mu_{P_E\psi}^T(\Omega) &= \|P^T(\Omega)P_E\psi\|^2 \\ &= \|\chi_\Omega(T)P_E\psi\|^2 \\ &= \|P_E\chi_\Omega(T)\psi\|^2 \\ &\leq \|\chi_\Omega(T)\psi\|^2 \\ &= \|P^T(\Omega)\psi\|^2 \\ &= \mu_\psi^T(\Omega),\end{aligned} \tag{A.5}$$

se tiene $\mu_{P_E\psi}^T(\Omega) \leq \mu_\psi^T(\Omega)$, $\forall\, \Omega \in \mathcal{A}$. Por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} t^2\, d\mu_{P_E\psi}^T(t) \leq \int_{\mathbb{R}} t^2\, d\mu_\psi^T(t) = \|T\psi\|^2 < \infty$$

y así $P_E\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Ya que $\mathfrak{D}(P_E) = \mathfrak{H}$, de lo argumentado arriba es inmediato que

$$\mathfrak{D}(P_ET) = \mathfrak{D}(T) \subset \{\psi \in \mathfrak{H} : P_E\psi \in \mathfrak{D}(T)\} = \mathfrak{D}(TP_E)$$

por lo que sólo faltaría justificar que para $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ se tiene $P_ET\psi = TP_E\psi$.

Sea $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, tomemos la función $h(t) = t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por lema A.5 existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n\geq 1}$ tal que $f_n \to h$ en $\mathrm{L}^2_{\mu_\psi^T}(\mathbb{R})$ (o equivalentemente $\lim_{n\to\infty} f_n(T)\psi = h(T)\psi$) y $P_Ef_n(T) = f_n(T)P_E$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la desigualdad en (A.5) podemos afirmar también que $f_n \to h$ en $\mathrm{L}^2_{\mu_{P_E\psi}^T}(\mathbb{R})$, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n(T)P_E\psi = h(T)P_E\psi$. Luego

$$\begin{aligned}P_ET\psi = P_Eh(T)\psi &= P_E \lim_{n\to\infty} f_n(T)\psi \\ &= \lim_{n\to\infty} P_Ef_n(T)\psi \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(T)P_E\psi \\ &= h(T)P_E\psi \\ &= TP_E\psi,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar, así, $P_ET \subset TP_E$ y entonces E es un subespacio reductor de T.

□

Recapitulando, si E es un subespacio reductor del operador autoadjunto $T : \mathfrak{D}(T) \subseteq \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, las restricciones de T a los conjuntos lineales $E \cap \mathfrak{D}(T)$ y $E^{\perp} \cap \mathfrak{D}(T)$ definen operadores autoadjuntos T_E y $T_{E^\perp}$ en E y $E^\perp$ respectivamente y de acuerdo al corolario A.3 se tiene

$$T = T_E \oplus T_{E^\perp}.$$

También, dimos en la proposición A.6 una condición suficiente para que un espacio cerrado E de $\mathfrak{H}$ sea un subespacio reductor del operador autoadjunto T y que hace uso de la familia espectral de T, ésta condición será útil para algunos resultados del Capítulo 2. Por último, una útil consecuencia de la descomposición del operador T en $T = T_E \oplus T_{E^\perp}$ es que podemos descomponer también el espectro de T, $\sigma(T)$, en función del espectro de cada uno de los operadores T_E y $T_{E^\perp}$, es decir, tenemos lo siguiente:

Proposición A.7. *Sea T un operador autoadjunto y E un subespacio de $\mathfrak{H}$ que reduce a T, sean T_E y $T_{E^\perp}$ los operadores definidos en el corolario A.3. Entonces*

$$\sigma(T) = \sigma(T_E) \cup \sigma(T_{E^\perp}).$$

Demostración. De acuerdo al corolario A.3 tenemos que para toda $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ se tiene

$$T\psi = T_E\psi_1 + T_{E^\perp}\psi_2$$

donde $\psi_1 \in E \cap \mathfrak{D}(T)$ y $\psi_2 \in E^\perp \cap \mathfrak{D}(T)$, entonces para cualquier $z \in \mathbb{C}$:

$$(T - z)\psi = (T_E - z)\psi_1 + (T_{E^\perp} - z)\psi_2$$

lo que nos muestra que $T - z$ es invertible si y sólo si cada uno de los dos operadores del lado derecho son invertibles y en este caso tenemos $(T - z)^{-1} = (T_E - z)^{-1} \oplus (T_{E^\perp} - z)^{-1}$. Entonces $z \in \rho(T)$ si y sólo si $z \in \rho(T_E) \cap \rho(T_{E^\perp})$, por lo que

$$\begin{aligned}\sigma(T) &= \mathbb{C} \setminus \rho(T) = \mathbb{C} \setminus (\rho(T_E) \cap \rho(T_{E^\perp})) \\ &= (\mathbb{C} \setminus \rho(T_E)) \cup (\mathbb{C} \setminus \rho(T_{E^\perp})) \\ &= \sigma(T_E) \cup \sigma(T_{E^\perp}).\end{aligned}$$

□

APÉNDICE B

Algunos resultados de Teoría de la medida e Integración

El objetivo de esta sección es enunciar algunos resultados clásicos de Teoría de la medida que fueron utilizados a lo largo de este trabajo, recomendamos al lector consultar [Rud87] y [Gra09] así como el práctico apéndice A de [Tes09].

Una colección Σ de subconjuntos de un conjunto X es llamada una **σ-álgebra** en X si Σ tiene las siguientes propiedades:

- $X \in \Sigma$
- Si $\Omega = \cup_{n\geq 1}\Omega_n$ con $\Omega_n \in \Sigma$ para nada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\Omega \in \Sigma$.
- Si $\Omega \in \Sigma$, entonces $X \setminus \Omega \in \Sigma$.

Si Σ es una σ-álgebra en X entonces X es llamado un **espacio medible** y a los elementos de Σ se les llama **conjuntos medibles** en X.

No es difícil demostrar que la intersección de cualquier familia de σ-álgebras $\{\Sigma_\alpha\}$ en X es de nueva cuenta una σ-álgebra en X y para cualquier colección S de subconjuntos de X existe una mínima σ-álgebra $\Sigma(S)$ que lo contiene (a saber, la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a S, al menos existe una pues el conjunto potencia de X es siempre una σ-álgebra en X). $\Sigma(S)$ es llamada la σ-álgebra **generada** por S. Un caso particular es cuando X es un espacio topológico pues definiremos como la **σ-álgebra de Borel** de X a la σ-álgebra generada por la colección de subconjuntos abiertos de X. Los miembros en la σ-álgebra de Borel son llamados **conjuntos de Borel**.

Notación B.1. *Si $X = \mathbb{R}$, la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ será denotada por $\mathcal{A}$.*

Ahora bien, si (X, Σ) es un espacio medible, una **medida** μ en X es una función $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ tal que

- $\mu(\emptyset) = 0$

- $\mu(\cup_{n\geq 1}\Omega_n) = \sum_{n\geq 1}\mu(\Omega_n)$ si $\Omega_n \cap \Omega_k = \emptyset$ para todas $n \neq k$.

La medida μ es llamada **σ-finita** si existe una cubierta contable $\{X_n\}$ de X tal que $\mu(X_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y es llamada **finita** si $\mu(X) < \infty$. La tripleta (X, Σ, μ) es conocida como un **espacio de medida**.

Proposición B.2. *Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida, se tienen las siguientes propiedades:*

I. $\Omega_1 \subset \Omega_2$ *implica* $\mu(\Omega_1) \leq \mu(\Omega_2)$.

II. *Si $\{\Omega_n\} \subset \Sigma$ es una sucesión tal que $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ para cada n, entonces*

$$\mu(\cup_{n\geq 1}\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n).$$

III. *Si $\{\Omega_n\} \subset \Sigma$ es una sucesión tal que $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ para cada n y además $\mu(\Omega_1) < \infty$, entonces*

$$\mu(\cap_{n\geq 1}\Omega_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n).$$

Ejemplo B.3. *Sea $X = \mathbb{R}$ y $\Sigma = \mathcal{A}$ como se definió arriba, un resultado importante es que existe una única medida σ-finita definida sobre una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ y que asigna a cada intervalo de $\mathbb{R}$ su longitud. Denotamos por ℓ a dicha medida y la llamaremos la* **medida de Lebesgue** *en $\mathbb{R}$.*

Una medida μ definida en la σ-álgebra de Borel Σ de un espacio Hausdorff localmente compacto[1] X es llamada una **medida de Borel** en X. Una medida de Borel es llamada **regular** si

$$\mu(\Omega) = \inf\{\mu(U) : U \subset X \text{ es abierto, } \Omega \subset U\}$$

y

$$\mu(\Omega) = \sup\{\mu(K) : K \subset X \text{ es compacto, } K \subset \Omega\}$$

para todo $\Omega \in \Sigma$.

El siguiente es un útil teorema que nos asegura la propiedad de regularidad en particular para cualquier medida de Borel finita en $\mathbb{R}$ y cuya demostración puede consultarse en [Rud87, pág.48]:

Teorema B.4. *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto en el cual cada conjunto abierto es σ-compacto[2]. Sea μ una medida de Borel en X tal que $\mu(\Omega) < \infty$ para cada conjunto compacto Ω, entonces μ es regular.*

Al respecto de medidad de Borel finitas, el siguiente lema también será de utilidad:

[1] X es llamado **localmente compacto** si cada punto de X tiene una vecindad cuya clausura es compacta.

[2] Un conjunto E en un espacio topológico es llamado **σ-compacto** si es la unión contable de conjuntos compactos.

Lema B.5. *Si μ es una medida de Borel finita entonces el conjunto*

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} : \mu(\{\lambda\}) \neq 0\}$$

es un conjunto a lo más numerable.

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que Λ es más que numerable. Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\Lambda_n := \{\lambda \in \Lambda : \mu(\{\lambda\}) > \frac{1}{n}\},$$

ya que Λ es más que numerable, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que Λ_{n_0} es más que numerable, ahora bien, ya que $\cup_{k\geq 1}[-k,k] = \mathbb{R}$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\Theta = \{\lambda \in [-k,k] : \mu(\{\lambda\}) > \frac{1}{n_0}\}$$

es un conjunto más que numerable. Notemos que Θ es entonces un conjunto infinito y además acotado, por lo que el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura la existencia de un punto de acumulación en Θ, sea $\hat{x}$ ese elemento y tomemos $\{x_j\} \subset \Theta$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} x_j = \hat{x}.$$

Dado que μ es finita se tiene que[3] $\mu(B(\hat{x},1)) < \infty$ pero por otro lado

$$\mu(B(\hat{x},1)) \geq \sum_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ x_j \in B(\hat{x},1)}} \mu(\{x_j\}) = \infty$$

pues para cada $j \in \mathbb{N}$ $\mu(\{x_j\}) > \frac{1}{n_0}$, lo que es una contradicción, por lo tanto Λ no puede ser más que numerable.

□

Pasemos ahora a definir lo que conoceremos como **funciones medibles**. Sea (X, Σ) un espacio medible, una función $f : X \to \mathbb{R}$ es llamada **Σ-medible** si $f^{-1}[\Omega] \in \Sigma$ para cada $\Omega \in \mathcal{A}$. Una función complejo valuada es llamada Σ-medible si tanto su parte real $\mathfrak{Re}(f)$ como su parte imaginaria $\mathfrak{Im}(f)$ lo son. En el caso particular que X sea un espacio topológico y Σ su σ-álgebra de Borel, a una función Σ-medible f la llamaremos simplemente Borel medible.

Lema B.6. *Sea X un espacio topológico y Σ su σ-álgebra de Borel, supongamos que $f, g : X \to \mathbb{R}$ son funciones Borel medibles. Entonces $f + g$, fg y $|f|$ son también Borel medibles.*

Ahora bien, debido a que la definición de la integral de una función medible (con respecto a una medida μ) es abordada en toda la literatura clásica al respecto, nos limitaremos a enunciar algunos resultados que de ella se desprenden.

[3] $B(\hat{x}, 1)$ es la bola abierta de $\mathbb{R}$ con centro en $\hat{x}$ y radio 1.

Definición B.7. *Sea μ una medida en $\mathbb{R}$. Definimos como $\mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ al conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel medibles para las cuales*

$$\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\mu < \infty.$$

Si $f \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ entonces f es llamada **μ-integrable** *o* **integrable** *con respecto a μ.*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu := \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{Re}(f) \, d\mu + i \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{Im}(f) \, d\mu.$$

Notación B.8. *De manera más general, si μ es una medida en un espacio medible (X, Σ) podemos definir de manera análoga a lo hecho arriba el conjunto $\mathrm{L}^1_\mu(X)$, algunas veces escribiremos $\mathrm{L}^1(\mu)$ en lugar de $\mathrm{L}^1_\mu(X)$ si el espacio (X, Σ) se sobreentiende.*

Notación B.9. *Si ℓ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, al conjunto $\mathrm{L}^1_\ell(\mathbb{R})$ lo denotaremos simplemente por $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, además, denotaremos a la integral de una función f (con respecto a ℓ) indistintamente por las siguientes expresiones: $\int_{\mathbb{R}} f \, d\ell$, $\int_R f(t) \, d\ell(t)$ o $\int_{\mathbb{R}} f(t) \, dt$.*

Teorema B.10 (**De convergencia monótona de Lebesgue**)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en $\mathbb{R}$ y supongamos que*

I. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq \infty$ *para cada $x \in \mathbb{R}$,*

II. $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *existe para cada $x \in \mathbb{R}$.*

Entonces f es medible y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

Teorema B.11 (**De convergencia dominada de Lebesgue**)**.** *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles complejo valuadas tales que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe para cada $x \in \mathbb{R}$. Si existe una función $g \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ tal que*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},$$

entonces $f \in \mathrm{L}^1_\mu(\mathbb{R})$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\mu = \int_{\mathbb{R}} f \, d\mu.$$

Proposición B.12. *La medida de Dirac en λ es $\delta_\lambda(\Lambda) = 0$ si $\lambda \notin \Lambda$ y $\delta_\lambda(\Lambda) = 1$ si $\lambda \in \Lambda$, $\Lambda \in \mathcal{A}$. Si μ es una medida de Borel en $\mathbb{R}$ tal que $\mu = \alpha\delta_\lambda$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ y f es una función Borel medible entonces*

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) \, d\mu(t) = \alpha f(\lambda).$$

Un concepto importante a la hora de trabajar con espacios de medida es el de que una propiedad P relativa a un punto x se cumpla 'casi dondequiera', más formalmente:

Definición B.13. *Sea μ una medida definida en una σ-álgebra Σ de X, la afirmación 'P se cumple casi dondequiera en X' (respecto a la medida μ) nos dice que existe un conjunto $\Omega \subset X$ tal que $\mu(\Omega) = 0$ y P es verdadera en cada punto de $X \setminus \Omega$.*

Proposición B.14. *Supongamos que $f : X \to [0, \infty]$ es medible, si $\int_X f \, d\mu = 0$ entonces $f(x) = 0$ casi donde quiera en X.*

Finalmente, enunciamos el Teorema de Fubini que utilizamos en el Capítulo 4, remitimos al lector a las referencias recomendadas al inicio de éste apéndice para introducir el concepto de medida producto.

Teorema B.15 (Teorema de Fubini). *Sea f una función medible en $X_1 \times X_2$ y sean μ_1, μ_2 medidas σ-finitas en X_1 y X_2 respectivamente. Entonces*

i. *Si $f \geq 0$, entonces $\int f(\cdot, x_2) d\mu_2(x_2)$ y $\int f(x_1, \cdot) d\mu_1(x_1)$ son medibles y*

$$\begin{aligned} \int \int f(x_1, x_2) \, d\mu_1 \otimes \mu_2(x_1, x_2) &= \int \Big(\int f(x_1, x_2) \, d\mu_1(x_1) \Big) \, d\mu_2(x_2) \\ &= \int \Big(\int f(x_1, x_2) \, d\mu_2(x_2) \Big) \, d\mu_1(x_1). \end{aligned} \tag{B.1}$$

ii. *Si f es complejo valuada entonces*

$$\int |f(x_1, x_2)| \, d\mu_1(x_1) \in \mathrm{L}^1_{\mu_2}(X_2),$$

respectivamente

$$\int |f(x_1, x_2)| \, d\mu_2(x_2) \in \mathrm{L}^1_{\mu_1}(X_1),$$

si y sólo si

$$f \in \mathrm{L}^1_{\mu_1 \otimes \mu_2}(X_1 \times X_2),$$

y en este caso (B.1) también se cumple.

Bibliografía

[AG73] W. O. Amrein y V. Georgescu. Bound states and scattering states in quantum mechanics. Helv. Phys. Acta 46, 633–658 1973.

[AG93] N.I. Akhiezer y I.M. Glazman. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Dover Publications, Nueva York 1993.

[AJS77] W. O. Amrein, J.M. Jauch y K.B. Sinha. *Scattering Theory in Quantum Mechanics*. W.A. Benjamin, Inc., Massachusetts, 1a edición 1977.

[Amr81] W. O. Amrein. *Non-Relativistuc Quantum Dynamics*. Mathematical Physics Studies. D. Reidel, Dordrecht 1981.

[Amr09] W. O. Amrein. *Hilbert Space Methods in Quantum Mechanics*. EPFL Press, Lausanne, 1a edición 2009.

[Bar66] R.G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley and Sons, Inc. 1966.

[BB03] P. Blanchard y E. Bruning. *Mathematical Methods in Physics*. Birkhauser Verlag AG, Boston 2003.

[BEH08] J. Blanck, P. Exner y M. Havlícek. *Hilbert Space Operators in Quantum Physics*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Science, 2a edición 2008.

[BF98] S. De Bièvre y G. Forni. Transport properties of kicked and quasiperiodic hamiltonians. J. Stat. Phys. 90, 1201–1223 1998.

[BN72] G. Bachman y L. Narici. *Functional Analysis*. Academic Press, Inc., Nueva York, 1a edición 1972.

[Bob96] A. Bobrowski. On the generation of non-continuous semigroups. Semigroup Forum 54, 237–252 1996.

[BS87] M.S. Birman y M.Z. Solomjak. *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1987.

[DK05] M. Demuth y M. Krishna. *Determining Spectra in Quantum Theory*. Birkhauser, Boston 2005.

[dO09] C. R. de Oliveira. *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics*. Birkhauser Verlag AG, Basel 2009.

[EN06] K. J. Engel y R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer, Nueva York 2006.

[Ens78] V. Enss. Asymptotic completeness for quantum mechanical potential scattering. Commun. Math. Phys. 61, 285–291 1978.

[Gra09] G. Grabinsky. *Teoría de la Medida*. Facultad de Ciencias, UNAM, México, D.F., 1a edición 2009.

[HP57] E. Hillie y R.S. Phillips. *Functional Analysis and Semi-Groups*. American Mathematical Society, Providence 1957.

[Kat95] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlín, 2a (corregida) edición 1995.

[Kre78] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley, Nueva York 1978.

[Las96] Y. Last. Quantum dynamics and decomposition of singular continuous spectra. J. of Funct. Anal. 142, 406–445 1996.

[Las00] Y. Last. Exotic spectra: a review of barry simon's central contributions. 2000.

[Lyo95] R. Lyons. Seventy years of rajchman measures. J. Fourier Anal. Appl. páginas 363–377 1995.

[Pea88] D.B. Pearson. *Quantum Scattering and Spectral Theory*. Academic Press, Londres 1988.

[RN55] F. Riesz y Sz. Nagy. *Functional Analysis*. Blanckie and Son Limited, Glasgow, 2a edición 1955.

[RS80] M. Reed y B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol.I*. Academic Press, San Diego 1980.

[Rud87] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Singapur, 3a edición 1987.

[Rue69] D. Ruelle. A remark on bound states in potential scattering theory. Nuovo Cimento A61, 655–662 1969.

[Sch81] M. Schechter. *Operator Methods in Quantum Mechanics*. North Holland, Nueva York 1981.

[Sch02] M. Schechter. *Principles of Functional Analysis*. American Mathematical Society, Providence, 2a edición 2002.

[Sim95] B. Simon. Operators with singular continuous spectrum. i. general operators. Ann. of Math. 141, 131–145 1995.

[Sto97] G. Stolz. Spectral theory for slowly oscillating potentials ii. schrodinger operators. Math. Nachr. 183, 275–294 1997.

[Tes09] G. Teschl. *Mathematical Methods in Quantum Mechanics; with Applications to Schrodinger Operators*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence 2009.

[Wei80] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Graduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, Nueva York 1980.

[WZ77] R. Wheeden y A. Zygmund. *Measure and Integral*. Marcel Dekker, Inc., Nueva York 1977.