Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

La reconstrucción de una matriz de Jacobi a partir de dos espectros

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
ACTUARIO

PRESENTA:

MAURICIO EDUARDO RANGEL GRANADOS

DIRECTOR DE TESIS:
DR. RAFAEL RENÉ DEL RÍO CASTILLO

2011

A mis padres
A mis hermanas y hermanos, en especial a Elsa, Lilia y Adriana
A Elena, Emiliano y Fernando, mi inspiración y alegría

La reconstrucción de una matriz de Jacobi a partir de dos espectros

Mauricio Eduardo Rangel Granados

24 de septiembre de 2011

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può, intendere se prima non s'impara a intender la lingua e conoscer i caratteri, ne' t quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galileo Galilei, Il Saggiatore, 1623

Índice general

1. MATRICES DE JACOBI **8**
1.1. Preliminares 8
1.2. Caracterización de los vectores y valores propios de las matrices de Jacobi 9
1.3. Descripción de algunas propiedades de los polinomios generados por la matriz de Jacobi 13
1.4. Propiedades de los polinomios generados por las matrices de Jacobi. . . 13

2. PROBLEMAS INVERSOS **19**
2.1. Definiciones 20
2.2. Reconstrucción de la matriz de Jacobi 22

3. PROBLEMAS INVERSOS Y LA *función m* DE WEYL **38**
3.1. La Integral de Riemann-Stieltjes 38
3.2. La Función espectral 39
3.3. Solución a problemas inversos a través de la *función* m de Weyl 47
3.3.1. Definición de la *función* m de Weyl 47

4. CONCLUSIÓN **63**

5. APÉNDICES **64**
5.1. Espacios vectoriales 64
5.1.1. Subespacios vectoriales 65
5.2. Bases de un espacio vectorial 65
5.2.1. Independencia lineal 65
5.2.2. Conjunto generador 66
5.3. El producto interno 67
5.4. Matrices 68
5.5. Características especiales de las Matrices tridiagonales 70
5.5.1. Caracterización de la matrices tridiagonales 70
5.5.2. Caso particular de las Matrices de Jacobi 70
5.6. Vectores y valores propios 73

5.7. Operadores lineales 74
5.7.1. Operadores Autoadjuntos 75
5.8. Fracciones parciales y funciones integradoras 76
5.8.1. Caso especial de descomposición en fracciones parciales de una función racional. 76
5.8.2. Funciones escalonadas como integradores 78

5.7. Operadores lineales 74
5.7.1. Operadores Autoadjuntos 75
5.8. Fracciones parciales y funciones integradoras 76
5.8.1. Caso especial de descomposición en fracciones parciales de una función racional. 76
5.8.2. Funciones escalonadas como integradores 78

Introducción

En este trabajo abordaremos uno de los problemas inversos clásicos del análisis espectral, la reconstrucción de un operador a través de sus valores propios. Los problemas inversos son aquellos donde los valores de algunos parámetros del modelo deben ser reconstruidos de datos obtenidos algunas veces a través de la experimentación y otras veces a partir de razonamientos constructivistas. En nuestro caso revisaremos el problema para operadores autoadjuntos sobre espacios de dimensión finita cuya representación matricial es una matriz finita de Jacobi de la forma

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

donde todas las a_i, b_i son reales y además las b_i son positivas.

En el primer capítulo iniciaremos revisando algunas definiciones del álgebra lineal y de la teoría de matrices; continuaremos la exposición definiendo las matrices de Jacobi, describiéndolas como matrices tridiagonales de las cuales además se da una definición formal en el apéndice. Posteriormente, describiremos algunas de sus propiedades y veremos a detalle la caracterización de sus vectores propios, demostrando que la componente c_j de los vectores propios resulta ser un polinomio de grado j y derivaremos expresiones para cada una de ellas. Revisaremos también, la importante relación de recurrencia que cumplen, dada por

$$b_{j-1}c_{j-1} + a_j c_j + b_j c_{j+1} = \lambda c_j$$

Finalizaremos el capítulo demostrando que la multiplicidad de los valores propios es uno y mostrando que es posible obtener una base ortonormal del espacio sobre el que actúa el operador a partir de sus vectores propios.

En el capítulo dos se enuncian dos teoremas referentes a la reconstrucción de una matriz de Jacobi a partir de dos espectros: el espectro de la matriz original ($\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$) y el espectro de la matriz truncada ($\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$), obtenida de la matriz original eliminando el primer renglón y la primera columna. Veremos cómo en general, un solo espectro no basta para poder reconstruir la matriz, pero si tenemos más de un espectro, por ejemplo el espectro de la matriz truncada o si contamos con información adicional de la matriz, por ejemplo que la diagonal principal sea simétrica, entonces es posible reconstruirla de manera unívoca. En el primer caso, veremos cómo se puede reconstruir la matriz a través de la relación

$$\langle J^k\delta_0, \delta_0\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}, k = 1, 2, 3, \ldots n$$

donde $B(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz original J y $A(\lambda)$ es el polinomio característico de la matriz truncada J_τ; en el segundo caso, se demostrará que si no se conoce el espectro de la matriz truncada, pero la matriz guarda la relación de simetría

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_i = a_{n-i}$$

$$b_0 = b_{n-1}, b_1 = b_{n-2}, b_i = b_{n-i-1}$$

para toda i, entonces es posible conocer el espectro de la matriz truncada y reducir el problema al mismo caso del primer teorema. En este caso, el camino será encontrar primero el espectro de la matriz truncada y para esto utilizaremos la relación:

$$A(\lambda) = B(\lambda) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\overrightarrow{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)}$$

y econtraremos $\overrightarrow{c}_j$ de la igualdad

$$\|\overrightarrow{c}_j\|^2 = \frac{|B'(\lambda)|}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}$$

Los dos teoremas de este capítulo y sus demostraciones son debidos a Harry Hochstadt [1] y el objetivo fue clarificar cada uno de los pasos de la demostración, incluyendo el algoritmo para obtener las entradas de la matriz; además se demuestra que la matriz depende de una manera continua de los espectros, en el sentido de que siempre que tengamos otros conjuntos $\left\{\widetilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^{n}$ y $\{\widetilde{\mu}_i\}_{i=1}^{n}$ tales que, para cierta $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$\left|\lambda_i - \widetilde{\lambda}_i\right| < \varepsilon \quad i = 0, 1, 2, \ldots n$$

y

$$|\mu_i - \widetilde{\mu}_i| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \ldots n$$

entonces las entradas de las matrices reconstruídas a partir de estos conjuntos se encuentran arbitrariamente cercanas unas de otras. Concluiremos este capítulo con la demostración y el algoritmo para el caso en que la diagonal principal de la matriz cumple la relación de simetría indicada en los renglones anteriores y cómo ajustar el algoritmo para reutilizarlo en este caso específico.

En el tercer capítulo se demuestra nuevamente el primer teorema del capítulo dos [2], pero usando la función espectral y la *función m* de Weyl. Iniciaremos este capítulo con la definición de la integral de Riemman Stieltjes, que nos servirá para definir la función espectral;continuaremos demostrando cómo cada función espectral determina de manera unívoca una matriz de Jacobi [2] y definiendo la *función m* de Weyl, de la forma:

$$m(z) := \left\langle (zI - J)^{-1}\delta_0, \delta_0 \right\rangle$$

que nos permitirá obtener el primer teorema del capítulo uno como un corolario de un resultado más general. Especial mención merece el teorema que relaciona la función espectral con la *función m* de Weyl y del que obtendremos la relación:

$$m(z) = \int \frac{d\rho(\lambda)}{z - \lambda}$$

y que permite conectar y darle consistencia a la derivación del teorema del capítulo uno como corolario.

Finalmente a manera de apéndice se han relacionado algunos de los temas que fue necesario revisar para entender mejor las demostraciones y también se han demostrado algunos de los resultados que se usan durante éstas. Se ha considerado oportuno centrarnos en los resultados principales, con el objetivo de darle mayor fluidez al trabajo, y dejar estas demostraciones intermedias en el apéndice.

n el tercer capítulo se demuestra nuevamente el primer teorema del capítulo dos ero usando la función espectral y la *función m* de Weyl. Iniciaremos este capítulo a definición de la integral de Riemman Stieltjes, que nos servirá para definir la ón espectral;continuaremos demostrando cómo cada función espectral determina anera unívoca una matriz de Jacobi [2] y definiendo la *función m* de Weyl, de la :

$$m(z) := \langle (zI - J)^{-1}\delta_0, \delta_0 \rangle$$

os permitirá obtener el primer teorema del capítulo uno como un corolario de un ado más general. Especial mención merece el teorema que relaciona la función tral con la *función m* de Weyl y del que obtendremos la relación:

$$m(z) = \int \frac{d\rho(\lambda)}{z - \lambda}$$

y que permite conectar y darle consistencia a la derivación del teorema del capítulo uno como corolario.

Finalmente a manera de apéndice se han relacionado algunos de los temas que fue necesario revisar para entender mejor las demostraciones y también se han demostrado algunos de los resultados que se usan durante éstas. Se ha considerado oportuno centrarnos en los resultados principales, con el objetivo de darle mayor fluidez al trabajo, y dejar estas demostraciones intermedias en el apéndice.

Capítulo 1

MATRICES DE JACOBI

A lo largo de todo el trabajo se utilizarán conceptos y resultados del álgebra lineal y del álgebra de matrices, asumiendo que el lector está familiarizado con ellos.

A continuación se precisan algunos de estos conceptos.

1.1. Preliminares

Por $\mathbb{C}^n$ denotaremos el espacio vectorial cuyos elementos son eneadas de números complejos y por T entenderemos una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$. Por V indicaremos un espacio vectorial y por $\langle\rangle$ el producto interno, mientras que utilizaremos *det* M o $|M|$ para indicar el determinante de la matriz M.

En nuestro caso, trabajaremos con operadores lineales en espacios de dimension finita que pueden representarse con un tipo especial de matrices, las matrices de Jacobi. Sabemos por los teoremas correspondientes del álgebra lineal, que existe una correspondencia biunívoca entre el espacio vectorial formado por todos los operadores lineales de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$ y el espacio de las matrices cuadradas $M_{n\times n}$ con entradas complejas, así, demos trabajar indistintamente con el operador o con la matriz que lo representa.

ando en cuenta lo anterior, será conveniente definir algunos conceptos en términ operadores lineales, entendiendo que podemos sustituir sin problema alguno el ador por la matriz que lo representa.

n todas las definiciones que siguen T es una transformación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$

icion 1.1. *Decimos que T es simétrico si para toda x , $y \in \mathbb{C}^n$ se tiene que* $, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

nicion 1.2. *Al operador T^* tal que para toda x , $y \in \mathbb{C}^n$ se tiene que $\langle Tx, y\rangle =$ $y\rangle$ le llamamos el adjunto de T*

ion 1.3. *Decimos que T es autoadjunto si $T = T^*$*

En espacios de dimensión finita todo operador simétrico es autoadjunto, es decir, la matriz que representa a T es la misma que representa a T^*

Definicion 1.4. *Por I entenderemos la matriz identidad, es decir*

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si existe una matriz M^{-1} tal que $MM^{-1} = I$ diremos que M es invertible y a la matriz M^{-1} se le llama la *inversa* de M

Diremos que M es una matriz *ortogonal* o unitaria si $M^t = M^{-1}$

Definicion 1.5. *Por una matriz de Jacobi entenderemos una matriz J de la forma*

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

donde todas las a_i, b_i son reales y además las b_i son positivas.

Nótese que la matriz J es una matriz cuadrada simétrica (es decir autoadjunta) de $n+1 \times n+1$

En el resto de este capítulo nos centraremos en la caracterización de sus valores y vectores propios.

1.2. Caracterización de los vectores y valores propios de las matrices de Jacobi

Decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de J y $\overrightarrow{c} = (c_0, c_1, c_2, ..., c_n)$ el vector propio correspondiente sí y sólo sí

$$J\overrightarrow{c} = \lambda\overrightarrow{c} \tag{1.2.1}$$

con $\overrightarrow{c} \neq \overrightarrow{0}$. En el caso de las matrices de Jacobi, si la ecuación 1.2.1 tiene solución, en términos matriciales implica que existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\overrightarrow{c} \in \mathbb{C}^{n+1}$ tales que:

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix}$$

Desarrollando el sistema de ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned} a_0c_0 + b_0c_1 &= \lambda c_0 \\ b_0c_0 + a_1c_1 + b_1c_2 &= \lambda c_1 \\ &\vdots \\ b_{j-1}c_{j-1} + a_jc_j + b_jc_{j+1} &= \lambda c_j \\ &\vdots \\ b_{n-2}c_{n-2} + a_{n-1}c_{n-1} + b_{n-1}c_n &= \lambda c_{n-1} \\ b_{n-1}c_{n-1} + a_nc_n &= \lambda c_n \end{aligned}$$

Analizando el sistema vemos que tiene una relación de recurrencia; de la primera ecuación si $c_0 = 0$ entonces $b_0c_1 = 0$ y como $b_0 \neq 0$ $c_1 = 0$; de la segunda ecuación $b_1c_2 = 0$ y como $b_1 \neq 0$ $c_2 = 0$, y sucesivamente $c_1 = 0 = c_2 = c_3 = \ldots c_{n-1} = c_n$, es decir

$$\overrightarrow{c} = (0, 0, 0, \ldots, 0)$$

lo cual no puede ser, porque el vector $\overrightarrow{0}$ no es un vector propio, por lo tanto $c_0 \neq 0$.

Sabemos que para toda $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha\overrightarrow{c}$ es un vector propio correspondiente al valor propio λ así que si $c_0 \neq 0$ entonces $\overrightarrow{c}$ siempre puede ser escrito como $(1, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ (basta poner $\alpha = 1/c_0$)

Observemos que las primeras n ecuaciones pueden resolverse de manera recurrente para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ fijo, notemos sin embargo, que la última ecuación

$$b_{n-1}c_{n-1} + a_nc_n - \lambda c_n = 0$$

se resuelve con respecto a λ sólo cuando λ es un valor propio de J de lo contrario no tiene porqué cumplirse. Es decir, podemos encontrar que la relación de recurrencia se cumple para cualquier λ sin considerar la última ecuación pero en la última ecuación λ debe ser un valor propio.

Si $c_0 = 1$, de la primera ecuación obtenemos

$$a_0 + b_0c_1 = \lambda$$

es decir,

$$c_1 = \frac{\lambda - a_0}{b_0}$$

de la segunda ecuación

$$b_0c_0 + a_1c_1 + b_1c_2 = \lambda c_1$$

y despejando c_2

$$b_1c_2 = \lambda c_1 - b_0c_0 - a_1c_1 = c_1(\lambda - a_1) - b_0c_0$$

Por lo tanto

$$c_2 = \frac{c_1(\lambda - a_1) - b_0 c_0}{b_1}$$

y sustituyendo $c_0 = 1$ y $c_1 = \dfrac{\lambda - a_0}{b_0}$

$$c_2 = \frac{\lambda^2 - \lambda a_0 - a_1\lambda + a_0 a_1 - b_0^2}{b_0 b_1} = \frac{\lambda^2 - \lambda(a_0 + a_1) + a_0 a_1 - b_0^2}{b_0 b_1}$$

Notemos que $c_0 = 1$ puede verse como un polinomio $P_0(\lambda)$ de grado 0 en λ, mientras que

$$c_1 = \frac{\lambda - a_0}{b_0}$$

es un polinomio $P_1(\lambda)$ de grado 1 en λ, y el coeficiente de la potencia en λ es b_0^{-1}, de igual forma

$$c_2 = \frac{\lambda^2 - \lambda(a_0 + a_1) + a_0 a_1 - b_0^2}{b_0 b_1}$$

es un polinomio $P_2(\lambda)$ de grado 2 en λ y el coeficiente de la potencia λ^2 es $(b_0 b_1)^{-1}$

Para c_3

$$b_1 c_1 + a_2 c_2 + b_2 c_3 = \lambda c_2$$

$$b_2 c_3 = \lambda c_2 - b_1 c_1 - a_2 c_2$$

$$c_3 = \frac{\lambda c_2 - b_1 c_1 - a_2 c_2}{b_2} = \frac{c_2(\lambda - a_2) - b_1 c_1}{b_2}$$

$$c_3 = \frac{\lambda^3 - \lambda^2(a_2 + a_1 - a_{0)} + \lambda a_0 a_1 b_0^2 + a_1 a_2 - a_0 a_2 - b_1^2) - a_0 a_1 a_2 b_0^2 + a_0 b_1^2}{b_0 b_1 b_2}$$

que es un polinomio $P_3(\lambda)$ de grado 3 en λ y el coeficiente de la potencia λ^3 es $(b_0 b_1 b_2)^{-1}$

Como se muestra enseguida, la componente c_j del vector propio $\overrightarrow{c}$ de la matriz de Jacobi es precisamente un polinomio de grado j con coeficiente del término principal igual a $(b_0 b_1 b_2 \ldots b_{j-1})^{-1}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

Proposicion 1.2.1. *La componente c_j del vector propio $\overrightarrow{c}$ de la matriz de Jacobi es un polinomio de grado j que tiene como coeficiente del término principal $(b_0 b_1 b_2 \ldots b_{j-1})^{-1}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$*

Demostración. Hemos visto ya que para $j = 0, 1, 2, 3$ se cumple que $c_j = P_j(\lambda)$ es un polinomio de grado j en λ. Se demostrará ahora que c_{j+1} es un polinomio de grado j+1 en λ

Del sistema de ecuaciones

$$b_{j-1}c_{j-1} + a_jc_j + b_jc_{j+1} = \lambda c_j$$

$$b_jc_{j+1} = \lambda c_j - b_{j-1}c_{j-1} - a_jc_j$$

$$c_{j+1} = \frac{\lambda c_j - b_{j-1}c_{j-1} - a_jc_j}{b_j} = \frac{c_j(\lambda - a_j) - b_{j-1}c_{j-1}}{b_j}$$

y por hipótesis de inducción modificada c_n es de grado n para toda $n \leq j$ es decir

$$c_j = P_j(\lambda) = g_j\lambda^j + g_{j-1}\lambda^{j-1} + \ldots + g_1\lambda + g_0$$

$$c_{j-1} = P_{j-1}(\lambda) = h_{j-1}\lambda^{j-1} + h_{j-2}\lambda^{j-2} + \ldots + h_1\lambda + h_0$$

Así que

$$c_{j+1} = \frac{(g_j\lambda^j + g_{j-1}\lambda^{j-1} + \ldots + g_1\lambda + g_0)(\lambda - a_j) - b_{j-1}P_{j-1}(\lambda)}{b_j}$$

$$= \frac{g_j\lambda^{j+1} + \lambda^j(g_{j-1} - g_ja_j) + \ldots + \lambda(g_0 - g_1a_j) - a_jg_0}{b_j} - \frac{b_{j-1}P_{j-1}(\lambda)}{b_j}$$

$$= \frac{R_{j+1}(\lambda) - b_{j-1}P_{j-1}(\lambda)}{b_j}$$

y como $b_{j-1}P_{j-1}(\lambda)$ es un polinomio de grado $j-1$ concluimos que

$$c_{j+1} = \frac{R_{j+1}(\lambda) - b_{j-1}P_{j-1}(\lambda)}{b_j} = H(\lambda)$$

es un polinomio de grado $j+1$ en λ.

Demostraremos ahora que el coeficiente del término principal del polinomio H es

$$(b_0b_1b_2\ldots b_j)^{-1}$$

Hemos visto ya que la conjetura se cumple para $n = 1, 2, 3$ supongamos ahora que para toda $n \leq j$ el coeficiente del término principal es

$$(b_0b_1b_2\ldots b_{j-1})^{-1}$$

entonces

$$c_{j+1} = \frac{c_j(\lambda - a_j) - b_{j-1}c_{j-1}}{b_j}$$

$$= \frac{((b_0b_1b_2\ldots b_{j-1})^{-1}\lambda^j + \ldots + a_1\lambda + a_0)(\lambda - a_j)}{b_j} - \frac{b_{j-1}c_{j-1}}{b_j}$$

$$c_{j+1} = (b_0b_1b_2\ldots b_{j-1}bj)^{-1}\lambda^{j+1} + \ldots + a_0$$

donde los términos marcados con puntos tienen todos potencias de λ menores a $j+1$ lo que demuestra completamente la proposición. □

1.3. Descripción de algunas propiedades de los polinomios generados por la matriz de Jacobi

Proposicion 1.3.1. *Los valores propios de la matriz de Jacobi son reales.*

Demostración. Demostraremos que en general los valores propios de una matriz autoadjunta son reales.

Sea A una matriz autoadjunta y $\overrightarrow{x}$ un vector propio de A, entonces

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}, \quad \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0} \quad y \quad \langle A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\rangle$$

por lo tanto

$$\lambda \|\overrightarrow{x}\|^2 = \langle A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}\rangle = \langle \overrightarrow{x}, A\overrightarrow{x}\rangle = \overline{\lambda} \|\overrightarrow{x}\|^2$$

por lo que $\lambda = \overline{\lambda}$, por lo tanto λ es real y los valores propios de la matriz de Jacobi son reales. □

Proposicion 1.3.2. *Vectores propios de la matriz de Jacobi correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales.*

Demostración. Al igual que la proposición anterior demostraremos que el resultado es cierto para cualquier operador autoadjunto.

Sea A una matriz autoadjunta y sean $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ vectores propios correspondientes a los valores propios diferentes λ y μ, entonces

$$A\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{x}, \; A\overrightarrow{y} = \mu\overrightarrow{y}$$

luego

$$\lambda\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = \langle\lambda\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = \langle A\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = \langle\overrightarrow{x}, A\overrightarrow{y}\rangle = \langle\overrightarrow{x}, \mu\overrightarrow{y}\rangle = \mu\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle$$

Entonces

$$\lambda\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle - \mu\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = (\lambda - \mu)\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = 0$$

y por hipótesis $(\lambda - \mu) \neq 0$ Por lo tanto $\langle\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\rangle = 0$ y $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ son ortogonales. Por lo tanto los vectores propios de una matriz de Jacobi correspondientes a valores propios diferentes son ortogonales. □

1.4. Propiedades de los polinomios generados por las matrices de Jacobi.

Como ya vimos, la matriz J generó un sistema de polinomios

$$P_0 \equiv 1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), P_3(\lambda), ..., P_j(\lambda), ..., P_n(\lambda)$$

Consideremos ahora la última ecuación

$$b_{n-1}c_{n-1} + a_n c_n = \lambda c_n$$

como c_j es un polinomio de grado j en λ podemos reescribir esta última ecuación como:

$$b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + a_n P_n(\lambda) = \lambda P_n(\lambda)$$

Entonces

$$b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + a_n P_n(\lambda) - \lambda P_n(\lambda) = 0$$

Definamos ahora el polinomio

$$Q_n(\lambda) := \lambda P_n(\lambda) - a_n P_n(\lambda) - b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) \tag{1.4.1}$$

Proposicion 1.4.1. *Los ceros de $Q_n(\lambda)$ son los valores propios de la transformación J*

Demostración. Hemos visto ya que la última ecuación sólo se cumple cuando λ es un valor propio de J, es decir $Q(\lambda)$ tiene los mismos ceros que el polinomio característico de J □

Tenemos pues caracterizados los valores propios de la matriz J, es natural preguntarse ahora qué multiplicidad tienen. Como se mostrará a continuación, las raíces del polinomio característico de una matriz de Jacobi son todas de multiplicidad 1.

Antes de iniciar la demostración, será útil demostrar el siguiente Lema

Lema 1.4.1. *Para los polinomios $P_0 \equiv 1, P_1(\lambda), P_2(\lambda), \ldots P_n(\lambda)$ generados por la matriz de Jacobi y para cualesquiera $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$, la siguiente igualdad es cierta (Fórmula de Christoffel-Darboux):*

$$(\lambda - \mu)\sum_{j=0}^{n-1} P_j(\lambda)P_j(\mu) = b_{n-1}\left[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)\right]$$

Demostración. Comenzaremos evaluando cada polinomio para λ y μ :

$$a_0 + b_0 P_1(\lambda) = \lambda$$

$$a_0 + b_0 P_1(\mu) = \mu$$

$$b_0 + a_1 P_1(\lambda) + b_1 P_2(\lambda) = \lambda P_1(\lambda)$$

$$b_0 + a_1 P_1(\mu) + b_1 P_2(\mu) = \mu P_1(\mu)$$

$$\vdots$$

$$b_{i-1}P_{i-1}(\lambda) + a_i P_i + b_i P_{i+1}(\lambda) = \lambda c_i$$

$$b_{i-1}P_{i-1}(\mu) + a_i P_i + b_i P_{i+1}(\mu) = \mu c_i$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2}P_{n-2}(\lambda) + a_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + b_{n-1}P_n(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\lambda)$$

$$b_{n-2}P_{n-2}(\mu) + a_{n-1}P_{n-1}(\mu) + b_{n-1}P_n(\mu) = \mu P_{n-1}(\mu)$$

Multiplicando cada j-ésimo par de ecuaciones por $P_{j-1}(\lambda)$ y $P_{j-1}(\mu)$ de forma cruzada y restándolos obtenemos:

Para el primer par recordemos que $P_0(\lambda) \equiv 1 \equiv P_0(\mu)$, así que al multiplicar cruzado y restar queda

$$a_0 + b_0 P_1(\lambda) = \lambda$$

$$\underline{a_0 + b_0 P_1(\mu) = \mu}$$

$$b_0[P_1(\lambda) - P_1(\mu)] = \lambda - \mu \qquad (1.4.2)$$

Para el siguiente par se eliminan los términos en a_1 y tenemos:

$$b_0 P_1(\mu) + a_1 P_1(\lambda)P_1(\mu) + b_1 P_2(\lambda)P_1(\mu) = \lambda P_1(\lambda)P_1(\mu)$$

$$\underline{b_0 P_1(\lambda) + a_1 P_1(\mu)P_1(\lambda) + b_1 P_2(\mu)P_1(\lambda) = \mu P_1(\mu)P_1(\lambda)}$$

$$b_0[P_1(\mu) - P_1(\lambda)] + b_1[P_2(\lambda)P_1(\mu) - P_2(\mu)P_1(\lambda)] = (\lambda - \mu)[P_1(\lambda)P_1(\mu)] \qquad (1.4.3)$$

Para la tercera ecuación evaluada en λ y en μ queda

$$b_1 P_1(\lambda)P_2(\mu) + a_2 P_2(\lambda)P_2(\mu) + b_2 P_3(\lambda)P_2(\mu) = \lambda P_2(\lambda)P_2(\mu)$$

$$\underline{b_1 P_1(\mu)P_2(\lambda) + a_2 P_2(\mu)P_2(\lambda) + b_2 P_3(\mu)P_2(\lambda) = \mu P_2(\mu)P_2(\lambda)}$$

$$b_1[P_1(\lambda)P_2(\mu) - P_1(\mu)P_2(\lambda)] + b_2[P_3(\lambda)P_2(\mu) - P_3(\mu)P_2(\lambda)] = (\lambda - \mu)[P_2(\lambda)P_2(\mu)] \qquad (1.4.4)$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2}P_{n-2}(\lambda)P_{n-1}(\mu) + a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu) + b_{n-1}P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) = \lambda P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu)$$

$$\underline{b_{n-2}P_{n-2}(\mu)P_{n-1}(\lambda) + a_{n-1}P_{n-1}(\mu)P_{n-1}(\lambda) + b_{n-1}P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda) = \lambda P_{n-1}(\mu)P_{n-1}(\lambda)}$$

$$b_{n-2}[P_{n-2}(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_{n-2}(\mu)P_{n-1}(\lambda)] + b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] = (\lambda - \mu)[P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu)] \qquad (1.4.5)$$

Como se observa, los términos con coeficiente en a_j se van eliminando, finalmente si sumamos 1.4.2, 1.4.3, 1.4.4,..., 1.4.5, queda:

$$b_0[P_1(\lambda) - P_1(\mu)] = \lambda - \mu$$

$$b_0[P_1(\mu) - P_1(\lambda)] - b_1[P_2(\lambda)P_1(\mu) - P_2(\mu)P_1(\lambda)] = (\lambda - \mu)[P_1(\lambda)P_1(\mu)]$$

$$b_1[P_1(\lambda)P_2(\mu) - P_1(\mu)P_2(\lambda)] + b_2[P_3(\lambda)P_2(\mu) - P_3(\mu)P_2(\lambda)] = (\lambda - \mu)[P_2(\lambda)P_2(\mu)]$$

$$\vdots$$

$$b_{n-2}[P_{n-2}(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_{n-2}(\mu)P_{n-1}(\lambda)] + b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] =$$
$$= (\lambda - \mu)[P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu)]$$

Al sumar los polinomios, los términos del $j - \acute{e}simo$ polinomio del lado izquierdo se eliminan con los términos del $j+1-en\acute{e}simo$ polinomio del lado izquierdo, y sólo queda:

$$b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] =$$
$$= (\lambda - \mu) + (\lambda - \mu)[P_1(\lambda)P_1(\mu)](\lambda - \mu)[P_2(\lambda)P_2(\mu)] + \ldots + (\lambda - \mu)[P_{n-1}(\lambda)P_{n-1}(\mu)]$$

$$\therefore b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] = (\lambda - \mu)\sum_{j=0}^{n-1} P_j(\lambda)P_j(\mu)$$

□

Teorema 1.4.1. *La multiplicidad de las raíces de Q es 1*

Demostración. Sean cualesquiera λ y $\mu \in \mathbb{C}$. Entonces

$$b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] = b_{n-1}P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu) - b_{n-1}P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)]$$

Y de la ecuación 1.4.1 se tiene

$$Q_n(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) - a_n P_n(\lambda) - b_{n-1}P_{n-1}(\lambda)$$

así que

$$b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + a_n P_n(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) - Q_n(\lambda)$$

y también

$$b_{n-1}P_{n-1}(\mu) + a_n P_n(\mu) = \mu P_n(\mu) - Q_n(\mu)$$

multiplicando cruzado por $P_n(\mu)$ y $P_n(\lambda)$ respectivamente tenemos:

$$P_n(\lambda)\, b_{n-1}P_{n-1}(\mu) + P_n(\lambda)\, a_n P_n(\mu) = P_n(\lambda)\, \mu P_n(\mu) - P_n(\lambda)\, Q_n(\mu)$$

$$P_n(\mu)\, b_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + P_n(\mu)\, a_n P_n(\lambda) = P_n(\mu)\, \lambda P_n(\lambda) - P_n(\mu)\, Q_n(\lambda)$$

y restando la segunda de la primera:

$$b_{n-1}(P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu)-P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)) = -(\lambda-\mu)P_n(\lambda)P_n(\mu)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)+P_n(\mu)Q_n(\lambda)$$

Y por el lema 1.4.1

$$b_{n-1}[P_n(\lambda)P_{n-1}(\mu)-P_n(\mu)P_{n-1}(\lambda)] = (\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n-1}P_j(\lambda)P_j(\mu)$$

Entonces

$$-(\lambda-\mu)P_n(\lambda)P_n(\mu)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)+P_n(\mu)Q_n(\lambda) = (\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n-1}P_j(\lambda)P_j(\mu)$$

$$-(\lambda-\mu)P_n(\lambda)P_n(\mu)-(\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n-1}P_j(\lambda)P_j(\mu) = P_n(\lambda)Q_n(\mu)-P_n(\mu)Q_n(\lambda)$$

$$(\lambda-\mu)P_n(\lambda)P_n(\mu)+(\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n-1}P_j(\lambda)P_j(\mu) = P_n(\mu)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)$$

Concluimos de la última igualdad que

$$(\lambda-\mu)\sum_{j=0}^{n}P_j(\lambda)P_j(\mu) = P_n(\mu)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)$$

Por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{n}P_j(\lambda)P_j(\mu) = \frac{1}{(\lambda-\mu)}[P_n(\mu)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)]$$

Tomemos de esta expresión el límite cuando $\lambda \to \mu$

$$\lim_{\lambda\to\mu}\sum_{j=0}^{n}P_j(\lambda)P_j(\mu) = \lim_{\lambda\to\mu}\frac{1}{(\lambda-\mu)}[P_n(\mu)Q_n(\lambda)-P_n(\lambda)Q_n(\mu)]$$

como $P_0 \equiv 1$, λ y μ están en $\mathbb{R}$ y los coeficientes de P también son reales

$$\lim_{\lambda\to\mu}\sum_{j=0}^{n}P_j(\lambda)P_j(\mu) \geq 1$$

porque al menos el primer sumando es 1, mientras que en el lado derecho tenemos un límte de la forma $\frac{0}{0}$, que de acuerdo a la regla de L'Hopital, tiende a

$$P_n(\mu)Q_n'(\mu)-P_n'(\mu)Q_n(\mu)$$

decir

$$P_n(\mu)\,Q_n'(\mu) - P_n'(\mu)\,Q_n(\mu) \geq 1$$

Por lo tanto $Q_n(\mu)$ y $Q_n'(\mu)$ no pueden anularse en el mismo punto y μ no puede ser raíz de $Q_n(\mu)$ y $Q_n'(\mu)$. Como μ fue arbitrario, entonces concluimos que $Q_n(\lambda)$ no tiene raíces múltiples. □

Corolario 1.4.1. *Los valores propios de J tienen multiplicidad 1*

Demostración. Como se acaba de demostrar, $Q_n(\lambda)$ tiene $n+1$ ceros distintos. Por lo tanto, J tiene $n+1$ autovalores distintos y los autoespacios correspondientes deben tener dimensión 1. □

Lo anterior implica que la matriz J tiene $n+1$ vectores propios que son ortogonales y forman una base ortogonal de $\mathbb{C}^{n+1}$:

$$\overrightarrow{c}_j = (1, P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j), \ldots, P_n(\lambda_j)) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

Al multiplicar cada vector por $\|\overrightarrow{c_j}\|^{-1}$, obtenemos una base ortonormal de $\mathbb{C}^{n+1}$

$$e_j = \frac{\overrightarrow{c_j}}{\|\overrightarrow{c_j}\|} = (\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j))^{-1/2}((1, P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j), \ldots, P_n(\lambda_j))$$

Capítulo 2

PROBLEMAS INVERSOS

Para continuar investigando las propiedades de las matrices de Jacobi, en este capítulo se revisarán una serie de teoremas relacionados con problemas inversos de estas matrices.

El problema inverso que abordaremos será la reconstrucción de una matriz de Jacobi a partir de los valores propios de la matriz original y de los valores propios de la matriz truncada. Un problema similar pero con matrices de Jacobi semi-infinitas de la forma

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

es tratado en [7], y se menciona que la solución al problema de la reconstrucción de la matriz a partir de los espectros fue dada por Halilova. Posteriormente el mismo problema, pero en el caso en que las matrices son finitas, ha sido tratado en otros textos del análisis espectral [1], [2], [3]. En este trabajo se ha preferido el artículo de Hochstadt [1] para resaltar la diferencia entre una solución puramente algebráica y otra que comprende herramientas más avanzadas de cálculo y análisis [3], como el caso de la *función m* de Weyl.

La reconstrucción de la matriz utilizando los espectros será el enunciado de los teoremas que veremos a continuación, y que describen además el algoritmo para obtenerla. Antes de iniciar formalmente el enunciado de los teoremas y su demostración es conveniente indicar algunas definiciones así como la notación que emplearemos.

1. Definiciones

Al igual que en el capítulo anterior, por una matriz de Jacobi entenderemos una matriz de la forma:

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

donde todas las a_i, b_i son reales y además las b_i son positivas.

Por J_τ denotaremos la matriz truncada que se obtiene al eliminar el primer renglón y la primera columna de la matriz J

$$J_\tau = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{2.1.2}$$

Sea $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ el conjunto de valores propios de J y $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ el conjunto de valores propios de J_τ. Sus polinomios característicos se definen como:

$$B(\lambda) := det\,(\lambda I - J)$$

$$A(\lambda) := det\,(\lambda I - J_\tau)$$

Y pueden ser escritos como

$$B(\lambda) = \prod_{i=0}^{n} (\lambda - \lambda_i) \tag{2.1.3}$$

$$A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i) \tag{2.1.4}$$

Por otra parte, todos los valores propios son reales y será conveniente ordenarlos de tal forma que

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \tag{2.1.5}$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n \tag{2.1.6}$$

Como se vió en el capítulo anterior, todos los valores propios tienen muliplicidad 1, así que las desigualdades son estrictas. Puede demostrarse (aunque no se hará en este trabajo) que los conjuntos de valores propios se entrelazan de tal forma que

$$\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \lambda_n \tag{2.1.7}$$

$\{\vec{c}_i\}_{i=0}^n$ el conjunto de todos los vectores propios de J entonces:

$$J\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i \tag{2.1.8}$$

cordemos del capítulo anterior que el primer componente de un vector propio de una triz de Jacobi siempre es diferente de 0 y que además siempre puede normalizarse, que podemos asumir que la primera entrada del vector propio $\vec{c}_i$ es diferente de 0 al normalizar el vector es igual a 1.

efinicion 2.1. *Por $\{\delta_k\}$ denotaremos los vectores unitarios canónicos, es decir*

$$\delta_{ij} = 1$$

si $i = j$ y 0 para $i \neq j$ (e.g.)

$$\delta_0 = (1, 0, 0, \ldots 0)$$
$$\delta_1 = (0, 1, 0, \ldots 0)$$
$$\delta_2 = (0, 0, 1, \ldots 0)$$

Notemos que el producto interno $\langle \vec{c}_i, \delta_0 \rangle = 1$, en efecto,

$$\langle \vec{c}_i, \delta_0 \rangle = 1 \cdot 1 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_n \cdot 0 = 1$$

Por último definimos la matriz

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

Fácilmente se ve que

$$S = S^t$$

y que

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es decir S es una matriz ortogonal y $S^2 = I$ donde I es la matriz identidad.

Una vez especificado lo anterior, iniciaremos la sección siguiente enunciando el primer teorema.

. Reconstrucción de la matriz de Jacobi

En esta sección se demostrarán dos teoremas relacionados con la reconstrucción de matriz de Jacobi a partir de dos espectros, el espectro de la matriz original y el ectro de la matriz truncada. Como ya se mencionó al principio de este rema y su demostración, así como otros relacionados con problemas inversos, han sido blicados por varios autores, en esta sección se presentan dos de los teoremas según los nteó y resolvió Harry Hochstadt [1] y se detallan los pasos de sus demostraciones.

eorema 2.2.1. *Sea $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$ el conjunto de valores propios de alguna matriz de Jacobi J $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ el conjunto de valores propios de la matriz truncada J_T. Usando los conjuntos $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ la matriz de Jacobi J puede ser reconstruída de manera única*

Es importante señalar que $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n}$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ no pueden ser asignados arbitrariamente. Asumimos *a priori* que corresponden al menos a una matriz de Jacobi. El teorema únicamente asevera que corresponden a una única matriz de Jacobi y se dará la demostración de un algoritmo para obtenerla.

Demostración. Sea $\overrightarrow{u} \in \mathbb{C}^{n+1}$. Consideremos la ecuación

$$(\lambda I - J)\overrightarrow{u} = \delta_0 \tag{2.2.1}$$

donde λ no es un valor propio de J. Como λ no es un valor propio de J,

$$|\lambda I - J| \neq 0$$

y

$$(\lambda I - J) = \begin{bmatrix} \lambda - a_0 & -b_0 & \dots & 0 \\ -b_0 & \lambda - a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & -b_{n-1} & \lambda - a_n \end{bmatrix}$$

tiene inversa. Recordemos que la regla de Cramer para obtener la solución única a una ecuación del tipo

$$G\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

donde G es una matriz invertible, indica que las entradas x_i del vector $\overrightarrow{x}$ están dadas por

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

donde D_i es el determinante de la matriz G_i obtenida al reemplazar la columna i de G por $\overrightarrow{b}$ y D es el determinante de la matriz G, así que aplicando esta regla para obtener la primera entrada de $\overrightarrow{u}$, digamos $\langle \overrightarrow{u}, \delta_0 \rangle$, reemplazamos la primera columna de $(\lambda I - J)$ por δ_0 y obtenemos G_1,

$$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & -b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -b_1 & \lambda - a_2 & -b_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda - a_n \end{bmatrix}$$

por lo que el primer componente de $\overrightarrow{u}$ está dado por:

$$\langle \overrightarrow{u}, \delta_0 \rangle = \frac{\det G_1}{\det(\lambda I - J)} = \frac{1 * \det(\lambda I - J_\tau)}{\det(\lambda I - J)} \tag{2.2.2}$$

como $\det(\lambda I - J_\tau) = A(\lambda)$ y $\det(\lambda I - J) = B(\lambda)$, tenemos:

$$\langle \overrightarrow{u}, \delta_0 \rangle = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} \tag{2.2.3}$$

es decir $\langle \overrightarrow{u}, \delta_0 \rangle$ está dado en términos de los polinomios característicos de J y J_τ

Como $(\lambda I - J)$ es invertible, $\overrightarrow{u}$ puede ser representado como:

$$\overrightarrow{u} = (\lambda I - J)^{-1} \delta_0 \tag{2.2.4}$$

Y para un un operador T con $\|T\| < 1$, la expansión de Neumann (ver corolario 5.7.1 del apéndice 5.7.1) asegura que

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \tag{2.2.5}$$

Si tomamos $||T||$=máx $|\lambda_i|$ entonces para $|\lambda| >$ máx $|\lambda_i|$

$$\frac{\text{máx}\,|\lambda_i|}{|\lambda|} = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$$

por otra parte;

$$(\lambda I - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$$

Y para $|\lambda| >$ máx $|\lambda_i|$, usando el corolario 5.7.1 del apéndice 5.7.1 se tiene

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k} \tag{2.2.6}$$

De esta ecuación obtenemos

$$(\lambda I - J)^{-1} \delta_0 = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J^k \delta_0}{\lambda^k}$$

tenemos entonces por 2.2.4 que

$$\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^k\delta_0}{\lambda^k}$$

así que

$$\langle\vec{u},\delta_0\rangle = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\langle J^k\delta_0,\delta_0\rangle}{\lambda^k} \tag{2.2.7}$$

Dado que el numerador $A(x)$ es de menor grado que el denominador $B(x)$ y $B(x)$ tiene raíces simples, podemos utilizar la descomposición de fracciones parciales indicada en el apéndice 5.8.1 y vemos que

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)} \tag{2.2.8}$$

Notemos ahora que

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)} = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)}\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}$$

pero

$$\frac{1}{(\lambda-\lambda_i)} = \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)}\left(\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}\right) = \frac{1}{\lambda(1-\frac{\lambda_i}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1-\frac{\lambda_i}{\lambda})}$$

y recordemos que para las series geométricas con $r < 1$ se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$$

o sea que para $\frac{\lambda_i}{\lambda} < 1$

$$\frac{1}{1-\frac{\lambda_i}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^k}{\lambda^k}$$

es decir,

$$\frac{1}{\lambda-\lambda_i} = \frac{1}{\lambda}\frac{1}{(1-\frac{\lambda_i}{\lambda})} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda_i^k}{\lambda^k}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)(\lambda-\lambda_i)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(\lambda-\lambda_i)} \frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{\lambda^k}) \frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{\lambda^k} \frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k}{\lambda^k} \frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}\end{aligned}$$

o sea que

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.9}$$

Ahora bien, por 2.2.3 el lado izquierdo de 2.2.7 y 2.2.9 coinciden, y por comparación de los coeficientes del lado derecho:

$$\langle J^k \delta_0, \delta_0 \rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}, k = 1, 2, 3, \dots n \tag{2.2.10}$$

Y 2.2.10 ya nos permite derivar la conclusión del teorema. Para $k = 1$ tenemos:

$$\langle J\delta_0, \delta_0 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle =$$

$$= \langle (a_0, b_0, 0, 0, \dots 0), (1, 0, 0, \dots 0) \rangle = a_0$$

i.e.

$$\langle J\delta_0, \delta_0 \rangle = a_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.11}$$

Para k=2, tenemos

$$\langle J^2\delta_0, \delta_0 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} a_0^2 + b_0^2 \\ b_0 a_0 + a_1 b_0 \\ b_0 b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = a_0^2 + b_0^2$$

$$\langle J^2\delta_0, \delta_0\rangle = a_0^2 + b_0^2 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^2 A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.12}$$

Y como a_0 ya es conocida por 2.2.11, 2.2.12 determina b_0^2, como requerimos que b_i sea positiva para toda i, b_0 queda completamente determinada.

Hemos ya calculado el primer renglón de J, observemos que

$$J\delta_0 = (a_0, b_0, 0, 0, \ldots, 0) = a_0\delta_0 + b_0\delta_1$$

y que

$$\begin{aligned} J^2\delta_0 = J(J\delta_0) &= J(a_0\delta_0 + b_0\delta_1) \\ &= a_0 J\delta_0 + b_0 J\delta_1 \\ &= a_0(a_0, b_0, \ldots, 0) + b_0(b_0, a_1, b_1, \ldots, 0) \\ &= (a_0^2 + b_0^2, b_0(a_0 + a_1), b_0 b_1, 0, \ldots, 0) \\ &= (a_0^2 + b_0^2)\delta_0 + b_0(a_0 + a_1)\delta_1 + b_0 b_1 \delta_2 \end{aligned}$$

Es decir

$$J^2\delta_0 = d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 \tag{2.2.13}$$

Para ciertos d_i que dependen de a_0, a_1, b_0, b_1

Para $k = 3$ tenemos, por cálculo directo que

$$\begin{aligned} J^3\delta_0 = (a_0(a_0^2 + b_0^2) + b_0^2(a_0 + a_1), \\ (a_0^2 + b_0^2) + b_0 a_1(a_0 + a_1) + b_0 b_1^2, \\ b_0 + b_0 b_1(a_0 + a_1) + b_0 b_1 a_2, b_0 b_1 b_2, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

luego

$$\langle J^3\delta_0, \delta_0\rangle = a_0(a_0^2 + b_0^2) + b_0^2(a_0 + a_1) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^3 A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.14}$$

Como a_0 y b_0 son conocidas 2.2.14 determina a_1

Análogamente que $J\delta_0$ y $J^2\delta_0$, $J^3\delta_0$ puede ser escrita como

$$J^3\delta_0 = d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + d_3\delta_3 \tag{2.2.15}$$

Para ciertos d_i que dependen de $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$

Al iterar con $k = 4$ obtendremos b_1 y el segundo renglón quedará completamente determinado. Notemos que al determinar este renglón los coeficientes d_i de 2.2.13 son todos conocidos

Similarmente, al iterar con $k = 5$ y $k = 6$ obtendremos a_2 y b_2 y el tercer renglón quedará determinado, al igual que los coeficientes de 2.2.15

Para completar este argumento, asumiremos que los primeros k renglones de J ya han sido determinados (Ver Apéndice 5.5.2) y los coeficientes d_i de

$$J^k\delta_0 = d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \ldots + d_k\delta_k \tag{2.2.16}$$

son todos conocidos y dependen de $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ y como se demuestra en la proposición 5.2.1 del apéndice 5.2

$$d_k = b_0 b_1 b_2 \ldots b_{k-1}$$

es positivo.

Consideremos ahora $J^{k+1}\delta_0$. Por 2.2.16

$$\begin{aligned} J^{k+1}\delta_0 &= J(J^k\delta_0) = J(d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \ldots + d_{k-1}\delta_{k-1} + d_k\delta_k) \\ &= d_0 J\delta_0 + d_1 J\delta_1 + d_2 J\delta_2 + \ldots + d_{k-1}J\delta_{k-1} + d_k J\delta_k \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

y como

$$J\delta_k = b_{k-1}\delta_{k-1} + a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1} \tag{2.2.18}$$

combinando 2.2.17 y 2.2.18 tenemos

$$\begin{aligned} J^{k+1}\delta_0 &= d_0 J\delta_0 + d_1 J\delta_1 + d_2 J\delta_2 + \ldots + d_{k-1}(b_{k-2}\delta_{k-2} + a_{k-1}\delta_{k-1} + b_{k-1}\delta_k) + \\ &\quad + d_k(b_{k-1}\delta_{k-1} + a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) \\ &= d_0 J\delta_0 + d_1 J\delta_1 + \ldots + d_{k-1}b_{k-2}\delta_{k-2} + d_{k-1}a_{k-1}\delta_{k-1} + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + \\ &\quad + d_k b_{k-1}\delta_{k-1} + d_k a_k\delta_k + d_k b_k\delta_{k+1} \\ &= d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + d_k b_{k-1}\delta_{k-1} + d_{k-1}a_{k-1}\delta_{k-1} + \ldots + d_1 J\delta_1 + d_0 J\delta_0 \end{aligned}$$

luego

$$\left\langle J^{2k+1}\delta_0, \delta_0\right\rangle = \left\langle J^{k+1}\delta_0, J^k\delta_0\right\rangle =$$

$$= \langle (d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + \ldots + d_1 J\delta_1 + d_0 J\delta_0), (d_k\delta_k + \ldots + d_2\delta_2 + d_1\delta_1 + d_0\delta_0)\rangle \tag{2.2.19}$$

Y por las propiedades del producto interno 2.2.19 es igual a

$$\begin{aligned} &\langle d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + \ldots + d_1 J\delta_1 + d_0 J\delta_0, d_k\delta_k\rangle + \\ &+ \langle d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + \ldots + d_1 J\delta_1 + d_0 J\delta_0), d_{k-1}\delta_{k-1}\rangle + \ldots + \\ &+ \langle d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) + d_{k-1}b_{k-1}\delta_k + \ldots + d_1 J\delta_1 + d_0 J\delta_0), d_0\delta_0\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}), d_k\delta_k\rangle + \langle d_{k-1}b_{k-1}\delta_k, d_k\delta_k\rangle + \ldots + \langle d_0 J\delta_0, d_k\delta_k\rangle + \ldots +$$
$$+ \langle d_k(a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}), d_0\delta_0\rangle + \langle d_{k-1}b_{k-1}\delta_k, d_0\delta_0\rangle + \ldots + \langle d_0 J\delta_0, d_0\delta_0\rangle$$
$$= \langle d_k a_k\delta_k, d_k\delta_k\rangle + \langle b_k\delta_{k+1}, d_k\delta_k\rangle + \ldots$$

$$= d_k^2 a_k + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^{2k+1} A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.20}$$

los términos indicados por puntos dependen de $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ y son todos conocidos,además d_k^2 es estrictamente positivo , así que la expresión anterior determina a_k. Similarmente,

$$\left\langle J^{2k+2}\delta_0, \delta_0\right\rangle = \left\langle J^{k+1}\delta_0, J^{k+1}\delta_0\right\rangle = d_k^2(a_k^2 + b_k^2) + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^{2k+2} A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} \tag{2.2.21}$$

determina b_k. Así pues, los primeros $k+1$ renglones de J han sido determinados y sucesivamente todos sus renglones pueden ser encontrados □

El procedimiento anterior nos lleva a una única matriz J. Si hubiera una segunda matriz de Jacobi $\widetilde{J}$ con los mismos datos, vemos que

$$\left\langle J^k\delta_0, \delta_0\right\rangle = \left\langle \widetilde{J}^k\delta_0, \delta_0\right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} k = 0, 1, 2, 3, \ldots n \tag{2.2.22}$$

y debido al algoritmo que acabamos de explicar, la matriz se reconstruye unívocamente a partir de

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}. \tag{2.2.23}$$

Por lo tanto $J = \widetilde{J}$.

Como muestra 2.2.9, J depende de los datos $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ de una manera no lineal, sin embargo depende de estos conjuntos de la siguiente forma. Supóngase que tomamos colecciones de autovalores $\left\{\widetilde{\lambda}_i\right\}_{i=0}^n$ y $\{\widetilde{\mu}_i\}_{i=1}^n$ correspondientes a otras matrices $\widetilde{J}$ y $\widetilde{J}_r$ respectivamente tales que, para cierta $\varepsilon > 0$ se cumple que:

$$\left|\lambda_i - \widetilde{\lambda}_i\right| < \varepsilon \quad i = 0, 1, 2, \ldots n \tag{2.2.24}$$

y

$$|\mu_i - \widetilde{\mu}_i| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.2.25}$$

Entonces para toda $i, j = 1, 2, \ldots, n+1$ se tiene

$$\left|t_{ij} - \widetilde{t}_{ij}\right| < \varepsilon$$

donde t_{ij} y $\widetilde{t}_{ij}$ son las entradas de las matrices J y $\widetilde{J}$ reconstruídas a partir de sus espectros y de los espectros de las matrices truncadas J_τ y $\widetilde{J}_\tau$. En este sentido diremos que J depende de $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ de una manera *continua* y es el enunciado del teorema siguiente.

Teorema 2.2.2. *Sea J una matriz de Jacobi con eigenvalores dados $\{\lambda_i\}_{i=0}^n$ y sea J_τ la correspondiente matriz truncada con eigenvalores dados $\{\mu_i\}_{i=1}^n$. J depende continuamente de los datos dados.*

Demostración. Se demostrará que al tomar otros conjuntos de valores suficientemente cercanos a los eigenvalores dados, la matriz que puede reconstruirse para estos valores está tan cercana como se quiera a la matriz reconstruída con los datos originales, en el sentido de que las entradas de las matrices están arbitrariamente cercanas.

Comenzaremos tomando $\varepsilon > 0$ y dos polinomios cualesquiera $A_n(t)$ y $\widetilde{A}_n(t)$ de grado n tales que

$$A_n(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \mu_i)\,, \quad \widetilde{A}_n(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - \widetilde{\mu}_i)$$

con

$$|\mu_i - \widetilde{\mu}_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.2.26}$$

Supongamos, sin pérdida de generalidad que

$$\widetilde{\mu}_i = \mu_i + \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{2.2.27}$$

para ciertas $\gamma_i \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces

$$|\gamma_i| < \varepsilon \Leftrightarrow |\mu_i - \widetilde{\mu}_i| < \varepsilon$$

Tomemos $n = 2$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrario pero fijo.

$$\begin{aligned}\widetilde{A}_2(t_0) = \prod_{i=1}^{2} (t_0 - \widetilde{\mu}_i) &= \prod_{i=1}^{2} (t_0 - (\mu_i + \gamma_i)) \\ &= t_0^2 - t_0\mu_2 - t_0\gamma_2 - \mu_1 t_0 \;\; + \mu_1\mu_2 + \mu_1\gamma_2 - \gamma_1 t_0 + \gamma_1\mu_2 + \gamma_1\gamma_2\end{aligned}$$

y

$$A_2(t_0) = \prod_{i=1}^{2} (t_0 - \mu_i) = t_0^2 - t_0\mu_2 - t_0\mu_1 + \mu_1\mu_2$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left|A_2(t_0) - \widetilde{A}_2(t_0)\right| &= |-t_0\gamma_2 + \mu_1\gamma_2 - \gamma_1 t_0 + \gamma_1\mu_2 + \gamma_1\gamma_2| \\ &\le |-t_0\gamma_2| + |\mu_1\gamma_2| - |\gamma_1 t_0| + |\gamma_1\mu_2| + |\gamma_1\gamma_2| \\ &\le c_{t_0}\varepsilon\end{aligned}$$

Para una cierta c_{t_0}

Supongamos ahora que el resultado es cierto para $n = k$

$$\left|A_k(t_0) - \widetilde{A}_k(t_0)\right| \leq c_{k,t_0}\varepsilon$$

Para una cierta c_{k,t_0}

Como

$$A_{k+1}(t_0) = A_k(t_0)(t_0 - \mu_{k+1})$$

y

$$\widetilde{A}_{k+1}(t_0) = \widetilde{A}_k(t_0)(t_0 - \widetilde{\mu}_{k+1})$$

Se tiene

$$\begin{aligned}
|A_{k+1}(t_0) - \widetilde{A}_{k+1}(t_0)| &= |A_k(t_0)(t_0 - \mu_{k+1}) - \widetilde{A}_k(t_0 - \widetilde{\mu}_{k+1})| \\
&= A_k(t_0)(t_0 - \mu_{k+1}) - \widetilde{A}_k(t_0)(t_0 - (\mu_{k+1} + \gamma_{k+1})) \\
&= |A_k(t_0)t_0 - A_k(t_0)\mu_{k+1} - \widetilde{A}_k(t_0)t_0 + \widetilde{A}_k(t_0)\mu_{k+1} + \widetilde{A}_k(t_0)\gamma_{k+1})| \\
&= |(A_k(t_0) - \widetilde{A}_k(t_0))(t_0 - \mu_{k+1}) + \widetilde{A}_k(t_0)\gamma_{k+1}| \\
&\leq |A_k(t_0) - \widetilde{A}_k(t_0)||(t_0 - \mu_{k+1})| + |\widetilde{A}_k(t_0)||\gamma_{k+1}| \\
&< c_{k,t_0}\varepsilon|(t_0 - \mu_{k+1})| + |\widetilde{A}_k(t_0)|\varepsilon \leq c_{k+1,t_0}\varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$|A_{k+1}(t_0) - \widetilde{A}_{k+1}(t_0)| \leq c_{k+1,t_0}\varepsilon \tag{2.2.28}$$

Para una cierta c_{k+1,t_0}. Como A_n es un polinomio, y los polinomios son continuos, sabemos que para toda $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe δ tal que si

$$|\lambda_j - \widetilde{\lambda}_j| < \delta$$

Entonces

$$|A_n(\lambda_j) - A_n(\widetilde{\lambda}_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2.29}$$

Por otra parte, si $\quad \delta < \frac{\varepsilon}{2}c_{n,\widetilde{\lambda}_j} \quad$ y $\quad |\mu_j - \widetilde{\mu}_j| < \delta$ entonces por 2.2.28

$$|A(\widetilde{\lambda}_j) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_j)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.2.30}$$

Luego

$$|A(\lambda_j) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_j)| \leq |A(\lambda_j) - A(\widetilde{\lambda}_j)| + |A(\widetilde{\lambda}_j) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_j)|$$

De esta forma, por 2.2.29 y 2.2.30

$$|A(\lambda_j) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_j)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{2.2.31}$$

Análogamente, pero un poco más complicado por la forma en que entran los números λ_j en el polinomio B', tenemos que para toda $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si

$$|\lambda_j - \widetilde{\lambda}_j| < \delta \quad \Rightarrow |B'(\lambda_j) - \widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_j)| < \varepsilon \tag{2.2.32}$$

Ahora, por 2.2.10

$$\langle J^k\delta_0, \delta_0\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}, k = 1, 2, 3, \ldots n$$

luego

$$|\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| = |\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^k (\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)})| \leq$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$

y

$$|\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| = |\frac{A(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)B'(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$

sumando y restando $\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)$ y agrupando términos

$$|\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| = |\frac{A(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)B'(\lambda_i) + \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$
$$= |\frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)[\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - B'(\lambda_i)] + \widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)[A(\lambda_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)]}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$

o sea que

$$\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| = \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)[\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - B'(\lambda_i)] + \widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)[A(\lambda_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)]}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$
$$\leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)[\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i) - B'(\lambda_i)]}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| + |\frac{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)[A(\lambda_i) - \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)]}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$

Así por 2.2.31 y 2.2.32

$$|\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i^k \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| \leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)\varepsilon}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| + |\frac{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)\varepsilon}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$
$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i^k||\frac{\widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}| + |\frac{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}{B'(\lambda_i)\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|$$
$$\leq \varepsilon\eta_0$$

Por lo tanto

$$|\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_i^k A(\lambda_i)}{B'(\lambda_i)}-\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda_i^k \widetilde{A}(\widetilde{\lambda}_i)}{\widetilde{B}'(\widetilde{\lambda}_i)}|\leq\varepsilon(\eta_0) \tag{2.2.33}$$

con $\eta_0 > 0$.

Por 2.2.10 las entradas de la matriz se obtienen al variar k y como 2.2.33 es cierta para cualquier k, concluimos que las entradas de las matrices J y $\widetilde{J}$ estan arbitrariamente cercanas siempre que $|\lambda_i - \widetilde{\lambda}_i| < \varepsilon$ y $|\mu_i - \widetilde{\mu}_i| < \varepsilon$

Por lo tanto J depende continuamente los datos dados. □

Se revisará ahora un problema similar al del teorema 2.2.1 pero con una variación. Se mostrará que si J satisface algunas propiedades adicionales de simetría, un solo espectro es necesario para determinarla

Teorema 2.2.3. *Sea J una matriz de Jacobi que satisface la siguiente propiedad de simetría:*

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, a_i = a_{n-i}$$

$$b_0 = b_{n-1}, b_1 = b_{n-2}, b_i = b_{n-i-1}$$

Para toda i. Entonces, si el espectro $\{\lambda_i\}$ de J es conocido, J está definida unívocamente y puede ser reconstruída como en el Teorema 2.2.1

Demostración. Para reconstruir J, sería deseable seguir el mismo procedimiento del teorema 2.2.1, pues hemos visto ya su eficacia. El punto de partida fue la fórmula:

$$\left\langle (\lambda I - J)^{-1}\delta_0, \delta_0\right\rangle = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} \tag{2.2.34}$$

donde $B(\lambda)$ es el espectro de la matriz J Ahora $B(\lambda)$ está dado, pero $A(\lambda)$ no, así que 2.2.3 no es útil. No obstante lo anterior, se describirá un procedimiento que nos permitirá calcular $A(\lambda)$, de tal forma que podremos utilizar nuevamente el algoritmo descrito en 2.2.1.

Recordemos que cualquier elemento de un espacio vectorial puede ser escrito como una combinación lineal de los elementos de una cierta base $\{\overrightarrow{v}_i\}$:

$$\overrightarrow{u} = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\overrightarrow{v}_i$$

En esta caso, sabemos que los vectores propios $\overrightarrow{c}_i$ forman la base ortonormal $\{\overrightarrow{c}_i\}$ así que si tomamos $\overrightarrow{\delta_0}$ podemos expresarlo como

$$\overrightarrow{\delta_0} = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\overrightarrow{c}_i$$

para ciertos escalares α_i

Sea $\vec{c}_j \in \{\vec{c}_i\}$ fijo pero arbitrario, entonces

$$\langle \vec{c}_j, \delta_0 \rangle = \left\langle \vec{c}_j, \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{c}_i \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} \langle \vec{c}_j, \alpha_i \vec{c}_i \rangle = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \langle \vec{c}_j, \vec{c}_i \rangle$$

pero $\langle \vec{c}_j, \vec{c}_i \rangle = 0$ para $i \neq j$ por la ortogonalidad de la base, entonces

$$\langle (\vec{c}_j, \delta_0) \rangle = \alpha_i \langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle$$

Por lo tanto

$$\alpha_i = \frac{\langle \vec{c}_j, \delta_0 \rangle}{\langle \vec{c}_j, \vec{c}_j \rangle} = \frac{\langle \vec{c}_j, \delta_0 \rangle}{\|\vec{c}_j\|^2}$$

lo anterior implica que

$$\delta_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \delta_0, \vec{c}_j \rangle \vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|^2}$$

pero como se mostró en el inicio del teorema 2.2.1

$$\langle \delta_0, \vec{c}_j \rangle = 1$$

por lo que

$$\delta_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|^2} \tag{2.2.35}$$

entonces,

$$(\lambda I - J)^{-1} \delta_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\vec{c}_j}{\|\vec{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)} \qquad y \tag{2.2.36}$$

$$\left\langle (\lambda I - J)^{-1} \delta_0, \delta_0 \right\rangle = \sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \vec{c}_j, \delta_0 \rangle}{\|\vec{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\vec{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)} \tag{2.2.37}$$

Pero $\left\langle (\lambda I - J)^{-1} \delta_0, \delta_0 \right\rangle = \dfrac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$

$$\Rightarrow A(\lambda) = B(\lambda) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\vec{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)} \tag{2.2.38}$$

Se mostrará ahora que $\|\vec{c}_j\|$ puede ser calculada, de manera que $A(\lambda)$ quedará completamente determinada. La simetría de J indicada en el enunciado del teorema puede ser descrita como:

$$SJS = J \tag{2.2.39}$$

donde S está definida como en el principio de esta sección. En efecto,

$$SJS = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-2} & b_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{n-3} & a_{n-2} & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

y como

$$a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots a_i = a_{n-i}$$

y

$$b_0 = b_{n-1}, b_1 = b_{n-2}, \dots b_i = b_{n-i-1}$$

entonces $SJS = J$, luego, si $\vec{c}_i$ es un vector propio,

$$J\vec{c}_i = \lambda_i \vec{c}_i \tag{2.2.40}$$

y puesto que $SS = S^2 = I$

$$SJSS\vec{c}_i = \lambda_i S\vec{c}_i, \tag{2.2.41}$$

de donde

$$JS\vec{c}_i = \lambda_i S\vec{c}_i \tag{2.2.42}$$

Por otra parte, dado que en este caso todos los eigenespacios son unidimesionales (pues la multiplicidad de cada raíz del polinomio característico es 1), 2.2.40 y 2.2.42 muestran que $S\vec{c}_i$ y $\vec{c}_i$ son linealmente dependientes, en efecto, del hecho de que los espacios son unidimensionales, se infiere que el número de elementos que tiene una base es 1, y $\alpha S\vec{c}_i + \beta\vec{c}_i = 0$ tiene solución no trivial, es decir, todos los elementos del espacio son múltiplos de este elemento, así que

$$S\vec{c}_i = k_i \vec{c}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \tag{2.2.43}$$

para ciertos escalares k_i

Utilizando el hecho de que S es ortogonal y 2.2.43 tenemos

$$\| S\vec{c}_i\| = \|\vec{c}_i\| = |k_i| \, \|\vec{c}_i\|$$

por lo que $|k_i| = 1$ y $k_i = \pm 1$.

Consideremos ahora la expresión $\langle(\lambda I - J)^{-1}\delta_0, \delta_n\rangle$ que es el último componente de $(\lambda I - J)^{-1}\delta_0$. Aplicando la regla de Cramer al igual que en el teorema 2.2.1, tenemos que

$$\left\langle(\lambda I - J)^{-1}\delta_0, \delta_n\right\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \lambda - a_0 & -b_0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & \lambda - a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ 0 & -b_1 & \lambda - a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}{B(\lambda)}$$

Para obtener el determinante del numerador, procederemos a calcularlo por menores, y en la primera iteración tomaremos como pivote la última columna. El único menor que no se anula es el menor de 1, que es el determinante de la submatriz

$$\begin{vmatrix} -b_0 & \lambda - a_1 & -b_1 & \dots \\ 0 & -b_1 & \lambda - a_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

para calcular este determinante y los siguientes utilizaremos como pivote la primera columna, y vemos que lo único que no se anula es el menor de

$$-b_0, -b_1, \dots, -b_{n-1}$$

es decir

$$\begin{vmatrix} \lambda - a_0 & -b_0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & \lambda - a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ 0 & -b_1 & \lambda - a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot b_0 \cdot b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1}$$

notemos que cada uno de los sucesivos menores cambian de signo por la posición que ocupan las b_i Por lo tanto

$$\left\langle(\lambda I - J)^{-1}\delta_0, \delta_n\right\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \lambda - a_0 & -b_0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_0 & \lambda - a_1 & -b_1 & \dots & 0 \\ 0 & -b_1 & \lambda - a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}}{B(\lambda)} \tag{2.2.44}$$

$$= \frac{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{B(\lambda)} \tag{2.2.45}$$

Recordemos ahora que

$$(\lambda I - J)^{-1}\delta_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{\overrightarrow{c}_j}{\|\overrightarrow{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)}$$

y utilizando la descomposición en fracciones parciales indicada en el teorema 2.2.1 (ver apéndice) tenemos:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\langle \overrightarrow{c}_j, \delta_n \rangle}{\|\overrightarrow{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{B'(\lambda_j)(\lambda - \lambda_j)} \tag{2.2.46}$$

Calcularemos ahora $\langle \overrightarrow{c}_j, \delta_n \rangle$. Como $S\delta_n = \delta_0$, (pues $S\delta_n$ es la última columna de S), entonces

$$\langle \overrightarrow{c}_j, \delta_n \rangle = \langle S\overrightarrow{c}_j, S\delta_n \rangle = k_i \langle \overrightarrow{c}_j, \delta_0 \rangle = k_i \tag{2.2.47}$$

así que

$$|\langle \overrightarrow{c}_j, \delta_n \rangle| = 1$$

y despejando $\|\overrightarrow{c}_j\|^2$ tenemos

$$\|\overrightarrow{c}_j\|^2 = \frac{|B'(\lambda)|}{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}} \tag{2.2.48}$$

Recordemos ahora que por 2.2.38

$$A(\lambda) = B(\lambda) \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\|\overrightarrow{c}_j\|^2 (\lambda - \lambda_j)}$$

y por 2.2.34

$$\left\langle (\lambda I - J)^{-1} \delta_0, \delta_0 \right\rangle = \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

entonces

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(\lambda - \lambda_j)} \left(\frac{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{|B'(\lambda)|} \right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}}{|B'(\lambda)| (\lambda - \lambda_j)} \tag{2.2.49}$$

Para determinar la constante $b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$, tenemos que

$$A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i)$$

y $B(\lambda) = \prod_{i=0}^{n} (\lambda - \lambda_i)$, entonces

$$\frac{\lambda A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{\lambda \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \mu_i)}{\prod_{i=0}^{n} (\lambda - \lambda_i)}$$

$$= \frac{\lambda\left[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\right]}{(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)}$$

Por lo tanto

$$\frac{\lambda A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{\lambda\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)\left[(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\right]}{\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right)(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)}$$

$$= \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)\left[\frac{(\lambda-\lambda_1)}{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_2)}{\lambda}\cdots\frac{(\lambda-\lambda_n)}{\lambda}\right]}{\frac{(\lambda-\lambda_0)}{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_1)}{\lambda}\cdots\frac{(\lambda-\lambda_n)}{\lambda}}$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\right]}{\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\cdots\left(\frac{\lambda}{\lambda}-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)} = \frac{\left[\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\right]}{\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)}$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda A(\lambda)}{B(\lambda)} = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1\left[\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)\right]}{\left(1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\cdots\left(1-\frac{\lambda_n}{\lambda}\right)} = 1$$

Por lo que

$$b_0 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n}(1/B'(\lambda))}$$

Entonces el lado derecho de 2.2.49 es completamente conocido y $A(\lambda)$ es también completamente conocida. A partir de este punto puede utilizarse el procedimiento del teorema 2.2.1 para construir una única matriz J con las propiedades requeridas. □

Capítulo 3

PROBLEMAS INVERSOS Y LA *función m* DE WEYL

En este capítulo abordaremos nuevamente el problema visto en el capítulo precedente, sin embargo revisaremos la solución con una herramienta más moderna que la utilizada por Hochstadt y que permite demostrar el mismo resultado de una manera más simple. Esta demostración del teorema enunciado por Hochstadt, se debe a Barry Simon y Fritz Gesztezy [3]. El punto de partida será la función espectral y la función m de Weyl, por lo cual empezaremos con algunas definiciones que nos ayudarán a entender estos conceptos. Iniciaremos esta sección con la Integral de Riemann-Stieltjes.

3.1. La Integral de Riemann-Stieltjes

En esta sección todos los intervalos $[a, b]$ serán compactos y todas las funciones designadas por f, g, α, β, etc., serán funciones reales definidas y acotadas en $[a, b]$, cabe mencionar que las definiciones son tomadas según [6]

Definicion 3.1. *Partición de un intervalo.*

Sea $[a, b]$ *un intervalo compacto. Una Partición de* $[a, b]$ *es un conjunto finito de puntos, por ejemplo*

$$D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

Una partición D' de $[a, b]$ es más fina que D (o un *refinamiento* de D) si $D \subseteq D'$, que se expresa también escribiendo $D' \supseteq D$. El símbolo $\Delta\alpha_k$ designa la diferencia $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$, luego

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta\alpha_k = \alpha(b) - \alpha(a)$$

El conjunto de todas las posibles particiones de $[a,b]$ se designa por $\mathbb{D}[a,b]$. La norma de una partición D es la longitud del mayor de los subintervalos de D y se denota por medio de $\|D\|$

Notemos que $D' \supseteq D$ implica $\|D'\| \leq \|D\|$.

Definicion 3.2. *Sumas de Riemann-Stieltjes. Sea $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de $[a,b]$ y sea t_k un punto del subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$. Sea f una función real acotada sobre $[a,b]$ y α una función no decreciente sobre $[a,b]$. Una suma de la forma*

$S(D, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta\alpha_k$

se llama una suma de Riemann-Stieltjes de f respecto de α.

Definicion 3.3. *Integral de Riemann-Stieltjes [6]. Sea f una función real acotada sobre $[a,b]$ y α una función monótona creciente sobre $[a,b]$.Diremos que f es Riemann-integrable respecto de α en $[a,b]$, y escribiremos $f \in R(\alpha)$ en $[a,b]$ si existe un número A que satisface la siguiente propiedad:para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición D_ε de $[a,b]$ tal que, para cada partición D más fina que D_ε y para cada elección de los puntos t_k del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$, se tiene*

$$|S(D, f, \alpha) - A| < \varepsilon$$

Cuando tal número A existe, es único y se representa por medio de $\int_a^b f d\alpha$ o por medio de $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$. Diremos también que *existe* la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f d\alpha$. Las funciones f y α se denominan, respectivamente *integrando* e *integrador*. En el caso particular en que $\alpha(x) = x$, escribiremos $S(D, f)$ en vez de $S(D, f, \alpha)$, y $f \in R$ en vez de $f \in R(\alpha)$. La integral se llama entonces integral de Riemann y se designa por $\int_a^b f dx$ o por $\int_a^b f(x) dx$. El valor numérico de $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ depende exclusivamente de f, α, a y b y no depende en absoluto del símbolo x. La letra x es una "variable muda" y puede ser sustituída por cualquier otro símbolo conveniente.

3.2. La Función espectral

Consideremos el espacio $\mathbb{P}_{n+1}$ de todos los polinomios de grado menor o igual a n. Sabemos que los polinomios $P_0, P_1, \ldots, P_n$ que se estudiaron antes, y que pertenecen a este espacio, forman una base en él (ver Apéndice 5.2) . Tomemos una transformación lineal U del espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ al espacio $\mathbb{P}_{n+1}$ que transforma la base canónica

$$(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

del espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ en la base

$$P_0(\lambda), P_1(\lambda), \ldots, P_n(\lambda)$$

del espacio $\mathbb{P}_{n+1}$. Así que si el vector $\overrightarrow{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{C}^{n+1}$ tiene coordenadas

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

en la base canónica

$$(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)$$

su imagen tiene las mismas coordenadas en la base $P_0, P_1, \ldots, P_n$

$$U(\overrightarrow{x}) \equiv \widetilde{x}(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} x_k P_k(\lambda) \qquad \overrightarrow{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

Así pues, si

$$Z(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} z_k P_k(\lambda)$$

entonces

$$U^{-1}(Z(\lambda)) \equiv \overrightarrow{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$$

Observemos ahora en que se transforma el producto escalar del espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ en el espacio $\mathbb{P}_{n+1}$. Recordemos la base de los vectores propios e_j de la matriz J

$$e_j = \frac{\overrightarrow{c_j}}{\|\overrightarrow{c_j}\|} = (\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j))^{-1/2}((1, P_1(\lambda_j), P_2(\lambda_j), \ldots, P_n(\lambda_j)) \tag{3.2.1}$$

en el espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ encontrados en el capítulo 1. Las coordenadas del vector $\overrightarrow{x}$ en esa base son

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_j} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)}} \sum_{k=0}^{n} x_k P_k(\lambda_j) = \frac{\widetilde{x}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)}} \tag{3.2.2}$$

y por el mismo razonamiento,

$$\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{e_j} \rangle = \frac{\widetilde{y}(\lambda_j)}{\sqrt{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)}}$$

donde

$$\{x_k\}_{k=0}^{n}, \{y_k\}_{k=0}^{n}$$

son las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ respectivamente en la base canónica

$$(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,1)$$

Como el sistema $\{e_j\}_{j=0}^{n}$ es ortonormal, podemos escribir

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{j=0}^{n} \langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_j} \rangle \overline{\langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{e_j} \rangle} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\widetilde{x}(\lambda_j)\overline{\widetilde{y}(\lambda_j)}}{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)} \tag{3.2.3}$$

La última igualdad puede ser escrita en la forma (ver apéndice 5.8.2)

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{x}(\lambda)\overline{\widetilde{y}(\lambda)} d\rho(\lambda) \tag{3.2.4}$$

donde $\rho(\lambda)$ es una función escalón no-decreciente, continua por la izquierda con puntos de crecimiento únicamente en los puntos de discontinuidad $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e igual a cero para $\lambda < \lambda_0$, y cuyos saltos se determinan como [2]

$$\Delta\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)}$$

Entonces, si en el espacio $\mathbb{P}_{n+1}$ definimos ahora un producto escalar por

$$\langle Z(\lambda), S(\lambda) \rangle_\rho := \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda)\overline{S(\lambda)} d\rho(\lambda) \tag{3.2.5}$$

de 3.2.3 y 3.2.5 tenemos la siguiente igualdad:

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \widetilde{x}(\lambda), \widetilde{y}(\lambda) \rangle_\rho \tag{3.2.6}$$

que indica que U es una isometría del espacio $\mathbb{C}^{n+1}$ al espacio $\mathbb{P}_{n+1}$ con el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$, es decir, conserva el producto escalar.

La función $\rho(\lambda)$ descrita en los párrafos anteriores será entonces la función espectral de la transformación, así, cada matriz de Jacobi genera una función escalón $\rho(\lambda)$ denominada la función espectral de la matriz de Jacobi, y que tiene las siguientes propiedades [2]:

Propiedad 3.3.1. La función $\rho(\lambda)$ tiene exactamente $n + 1$ saltos, y en el caso en que todos los eigenvalores de la matriz J sean positivos, éstos estarán situados en el semieje positivo en los puntos que corresponden a los valores propios de la matriz de Jacobi [1]

Propiedad 3.3.2. La suma de los saltos de la función es igual a 1. En efecto, si consideramos $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = (1, 0, \ldots, 0)$ tenemos:

$$1 = \langle \overrightarrow{y}, \overrightarrow{y} \rangle = \langle \widetilde{y}(\lambda), \widetilde{y}(\lambda) \rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} P_0^2(\lambda) d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} \Delta\rho(\lambda_j)$$

[1]Los mismos resultados se siguen aunque los eigenvalores de la matriz de Jacobi *no* sean positivos. En nuestro caso particular los eigenvalores son todos positivos y entonces todos los saltos de la función se encuentran siempre en el semieje positivo

Propiedad 3.3.3. La transformación $U(\vec{x}) = \sum_{k=0}^{n} x_k P_k(\lambda)$ es un isomorfismo entre los espacios $\mathbb{C}^{n+1}$ y $\mathbb{P}_{n+1}$, en los que el producto escalar está determinado por la fórmula

$$\langle Z(\lambda), S(\lambda)\rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} Z(\lambda)\overline{S(\lambda)}d\rho(\lambda)$$

Cabe señalar que para este producto escalar $P_0, P_1, \ldots, P_n$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{P}_{n+1}$.

Hemos visto entonces que cada matriz de Jacobi genera una función escalón $\rho(\lambda)$ llamada la función espectral de la matriz de Jacobi. Resulta cierta además la afirmación inversa: cada función escalón que satisface las propiedades 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 es la función espectral para cierta matriz de Jacobi, que es unívocamente determinada por ella, es decir existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de las matrices de Jacobi y las funciones que satisfacen las propiedades recién descritas. Consideremos una función escalón arbitraria no-decreciente $\rho(\lambda)$ continua por la izquierda, con puntos de crecimiento

$$\lambda_k (0 < k \leq n, 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots \lambda_n < \infty)$$

normalizada por las condiciones

$$\rho(\lambda) = 0; \lambda < \lambda_0$$

$$\rho(\lambda) = 1; \lambda > \lambda_n$$

Denotamos por $\mathbb{H}_n(\rho)$ el espacio de Hilbert, cuyos elementos son los polinomios del grado $\leq n$, y el producto escalar está dado por la siguiente igualdad:

$$\langle Q(\lambda), R(\lambda)\rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}d\rho(\lambda)$$

Así, $\mathbb{H}_n(\rho)$ es $\mathbb{P}_{n+1}$ con $\langle\ \rangle_\rho$

Los monomios $1, \lambda, \lambda^2, \ldots \lambda^n$ forman una base en este espacio, y utilizando el procedimiento de ortogonalización de Schmidt podemos obtener una base ortogonal:

$$\widehat{P}_0 \equiv 1, \widehat{P}_k(\lambda) = \lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} \lambda^j \qquad (1 \leq k \leq n) \tag{3.2.7}$$

Donde los números $\beta_j^{(k)}$ son los coeficientes encontrados con el proceso de ortogonalización de Schmidt y

$$\beta_j^{(k)} = \langle P_j(\lambda), P_k(\lambda)\rangle_\rho$$

Entonces los polinomios

$$P_k(\lambda) = \widehat{P}_k(\lambda)\left\langle \widehat{P}_k(\lambda), \widehat{P}_k(\lambda)\right\rangle_\rho^{-1/2} \tag{3.2.8}$$

con $0 \leq k \leq n$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{H}_n(\rho)$:

$$\langle P_k(\lambda), P_i(\lambda)\rangle_\rho = \delta_{ki} = \{ \begin{matrix} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{matrix}$$

Como los polinomios $\lambda P_k(\lambda)$ tienen grado $k+1$, pertenecen al espacio $\mathbb{H}_n(\rho)$ para $k \leq n-1$, por lo que

$$\lambda P_k(\lambda) = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i^{(k)} P_i(\lambda) \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.2.9}$$

donde

$$\alpha_i^{(k)} = \langle \lambda P_k(\lambda), P_i(\lambda)\rangle_\rho = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_k(\lambda)\overline{P_i(\lambda)}d\rho(\lambda) = \left\langle \overline{\lambda P_i(\lambda), P_k(\lambda)} \right\rangle_\rho = \overline{\alpha}_k^{(i)} \tag{3.2.10}$$

Como los polinomios $P_j(\lambda)$ son ortogonales a todos los polinomios del grado menor que j, tenemos que

$$\alpha_i^{(k)} = 0$$

si $i > k+1$ o $k > i+1$, de donde vemos que la expansión 3.2.9 tiene la siguiente forma:

$$\lambda P_0(\lambda) = \alpha_0^{(0)} P_0(\lambda) + \alpha_1^{(0)} P_1(\lambda)$$

$$\lambda P_k(\lambda) = \alpha_{k-1}^{(k)} P_{k-1}(\lambda) + \alpha_k^{(k)} P_k(\lambda) + \alpha_{k+1}^{(k)} P_{k+1}(\lambda) \quad (1 \leq k \leq n-1) \tag{3.2.11}$$

Introduciendo la notación

$$a_k = \langle \lambda P_k(\lambda), P_k(\lambda)\rangle_\rho = \alpha_k^{(k)} \tag{3.2.12}$$

$$b_k = \langle \lambda P_k(\lambda), P_{k+1}(\lambda)\rangle_\rho = \alpha_{k+1}^{(k)} = \overline{\alpha}_k^{(k+1)} \tag{3.2.13}$$

obtenemos que los polinomios satisfacen las igualdades de recurrencia:

$$b_{k-1}P_{k-1}(\lambda) + a_k P_k(\lambda) + b_k P_{k+1}(\lambda) = \lambda P_k(\lambda) 0 \leq k \leq n-1$$

donde $P_0(\lambda) \equiv 1$ y $b_{-1} = 0$. Los coeficientes a_k y b_k en estas igualdades son reales y

$$a_k > 0, b_k > 0 \qquad 0 \leq k \leq n-1$$

Efectivamente, la positividad de los números a_k se ve en la fórmula:

$$a_k = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_k(\lambda)\overline{P_k(\lambda)}d\rho(\lambda)$$

notando que los saltos de la función no-decreciente $\rho(\lambda)$ se sitúan en el semieje positivo; por otra parte, sabemos que

$$\lambda P_k(\lambda) = \alpha_{k+1}^{(k)} P_{k+1}(\lambda) + o(\lambda^{k+1}) \tag{3.2.14}$$

pero tomando en cuenta la definición de $P_k(\lambda)$ y 3.2.7

$$P_k(\lambda) = \frac{\widehat{P}_k(\lambda)}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} = \frac{\lambda^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_j^{(k)} \lambda^j}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} = \frac{\lambda^k}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k)})$$

y también

$$P_{k+1}(\lambda) = \frac{\lambda^{k+1}}{\left\|\widehat{P}_{k+1}(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k+1)}) \tag{3.2.15}$$

Luego,

$$\lambda P_k(\lambda) = \lambda \frac{\lambda^k}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k)}) = \frac{\lambda^{k+1}}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k+1)})$$

Por lo tanto, combinando 3.2.14 y 3.2.15

$$\frac{\lambda^{k+1}}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k+1)}) = b_k \frac{\lambda^{k+1}}{\left\|\widehat{P}_{k+1}(\lambda)\right\|} + o(\lambda^{(k+1)})$$

y se concluye que

$$b_k = \frac{\left\|\widehat{P}_{k+1}(\lambda)\right\|}{\left\|\widehat{P}_k(\lambda)\right\|} > 0$$

De esta manera, los polinomios $P_k(\lambda)$ son generados en el sentido de 3.2.11 por la siguiente matriz de Jacobi:

$$J = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \qquad (a_k > 0, b_k > 0),$$

donde por definición:

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) \overline{P_n(\lambda)} d\rho(\lambda)$$
$$b_{n-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda) \overline{P_{n-1}(\lambda)} d\rho(\lambda)$$

Mostraremos ahora que la función espectral $\rho_J(\lambda)$ de esta matriz coincide con la función $\rho(\lambda)$. En los renglones anteriores fue establecido que la función $\rho_J(\lambda)$ es escalón no-decreciente y que sus saltos se sitúan en las raíces del polinomio

$$Q(\lambda) = \lambda P_n(\lambda) - a_n P_n(\lambda) - b_{n-1} P_{n-1}(\lambda) \tag{3.2.16}$$

y los polinomios $P_k(\lambda)$ $\quad 0 \leq k \leq n$ forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{H}_n(\rho_J)$. Pero según la construcción, los mismos polinomios forman una base ortonormal en el espacio $\mathbb{H}_n(\rho)$, por consecuencia, las funciones $\rho(\lambda)$ y $\rho_J(\lambda)$ generan en el espacio $\mathbb{P}_{n+1}$ el mismo producto escalar, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}d\rho_J(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}d\rho(\lambda) \tag{3.2.17}$$

para todos los polinomios $Q(\lambda), R(\lambda)$ de grado menor o igual a n. En efecto, multiplicando las dos partes de la igualdad 3.2.16 por $\overline{P_j(\lambda)}$ e integrando por la medida $d\rho(\lambda)$ encontramos que:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}d\rho(\lambda) - a_n \left\langle P_n(\lambda), P_j(\lambda)\right\rangle_\rho \\ -b_{n-1}\left\langle P_{n-1}(\lambda), P_j(\lambda)\right\rangle_\rho\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Analicemos qué sucede con cada sumando de la parte derecha. Si $j < n-1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}d\rho(\lambda) = \left\langle \lambda P_n(\lambda), P_{n-1}(\lambda)\right\rangle_\rho = 0$$
$$a_n \left\langle P_n(\lambda), P_j(\lambda)\right\rangle_\rho = 0$$
$$b_{n-1}\left\langle P_{n-1}(\lambda), P_j(\lambda)\right\rangle_\rho = 0$$

porque los polinomios $P_j(\lambda)$ son ortogonales a todos los polinomios del grado menor que j.

Si $j = n-1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\overline{P_{n-1}(\lambda)}d\rho(\lambda) = b_{n-1}$$
$$a_n \left\langle P_n(\lambda), P_{n-1}(\lambda)\right\rangle_\rho = 0$$
$$b_{n-1}\left\langle P_{n-1}(\lambda), P_{n-1}(\lambda)\right\rangle_\rho = b_{n-1}$$

y la parte derecha nuevamente se anula. Finalmente si $j = n$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda P_n(\lambda)\overline{P_n(\lambda)}d\rho(\lambda) = a_n$$
$$a_n \left\langle P_n(\lambda), P_n(\lambda)\right\rangle_\rho = a_n$$
$$b_{n-1}\left\langle P_{n-1}(\lambda), P_n(\lambda)\right\rangle_\rho = 0$$

y en esta caso también la parte derecha se anula. Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{P_j(\lambda)}d\rho(\lambda) = 0 \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3.2.19}$$

y como los polinomios $P_j(\lambda)$ $(j = 1, \ldots, n)$ forman una base en el espacio $\mathbb{H}_n(\rho)$, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q(\lambda)\overline{R(\lambda)}d\rho(\lambda) = 0$$

para cualquier $R(\lambda)$ en $\mathbb{H}_n(\rho)$

En particular, si tomamos

$$R(\lambda) = \prod_{j \neq j_0} (\lambda - \lambda_j)$$

donde $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ son los puntos de los saltos de la función $\rho(\lambda)$, encontramos que

$$Q(\lambda_{j_0}) \prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)\Delta\rho(\lambda_{j_0}) = 0$$

donde $\Delta_{j_0} = \Delta\rho(\lambda_{j_0})$ es el valor del salto de la función en el punto λ_{j_0}.

Como

$$\prod_{j \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_j)\Delta_{j_0} \neq 0$$

$Q_n(\lambda_{j_0}) = 0$, lo que implica que los puntos λ_i son las raíces del polinomio $Q_n(\lambda)$. Consiguientemente, los saltos de la función espectral $\rho_J(\lambda)$ se encuentran en los mismos puntos donde se encuentran los saltos de la función $\rho(\lambda)$.

Por eso poniendo en la igualdad 3.2.17

$$Q(\lambda) = R(\lambda) = \prod_{i \neq j_0} (\lambda - \lambda_i)$$

$$\prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0}(J) = \prod_{i \neq j_0} (\lambda_{j_0} - \lambda_i)^2 \Delta_{j_0}$$

lo que significa que

$$\Delta_{j_0}(J) = \Delta_{j_0}$$

donde $\Delta_{j_0}(J), \Delta_{j_0}$ son los saltos de las funciones $\rho(\lambda)$ y $\rho_J(\lambda)$ respectivamente en el punto λ_{j_0} Así pues, las funciones escalones no-decrecientes $\rho(\lambda)$ y $\rho_J(\lambda)$ tienen los mismos puntos de ruptura y los mismos saltos en estos puntos, de donde, tomando en cuenta la normalización, concluimos que $\rho(\lambda) \equiv \rho_J(\lambda)$. El resultado anterior nos asegura entonces que cada función espectral determina de manera unívoca una matriz de Jacobi. Este resultado es uno de los pilares del análisis espectral, y será utilizado en la sección siguiente.

3.3. Solución a problemas inversos a través de la *función m* de Weyl

Existe una enorme literatura sobre problemas espectrales inversos, y varios de ellos han sido resueltos de diferentes formas. Nuestro objetivo será estudiar el problema planteado en el capítulo anterior y resuelto por Hochstadt, pero utilizando una de las más poderosas herramientas de la teoría espectral moderna, la *función m* de Weyl. Al igual que en el capítulo anterior, tomaremos una matriz J de Jacobi de la forma:

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & \dots & 0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{3.3.1}$$

donde todas las a_i, b_i son reales y además las b_i son positivas. Como ya vimos en el Capítulo 1, los eigenvalores λ_i de J son simples y además los eigenvectores correspondientes $\overrightarrow{c}_i$ tienen la primer entrada c_0 diferente de 0.

El hecho central de la teoría de análisis espectral inverso es que cada ρ determina las $a's$ y las $b's$ y cualquier ρ puede ocurrir para una única J. La prueba usual de este hecho es a través de polinomios ortogonales y ha sido publicada por diferentes matemáticos. Uno de los propósitos en este capítulo será probar este resultado basados en la *función m* de Weyl.

3.3.1. Definición de la *función m* de Weyl

Empezaremos definiendo un tipo especial de funciones de variable compleja z

Definicion 3.4. *Fijemos n en $\mathbb{N} - \{1\}$. Sean $\{b_j\}$ en $\mathbb{R}^+$, $\{a_j\}$ en $\mathbb{R}$ y sea J una matriz de Jacobi finita. Sean*

$$\{P(z,j)\}_{j=0}^{n+1}$$

y

$$\{\psi_+(z,j)\}_{j=-1}^{n}$$

dos funciones de variable compleja z definidas por :

$$b_jP(z,j+1) + a_jP(z,j) + b_{j-1}P(z,j-1) = zP(z,j) \tag{3.3.2}$$

para $0 \leq j < n+1$ y

$$b_j\psi_+(z,j+1) + a_j\psi_+(z,j) + b_{j-1}\psi_+(z,j-1) = z\psi_+(z,j) \tag{3.3.3}$$

para $0 \leq j < n-1$ Con las condiciones:

$$P(z,-1) = 0, P(z,0) = 1 \tag{3.3.4}$$

y

$$\psi_+(z,n) = 1, \psi_+(z,n+1) = 0 \tag{3.3.5}$$

Por conveniencia definimos $b_n = 1$ y $b_{-1} = 1$ para poder definir $P(z,n+1)$ y $\psi_+(z,0)$.

Proposicion 3.3.1. *Las condiciones anteriores definen $P(z,j)$ inductivamente como un polinomio de grado j*

Demostración. Por definición $P(z,0) = 1$ puede verse como un polinomio de grado 0 en z, $P(z,1)$ podemos despejarlo de la relación de recurrencia cuando $j = 0$:

$$b_0P(z,1) + a_0P(z,0) + b_{-1}P(z,-1) = zP(z,0)$$

como $P(z,-1) = 0$ y $P(z,0) = 1$ se tiene

$$b_0P(z,1) + a_0 = z$$

y

$$P(z,1) = \frac{z}{b_0} - \frac{a_0}{b_0}$$

es un polinomio de grado 1 en z. Cuando $j = 1$ tenemos

$$b_1P(z,2) + a_1P(z,1) + b_0P(z,0) = zP(z,1)$$
$$P(z,2) = \frac{1}{b_1}(z(\frac{z}{b_0} - \frac{a_0}{b_0})) - \frac{a_1P(z,1)}{b_1} - \frac{b_0}{b_1}$$
$$P(z,2) = \frac{z^2}{b_0b_1} - \frac{za_0}{b_0b_1} - \frac{a_1P(z,1)}{b_1} - \frac{b_0}{b_1}$$

y $P(z,2)$ es un polinomio de grado 2 en z. Comparemos ahora los $P(z,j)$ con la expresión general de los polinomios generados por la matriz de Jacobi encontrada en el capítulo 1:

$$b_jP(z,j+1) + a_jP(z,j) + b_{j-1}P(z,j-1) = zP(z,j)$$
$$b_{j-1}c_{j-1} + a_jc_j + b_jc_{j+1} = \lambda c_j$$

o acomodando los términos:

$$b_jc_{j+1} + a_jc_j + b_{j-1}c_{j-1} = \lambda c_j$$

Es decir, cumplen la misma relación de recurrencia, por esto, como ya se demostró en el capítulo 1, es cierto que

$$P(z,j+1) = \frac{1}{b_0b_1\dots b_j}z^{j+1} + \dots \tag{3.3.6}$$

donde los puntos indican polinomios en z de grado menor a $j+1$ y el coeficiente del término principal es $(b_0b_1\dots b_j)^{-1}$ □

Proposicion 3.3.2. *$P(z,j+1) = (b_0 b_1 \dots b_j)^{-1}\det(zI - J_{[1,j+1]})$ para $j \geq 0$ donde $J_{[1,j+1]}$ es la submatriz de $j+1 \times j+1$ en la esquina superior izquierda de J*

Demostración. Iniciaremos la demostración analizando como son las matrices $J_{[1,j+1]}$. Para $j = 0$

$$J_{[1,1]} = [a_0]$$

Para $j = 1$

$$J_{[1,2]} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ b_0 & a_1 \end{bmatrix}$$

Para $j = 2$

$$J_{[1,3]} = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 \\ 0 & b_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

Claramente $J_{[1,j+1]}$ define una matriz de Jacobi de $j+1 \times j+1$ y $\det(zI - J_{[1,j+1]})$ es por definición su polinomio característico y tiene grado $j+1$; por otra parte, por (3.3.6)

$$(b_0 b_1 \dots b_j)^{-1} P(z, j+1)$$

también es un polinomio de grado $j+1$. Entonces es suficiente mostrar que tienen los mismos ceros y multiplicidades. Tenemos que $P(z,j+1) = 0$ si y sólo sí existe un vector $\overrightarrow{v} = (v_0, v_1, \dots, v_j)$ con $v_0 \neq 0$, tal que

$$(J_{[1,j]} - zI)\overrightarrow{v} = 0$$

y como ya se ha mostrado antes, todos los eigenvectores de det $J_{[1,j+1]}$ tienen $v_0 \neq 0$. Así, los ceros de $P(z,j+1)$ son precisamente los eigenvalores de $J_{[1,j+1]}$. Dado que todos los eigenvalores son simples, las multiplicidades son todas uno. □

Proposicion 3.3.3. *Las condiciones anteriores definen $\psi_+(z, n-j)$ inductivamente como un polinomio de grado j*

Demostración. ψ_+ es similar a $P(z,j)$, pero corre al contrario de $P(z,j)$. Para $j = 0$ tenemos por definición

$$\psi_+(z, n-0) = \psi_+(z,n) = 1$$

que puede verse como un polinomio de grado 0. Para $j = 1$:

$$b_{n-1}\psi_+(z,n-1) + a_n\psi_+(z,n) + b_n\psi_+(z,n+1) = z\psi_+(z,n)$$

Y por definicion $\psi_+(z,n) = 1, \psi_+(z,n+1) = 0$ así que para $j = 1$

$$\begin{aligned} b_{n-1}\psi_+(z,n-1) + a_n &= z \\ \psi_+(z,n-1) &= \frac{z}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_{n-1}} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

es un polinomio de grado 1 en z Por el mismo razonamiento que para los $P(z,j)$, $\psi_+(z,n-j)$ es un polinomio de grado j □

Proposicion 3.3.4. *$\psi_+(z, n-j) = (b_{n-1} \dots b_{n-j})^{-1} \det(zI - J_{[n-j+1,n+1]})$ para $j \geq 1$ donde $J_{[n-j+1,n+1]}$ es la matriz de $j \times j$ en la esquina inferior derecha obtenida de J después de remover los primeros $n - j + 1$ renglones y las primeras $n - j + 1$ columnas.*

Demostración. Como ya vimos, $\psi_+(n-j)$ es similar a $P(z, j)$, pero corre desde la esquina inferior derecha hasta la esquina superior izquierda, es decir al contrario de $P(z, j)$. Al igual que con los $P(z, n)$ empezaremos revisando como son las matrices $J_{[n-j+1,n+1]}$

Para $j = 1$ tenemos:

$$J_{[n,n+1]} = [a_n] \tag{3.3.8}$$

que es la matriz de 1×1 en la esquina inferior derecha de J después de remover los primeros n renglones y las primeras n columnas. Para $j = 2$ tenemos:

$$J_{[n-1,n+1]} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

que es la matriz de 2×2 en la esquina inferior derecha de J después de remover los primeros $n-1$ renglones y las primeras $n-1$ columnas.

Para $j = 3$

$$J_{[n-2,n+1]} = \begin{bmatrix} a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Notemos que para $j = n$ tenemos

$$J_{[1,n+1]} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

que es la matriz de $n \times n$ en la esquina inferior derecha de J después de remover el primer renglón y la primer columna, es decir la matriz truncada J_T. Veamos ahora el comportamiento cuando $j = 1$

Por 3.3.7

$$\psi_+(z, n-1) = \frac{z}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_{n-1}}$$

y por 3.3.8

$$\begin{aligned} {b_{n-1}}^{-1} \det(zI - J_{[n,n+1]}) &= {b_{n-1}}^{-1}(z - a_n) \\ &= \frac{z}{b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_{n-1}} \end{aligned}$$

Y se tiene

$$\psi_+(z, n-1) = {b_{n-1}}^{-1} \det(zI - J_{[n,n+1]})$$

Nuevamente por el mismo razonamiento que para $P(z,j)$

$$\psi_+(z,n-j) = (b_{n-1}\dots b_{n-j})^{-1}\det(zI - J_{[n-j+1,n]})$$

□

Definicion 3.5. *Dadas dos sucesiones u_n, v_n, definimos el Wronskiano modificado $W(u_k, v_k)$ por $W(u_k, v_k) = b_k\left[u_k v_{k+1} - u_{k+1} v_k\right]$*

Proposicion 3.3.5. *Para cualesquiera dos soluciones que cumplan con la relación de recurrencia indicada en 3.3.2, esto es*

$$b_j P(z, j+1) + a_j P(z,j) + b_{j-1} P(z, j-1) = zP(z,j)$$

$$0 \leq j < n, \quad P(z,-1) = 0, \quad P(z,0) = 1$$

$W(u_k, v_k)$ es sucesion estacionaria, es decir, $W(u_k, v_k) =$ constante para toda $0 \leq k < n$

Demostración. En efecto, tomemos dos soluciones cualesquiera u y v :

$$b_j u(j+1) + a_j u(j) + b_{j-1} u(j-1) = zu(j)$$

y

$$b_j v(j+1) + a_j v(j) + b_{j-1} v(j-1) = zv(j)$$

si multiplicamos cruzado por $u(j)$ y $v(j)$, tenemos:

$$v(j)\left[b_j u(j+1) + a_j u(j) + b_{j-1} u(j-1)\right] = zu(j)v(j)$$

$$u(j)\left[b_j v(j+1) + a_j v(j) + b_{j-1} v(j-1)\right] = zv(j)u(j)$$

es decir,

$$v(j)b_j u(j+1) + v(j)a_j u(j) + v(j)b_{j-1}u(j-1) = zu(j)v(j)$$

$$u(j)b_j v(j+1) + u(j)a_j v(j) + u(j)b_{j-1}v(j-1) = zv(j)u(j)$$

Y restando obtenemos:

$$v(j)b_j u(j+1) - u(j)b_j v(j+1) + v(j)b_{j-1}u(j-1) - u(j)b_{j-1}v(j-1) = 0$$

$$b_j\left[v(j)u(j+1) - u(j)v(j+1)\right] + b_{j-1}\left[v(j)u(j-1) - u(j)v(j-1)\right] = 0$$

Por lo tanto

$$b_j\left[v(j)u(j+1) - u(j)v(j+1)\right] = b_{j-1}\left[u(j)v(j-1) - v(j)u(j-1)\right]$$

y concluimos que $W(u_n, v_n)$ es constante, como se quería demostrar □

Definicion 3.6. *La función de Green está definida por*

$$G(z,i,j) = \langle (zI - J)^{-1}\delta_j, \delta_i \rangle \quad 1 \leq i, \quad j < n+1 \tag{3.3.9}$$

Para $\mathrm{Im}(z) \neq 0$. *Ocasionalmente también se usará*

$$G_{[m,k]}(z,i,j) = \langle \delta_i, (zI - J_{[m,k]})^{-1}\delta_j \rangle \quad m \leq i, \quad j \leq k$$

Notando que J *es una matriz cuadrada*

Notemos que para que $(zI-J)^{-1}\delta_j$ tenga sentido, es preciso que $(zI-J)^{-1}$ *exista*, pero una condición necesaria y suficiente para que $(zI-J)^{-1}$ exista es que $\det(zI-J) \neq 0$, es decir que z esté en el conjunto resolvente de J; al multiplicar $(zI-J)^{-1}\delta_j$ estamos obteniendo la $j-\textit{ésima}$ columna de la matriz del resolvente y al calcular el producto punto con δ_i, obtenemos la $i-\textit{ésima}$ entrada de la $j-\textit{ésima}$ columna; al variar i,j tendremos entonces que la función de Green mapea la matriz del resolvente de J.

Proposicion 3.3.6.

$$G(z,i,j) = [W(P(z,\cdot), \psi_+(z,\cdot))]^{-1} P(z, \text{mín}(i,j))\, \psi_+(z, \text{máx}(i,j))$$

Demostración. Por definición,

$$G(z,i,j) = \langle (zI - J)^{-1}\delta_j, \delta_i \rangle$$

Y explicamos ya que al variar i y j obtenemos la matriz del resolvente de J. Mostraremos que el producto de la matriz $(zI - J)$ con la matriz con entradas

$$y_{ij} = [W(P(z,\cdot), \psi_+(z,\cdot))]^{-1} P(z, \text{mín}(i,j))\, \psi_+(z, \text{máx}(i,j))$$

es la matriz identidad I, lo que implicará entonces que esta matriz es igual a $(zI-J)^{-1}$ es decir a $G(z,i,j)$.

Tenemos entonces que las entradas x_{ij} del producto de estas matrices es igual al producto punto de

$$(0, \ldots, -b_{i-1}, z - a_i, -b_i, \ldots, 0)$$

y de la columna con entradas y_{ij} dadas por

$$y_{ij} = W^{-1} P(z, \text{mín}(i,j))\, \psi_+(z, \text{máx}(i,j)) \quad i = 0, \ldots, n$$

y donde para simplificar hemos definido $W = W(P(z,\cdot), \psi_+(z,\cdot))$, ya que es constante. Tenemos entonces que

$$x_{ij} = -b_{i-1} W^{-1} P(z, \text{mín}(i-1,j))\, \psi_+(z, \text{máx}(i-1,j)) -$$
$$-a_i W^{-1} P(z, \text{mín}(i,j))\, \psi_+(z, \text{máx}(i,j)) +$$

$$zW^{-1}P\left(z,\text{mín}\left(i,j\right)\right)\psi_+\left(z,\text{máx}\left(i,j\right)\right)-b_iW^{-1}P\left(z,\text{mín}\left(i+1,j\right)\right)\psi_+\left(z,\text{máx}\left(i+1,j\right)\right)$$

Supongamos que i+1 $\leq j$ (y entonces la entrada x_{ij} no está en la diagonal)

$$x_{ij}=-b_{i-1}W^{-1}P\left(z,i-1\right)\psi_+\left(z,j\right)-a_iW^{-1}P\left(z,i\right)\psi_+\left(z,j\right)+zW^{-1}P\left(z,i\right)\psi_+\left(z,j\right)-$$

$$b_iW^{-1}P\left(z,i+1\right)\psi_+\left(z,j\right)$$

$$\Rightarrow x_{ij}=W^{-1}\psi_+\left(z,j\right)\left[-b_{i-1}P\left(z,i-1\right)-a_iP\left(z,i\right)+zP\left(z,i\right)-b_iP\left(z,i+1\right)\right]$$

pero $P(z,\cdot)$ cumple la relación de recurrencia

$$b_jP(z,j+1)+a_jP(z,j)+b_{j-1}P(z,j-1)=zP(z,j)$$

Por lo tanto

$$x_{ij}=W^{-1}\psi_+\left(z,j\right)\left[-zP(z,i)+zP\left(z,i\right)\right]=0$$

Similarmente, cuando $i-1\geq j$ tenemos

$$x_{ij}=b_{i-1}W^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,i-1\right)+a_iW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,i\right)-zW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,i\right)+$$

$$+b_iW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,i+1\right)$$

$$x_{ij}=W^{-1}P\left(z,j\right)\left[b_{i-1}\psi_+\left(z,i-1\right)+a_i\psi_+\left(z,i\right)-z\psi_+\left(z,i\right)+b_i\psi_+\left(z,i+1\right)\right]$$

pero $\psi_+(z,\cdot)$ también cumple la relación de recurrencia, Por lo tanto

$$x_{ij}=W^{-1}P\left(z,j\right)\left[z\psi_+(z,i)-z\psi_+\left(z,i\right)\right]=0$$

Por último examinemos qué sucede con los elementos de la diagonal, es decir cuando $i=j$

$$x_{jj}=b_{j-1}W^{-1}P\left(z,j-1\right)\psi_+\left(z,j\right)+a_jW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)-zW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)+$$

$$+b_jW^{-1}P\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j+1\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_{jj}=W^{-1}[&b_{j-1}P\left(z,j-1\right)\psi_+\left(z,j\right)+a_jP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)-zP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)\\&+b_jP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j+1\right)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_{jj}=W^{-1}[&b_{j-1}P\left(z,j-1\right)\psi_+\left(z,j\right)+a_jP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)-zP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j\right)+\\&+b_jP\left(z,j\right)\psi_+\left(z,j+1\right)+b_jP\left(z,j+1\right)\psi_+\left(z,j\right)-b_jP\left(z,j+1\right)\psi_+\left(z,j\right)]\end{aligned}$$

Si en esta expresión sumamos y restamos $b_jP(z,j+1)\psi_+(z,j)$ y agrupamos tenemos

$$\begin{aligned} x_{jj} = W^{-1}[&b_{j-1}P(z,j-1)\psi_+(z,j) + a_jP(z,j)\psi_+(z,j) + b_jP(z,j+1)\psi_+(z,j) \\ &- zP(z,j)\psi_+(z,j) + b_jP(z,j)\psi_+(z,j+1) \\ &- b_jP(z,j+1)\psi_+(z,j)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_{jj} = W^{-1}[&\psi_+(z,j)(b_{j-1}P(z,j-1) + a_jP(z,j) + b_jP(z,j+1) - zP(z,j)) \\ &+ b_j(P(z,j)\psi_+(z,j+1) - P(z,j+1)\psi_+(z,j))] \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_{jj} &= W^{-1}[\psi_+(z,j)(zP(z,j) - zP(z,j)) + b_j(P(z,j)\psi_+(z,j+1) - P(z,j+1)\psi_+(z,j))] \\ &= W^{-1}[0 + W(P,\psi_+)] \end{aligned}$$

pero $W = W(P,\psi_+)$, por lo tanto

$$x_{ij} = 1 \Leftrightarrow i = j \qquad y \quad x_{ij} = 0$$

en cualquier otro caso

$$\therefore G(z,i,j) = [W(P(z,\cdot),\psi_+(z,\cdot))]^{-1}P(z,\text{mín}(i,j))\psi_+(z,\text{máx}(i,j))$$

como se quería demostrar □

Podemos ahora definir la *función m*

Definicion 3.7.

$$m(z) := \left\langle (zI-J)^{-1}\delta_0,\delta_0\right\rangle$$

Proposicion 3.3.7. $m(z) = -\frac{\psi_+(z,0)}{b_{-1}\psi_+(z,-1)}$

Demostración. Recordemos que $P(z,0)=1$; $P(z,-1)=0$; por otra parte,

$$G(z,i,j) = \left\langle (zI-J)^{-1}\delta_j,\delta_i\right\rangle$$

por definición, y también hemos demostrado que

$$G(z,i,j) = [W(P(z,\cdot),\psi_+(z,\cdot))]^{-1}P(z,\text{mín}(i,j))\psi_+(z,\text{máx}(i,j))$$

entonces

$$\begin{aligned} m(z) &= \left\langle (zI-J)^{-1}\delta_0,\delta_0\right\rangle = G(z,0,0) \\ &= [W(P(z,\cdot),\psi_+(z,\cdot))]^{-1}P(z,\text{mín}(0,0))\psi_+(z,\text{máx}(0,0)) \\ &= [W(P(z,\cdot),\psi_+(z,\cdot))]^{-1}P(z,0)\psi_+(z,0) \\ &= \frac{\psi_+(z,0)}{W(P(z,\cdot),\psi_+(z,\cdot))} \end{aligned}$$

pero

$$W\left(P\left(z,\cdot\right),\psi_{+}\left(z,\cdot\right)\right)(j)=b_{j}\left[P(z,j)\psi_{+}(z,j+1)-P(z,j+1)\psi_{+}(z,j)\right]$$

es constante, en particular para $j=-1$

$$W\left(P\left(z,\cdot\right),\psi_{+}\left(z,\cdot\right)\right)(-1)=b_{-1}\left[P(z,-1)\psi_{+}(z,0)-P(z,0)\psi_{+}(z,-1)\right]=-b_{-1}\psi_{+}(z,-1)$$

porque $P(z,0)=1$ y $P(z,-1)=0$

$$\therefore m(z)=-\frac{\psi_{+}\left(z,0\right)}{b_{-1}\psi_{+}(z,-1)}$$

como se quería demostrar □

Notemos que la m-función que acabamos de definir $m(z)=\langle(zI-J)^{-1}\delta_0,\delta_0\rangle$ representa, esencialmente, la misma relación utilizada por Hochstadt para derivar la fórmula que nos permite obtener las entradas de la matriz:

$$\left\langle(\lambda I-J)^{-1}\delta_0,\delta_0\right\rangle=\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)}$$

Cabe notar que Gestezy y Simon [3] definen la función m (que para diferenciarla denotaremos como $m_S(z)$) por

$$m_S(z)=\left\langle\delta_0,(J-zI)^{-1}\delta_0\right\rangle$$

que guarda la relación siguiente con la m función definida en los renglones anteriores

$$m_S(z)=-\overline{m(z)}$$

Por otra parte, como se mostrará a continuación, la función espectral definida en la sección 3.2 y la *función m* que acabamos de describir tienen una relación biunívoca, que permite identificar de manera única a esta función m con una y la misma función espectral. Este resultado será fundamental en nuestro trabajo, pues al mostrar que es precisamente la función espectral definida la que permite describir la función m como una integral de Riemann-Stieltjes, podremos obtener como corolario el primer teorema demostrado por Hochstadt. El orden lógico entonces, será demostrar que es posible identificar a la función m definida como una integral de Riemann-Stieltjes con respecto a la función espectral ρ definida en las secciones previas; una vez demostrado esto, se demostrará que tal ρ es única y concluiremos que podemos expresar $m(z)$ en términos de la medida espectral $d\rho$. Antes de iniciar conviene precisar algunas cosas. La medida generada por la función ρ es tal que sólo los conjuntos que contienen los puntos de los saltos tendrán medida diferente de cero. Así, si se define la siguiente relación de equivalencia:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+1} \arrow[r, "J"] \arrow[d, "U"'] & \mathbb{C}^{n+1} \\ \mathbb{L}^2 \arrow[r, "Mid"'] & \mathbb{L}^2 \arrow[u, "U^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Figura 3.1: Conmutación a través del operador multiplicación identidad (Mid)

Definicion 3.8. $fRg \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}}(f-g)d\rho = 0$

se prueba que efectivamente es una relación de equivalencia y entonces las funciones que coinciden en los puntos donde existen los saltos son iguales pues coinciden "casi en todas partes", y están relacionadas según la relación R; por otro lado, si definimos $\mathbb{L}^p$ como el espacio vectorial cuyos elementos son las clases de equivalencia de la relación R podemos tomar cualquier representante de la clase de equivalencia y trabajar con su norma, ya que su valor no depende del representante de la clase de equivalencia escogido. Usualmente no se hace distinción entre función y clase de equivalencia en este contexto. Ahora bien, se sabe que el polimonio del grado $\leq N-1$ se reconstruye únicamente por sus valores en N puntos. Así pues, tomando valores de una función en los puntos de salto, podemos construir el polinomio del grado menor o igual a $N-1$ que es igual a esa función "casi en todas partes". Así, todo el conjunto de las funciones se divide en clases y hay un polinomio que es el representante de cada clase. Teniendo en mente lo anterior, continuaremos demostrando el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. *Con la definición dada de función espectral, y con la transformación U definida en la sección 3.2, se tiene que para toda $x \in \mathbb{C}^{n+1}$*

$$Jx = U^{-1}MidUx \tag{3.3.10}$$

donde $(Midg)(\lambda) := \lambda g(\lambda)$ (ver figura 3.1 [2]*)*

Notemos que $Jx = U^{-1}MidUx$ es equivalente a

$$(J - zI)^{-1} = U^{-1}(Mid - zI)^{-1}Ux$$

para toda z que no pertenezca al espectro de J

[2] Los espacios $\mathbb{L}^p$ son los espacios vectoriales normados mas importantes en el contexto de la teoría de medida y de la integral de Lebesgue. Reciben tambien el nombre de espacios de Lebesgue.

Demostración. Primero probemos que para toda j=0 ... n

$$[U(J\delta_j)](\lambda) = \lambda P_j(\lambda)$$

Para esto, vemos que

$$U(J\delta_j) = U\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_{j-1} \\ a_j \\ b_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = b_{j-1}P_{j-1}(\lambda) + a_jP_j(\lambda) + b_jP_{j+1}(\lambda)$$

y

$$b_{j-1}P_{j-1}(\lambda) + a_jP_j(\lambda) + b_jP_{j+1}(\lambda) = \lambda P_j(\lambda)$$

según la relación de recurrencia que hemos visto en secciones anteriores.

$$\therefore [U(J\delta_j)](\lambda) = \lambda P_j(\lambda)$$

Ahora sea $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\delta_i$, entonces

$$[U(Jx)](\lambda) = \left[U(J\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\delta_i)\right](\lambda)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\alpha_i U(J\delta_i)(\lambda) = \sum_{i=0}^{n}\alpha_i\lambda P_i(\lambda)$$

$$= \lambda\sum_{i=0}^{n}\alpha_i P_i(\lambda) = [Mid\,(Ux)](\lambda)$$

entonces $Jx = [U^{-1}MidU]\,x$ □

De lo anterior se sigue que

$$(J - zI)\,x = U^{-1}\,(Mid - zI)\,Ux$$

y

$$\therefore U\,(J - zI)\,x = (Mid - zI)\,Ux$$
$$\therefore \left[U^{-1}\,(Mid - zI)^{-1}\,U\right](J - z)\,x = x$$
$$\therefore (J - zI)^{-1}\,g = U^{-1}\,(Mid - zI)^{-1}\,Ug$$

para toda g o equivalentemente,

$$U(J-zI)^{-1}g = (Mid - zI)^{-1}Ug$$

Considérese ahora

$$\langle \delta_0, (J-zI)^{-1}\delta_0 \rangle$$

De acuerdo a la igualdad 3.2.4 se tiene

$$m(z) = \langle \delta_0, (J-zI)^{-1}\delta_0 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} U\delta_0 U(J-zI)^{-1}\delta_0 d\rho(\lambda) \tag{3.3.11}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} 1(Mid - zI)^{-1} 1 d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} \tag{3.3.12}$$

$$= \sum \frac{\alpha_i}{\lambda_i - z} \tag{3.3.13}$$

donde, al igual que en la sección 3.2, $\rho(\lambda)$ es una función escalón no-decreciente, continua por la izquierda con puntos de crecimiento únicamente en los puntos de discontinuidad $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ e igual a cero para $\lambda < \lambda_0$, y cuyos saltos se determinan como

$$\Delta\rho(\lambda_j) = \rho(\lambda_j + 0) - \rho(\lambda_j - 0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} P_k^2(\lambda_j)}$$

Mostraremos ahora la unicidad.

Teorema 3.3.2. *Para cualquier función escalonada $\widetilde{\rho}$ con puntos de crecimiento únicamente en los puntos de discontinuidad $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{\rho}(\lambda)}{\lambda - z} = m(z)$$

con m la función m *de Weyl correspondiente al operador J, se tiene que $\widetilde{\rho} = \rho$, donde ρ es la medida espectral de J*

Demostración. Supongamos que existe $\widetilde{\rho}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{\rho}(\lambda)}{\lambda - z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z}$$

Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_i - z}$$

y

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\widetilde{\rho}(\lambda)}{\lambda - z} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z} = 0$$

para toda $z \neq \lambda_i$

Si

$$\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i \neq 0 \quad y \quad \varepsilon = \text{mín}\left\{|\lambda_{i_0} - \lambda_i| \text{ tal que } i \neq i_0\right\}$$

escojemos $z \in \mathbb{R}$ tal que

$$|\lambda_i - z| > \frac{\varepsilon}{2} \qquad para \quad toda \quad i \neq i_0$$

(basta tomar z tal que $|\lambda_{i_0} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$)

De aquí se sigue que

$$\left|\sum_{i \neq i_0} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right| \leq \sum_{i \neq i_0} \left|\frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right| \leq \frac{1}{\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{i \neq i_0} |\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i|$$

si $|\lambda_{i_0} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $i \neq i_0$. Así, para estos valores de z

$$0 = \left|\sum_{i=0} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right| \geq \left|\frac{\alpha_{i_0} - \widetilde{\alpha}_{i_0}}{\lambda_{i_0} - z}\right| - \left|\sum_{i \neq i_0} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right| > \left|\frac{\alpha_{i_0} - \widetilde{\alpha}_{i_0}}{\lambda_{i_0} - z}\right| - M \qquad (3.3.14)$$

puesto que

$$\left|\sum_{i=0} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right|$$

está acotada y hemos escogido M tal que $M > \left|\sum_{i=0} \frac{\alpha_i - \widetilde{\alpha}_i}{\lambda_i - z}\right|$

Como

$$\left|\frac{\alpha_{i_0} - \widetilde{\alpha}_{i_0}}{\lambda_{i_0} - z}\right| \to \infty$$

cuando $z \to \lambda_{i_0}$, entonces existe una vecindad $V_\delta(\lambda_{i_0})$ tal que

$$z \in V_\delta(\lambda_{i_0}) \quad implica \quad \left|\frac{\alpha_{i_0} - \widetilde{\alpha}_{i_0}}{\lambda_{i_0} - z}\right| \geq 2M(!)$$

y concluimos que $\widetilde{\rho} = \rho$ □

Hemos demostrado entonces que $m(z)$ se expresa de manera unívoca en términos de la medida espectral $d\rho$:

$$m(z) = \int \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda - z}$$

Provistos de esta certeza, continuaremos demostrando otros resultados que nos permitirán concluir este capítulo.

Teorema 3.3.3. *Si n es finita, entonces*

$$m(z) = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i)}{\prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)}$$

donde $\lambda_0 < \ldots \lambda_n$ son los valores propios de J y $\mu_1 < \ldots < \mu_n$ son los valores propios de J_τ (la matriz truncada)

Demostración. De la proposición 3.3.7

$$m(z) = -\frac{\psi_+(z,0)}{b_{-1}\psi_+(z,-1)}$$

Y por la proposición 3.3.4

$$\psi_+(z,0) = \psi_+(z,n-n) = (b_{n-1}\ldots b_1 b_0)^{-1}\det(zI - J_{[1,n+1]})$$

$$\psi_+(z,-1) = \psi_+(z,n-(n+1)) = (b_{n-1}\ldots b_0 b_{-1})^{-1}\det(zI - J_{[0,n+1]})$$

así

$$\begin{aligned} m(z) &= -\frac{\psi_+(z,0)}{b_{-1}\psi_+(z,-1)} \\ &= -\frac{(b_{n-1}\ldots b_1 b_0)^{-1}\det(zI - J_{[1,n+1]})}{b_{-1}(b_{n-1}\ldots b_0 b_{-1})^{-1}\det(zI - J_{[0,n+1]})} \\ &= -\frac{\det(zI - J_{[1,n+1]})}{\det(zI - J_{[0,n+1]})} \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

donde por definición $J_{[1,n+1]}$ es la submatriz obtenida de J al remover el primer renglón y la primera columna, es decir la matriz truncada y $J_{[0,n+1]}$ es la matriz original J; por otra parte

$$\det(z - J) = \prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)$$

y

$$\det(zI - J_{[1,n]}) = \prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i)$$

Por lo tanto

$$m(z) = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i)}{\prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)}$$

□

Corolario 3.3.1. *(EQUIVALENTE AL TEOREMA 2.2.1 PERTENECIENTE A HOCHSTADT) El conjunto*

$$\{\lambda_j\}_{j=0}^{n} \cup \{\mu_i\}_{i=1}^{n}$$

donde $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n}$ *es el conjunto de valores propios de* J *y* $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ *es el conjunto de valores propios de la matriz truncada* J_τ*, determina unívocamente* J*. Cualquiera conjuntos de* $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n}$ *y* $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ *son permitidos siempre que*

$$\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n$$

Demostración. Por el teorema 3.3.3 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{n} \cup \{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ determina $m(z)$ y m determina $d\rho$; hemos ya demostrado que $d\rho$ determina de manera unívoca las a y las b, es decir a J. Por otro lado, si

$$m(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{\lambda_j - z}$$

entonces la condición

$$\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \lambda_n \tag{3.3.16}$$

es equivalente a $\alpha_j > 0 \; \forall \; j$.

En efecto, es suficiente, pues si suponemos que 3.3.16 tiene lugar, entonces del teorema 3.3.3 tenemos que

$$m(z) = -\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i)}{\prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{\lambda_j - z}$$

pero tomando denominador común en el lado derecho y desarrollando tenemos:

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{\alpha_j}{\lambda_j - z} = \frac{\alpha_0 \prod_{j\neq 0}^{n}(\lambda_j - z) + \ldots + \alpha_n \prod_{j\neq n}^{n}(\lambda_j - z)}{\prod_{j=0}^{n}(\lambda_j - z)}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
-\frac{\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i)}{\prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)} &= \frac{\alpha_0 \prod_{j\neq 0}^{n}(\lambda_j - z) + \ldots + \alpha_n \prod_{j\neq n}^{n}(\lambda_j - z)}{\prod_{j=0}^{n}(\lambda_j - z)} \\
&= \frac{(-1)^n}{(-1)^n} \frac{\alpha_0 \prod_{j\neq 0}^{n}(\lambda_j - z) + \ldots + \alpha_n \prod_{j\neq n}^{n}(\lambda_j - z)}{\prod_{j=0}^{n}(\lambda_j - z)} \\
&= -\frac{\alpha_0 \prod_{j\neq 0}^{n}(z-\lambda_j) + \ldots + \alpha_n \prod_{j\neq n}^{n}(z-\lambda_j)}{\prod_{j=0}^{n}(z-\lambda_j)}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\prod_{i=1}^{n}(z-\mu_i) = \alpha_1 \prod_{j\neq 0}^{n}(z-\lambda_j) + \ldots + \alpha_n \prod_{j\neq n}^{n}(z-\lambda_j)$$

Y obtenemos expresiones explícitas para cada α_k evaluando en $z = \lambda_k$

$$\alpha_k = \frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda_k - \mu_i)}{\prod_{j\neq k}^{n}(\lambda_k - \lambda_j)} \tag{3.3.17}$$

y

$$\alpha_k > 0$$

si y sólo si

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_k - \mu_i) \quad y \quad \prod_{j=0,\ldots,n, j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)$$

tienen el mismo signo.

Analizando 3.3.17 vemos que el numerador y el denominador tienen n términos, de los cuales por la relación

$$\lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_k < \lambda_k < \mu_{k+1} < \lambda_{k+1} < \ldots < \mu_n < \lambda_n$$

k términos tienen signo negativo y $n - k$ son positivos:

$$\alpha_k = \frac{(\lambda_k - \mu_1)(\lambda_k - \mu_2)\cdots(\lambda_k - \mu_{k-1})(\lambda_k - \mu_k)}{(\lambda_k - \lambda_0)(\lambda_k - \lambda_1)\cdots(\lambda_k - \lambda_{k-1})} \quad \frac{(\lambda_k - \mu_{k+1})\cdots(\lambda_k - \mu_n)}{(\lambda_k - \lambda_{k+1})(\lambda_k - \lambda_{k+2})\cdots(\lambda_k - \lambda_n)}$$

es decir, el numerador y el denominador tienen el mismo signo y por lo tanto

$$\alpha_k > 0$$

3.3.16 es necesaria, pues si suponemos que $\{\lambda_j\}_{j=0}^n$ y $\{\mu_i\}_{i=1}^n$ no satisfacen la relación de orden, entonces existe al menos una k tal que

$$\lambda_k \notin [\mu_k, \mu_{k+1}]$$

así, mientras el denominador no cambia de signo, el numerador sí lo hace, pues o bien $(\lambda_k - \mu_k)$ ahora es negativo, o bien $(\lambda_k - \mu_{k+1})$ es ahora positivo. En cualquiera de los casos $\alpha_k < 0$ porque el numerador y el denominador tendrán ahora signos diferentes. Concluimos entonces que

$$\alpha_k > 0 \Leftrightarrow \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \ldots < \mu_n < \lambda_n$$

lo que demuestra completamente el corolario □

Capítulo 4

CONCLUSIÓN

Hemos visto entonces dos demostraciones de un mismo resultado, hemos clarificado cada uno de los pasos seguidos en ellas así como la lógica y los elementos matemáticos explícitos o implícitos que los autores utilizaron. Mientras que en el artículo de Hochstadt el resultado es el teorema principal, en el trabajo de Gesztezy y Simon ese resultado es un corolario, sin embargo esta diferencia aparentemente grande es comprensible si analizamos el aparato matemático que hubo de desarrollarse para lograr esta aparente simplificación, el uso de la integral de Riemman-Stieljes, la función espectral, el Wronskiano modificado, la *función m* de Weyl y la identificación de la función espectral y la *función m* de Weyl. Por otra parte, el artículo de Hochstadt incluye otros resultados referentes a problemas inversos similares, que es altamente probable que puedan ser obtenidos utilizando la *función m* de Weyl y la función espectral; de igual manera podemos ver cómo el avance de las matemáticas hace posible ir obteniendo resultado más generales ayudándonos a entender y modelar de una mejor manera y mucho más potente, conceptos y temas en este caso de álgebra lineal y física matemática a partir de los cuales se obtienen resultados previos como corolarios.

Capítulo 5

APÉNDICES

5.1. Espacios vectoriales

Definicion 5.1. *Sea V un conjunto no vacío y K un campo. Si en V pueden definirse 2 operaciones:*

1) Suma de elementos de V

2) Multiplicación por un elemento del campo K (escalar)

Que cumplen con las siguientes propiedades:

Propiedad 5.1.1. Si $u, v \in V$, entonces $u + v \in V$ (Cerradura bajo la suma)

Propiedad 5.1.2. Para todos $u, v, w \in V$, $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Ley asociativa de la suma)

Propiedad 5.1.3. Existe un elemento $0 \in V$ tal que para todo $v \in V, v + 0 = 0 + v = v$

Propiedad 5.1.4. Si $v \in V$, existe un elemento $-v \in V$, tal que $v + (-v) = 0$

Propiedad 5.1.5. Si $v + u \in V$, entonces $u + v \in V$ (Conmutatividad de la suma)

Propiedad 5.1.6. Si $v \in V$ y $\alpha \in K$, entonces $\alpha v \in V$

Propiedad 5.1.7. Si $v, u \in V$ y $\alpha \in K$ entonces $\alpha(v + u) = \alpha v + \alpha u$

Propiedad 5.1.8. Si $v \in V$ y $\alpha, \beta \in K$, entonces $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$

Propiedad 5.1.9. Si $v \in V$ y $\alpha, \beta \in K$, entonces $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$

Propiedad 5.1.10. Para cada $v \in V, 1v = v$, (el 1 es el 1 del campo)

Diremos que V es un espacio vectorial sobre el campo K y a sus elementos los llamaremos vectores.

Es común decir solamente "espacio vectorial", omitiendo "sobre el campo K"siempre que es claro el campo sobre el que está $\mathbb{V}$.

Definicion 5.2. *Sea V un espacio vectorial. Llamaremos una combinación lineal de elementos de V a una relación de la forma:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \ldots + \alpha_N v_N$$

donde $\alpha_i \in K, v \in V$ para toda $i = 1, \ldots, N$

Cabe señalar que de acuerdo con las propiedades 4.1 y 4.6, toda combinación lineal de elementos de V es un elemento de V.

5.1.1. Subespacios vectoriales

Definicion 5.3. *Sea $U = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\} \subset V$. Si en U se cumplen los axiomas de un espacio vectorial, es decir si U es en sí mismo un espacio vectorial, decimos que U es un subespacio vectorial de V.*

Proposicion 5.1.1. *La intersección de 2 subespacios vectoriales es un subespacio vectorial*

Demostración. Sea V un espacio vectorial sobre un campo K Sean U, W subespacios vectoriales de V. Como U, W son subespacios vectoriales, entonces

$$\overrightarrow{0} \in U \quad y \quad \overrightarrow{0} \in W$$

así que $\overrightarrow{0} \in U \cap W$; por otra parte, vemos que si $x, y \in U \cap W$ entonces

$$x, y \in U \quad y \quad x, y \in W$$

pero U, W son subespacios vectoriales, así que

$$x + y \in U \quad y \quad x + y \in W$$

entonces $x + y \in U \cap W$.

Finalmente, si $x \in U \cap W$ entonces $x \in U$ y $x \in W$, así que $\alpha x \in U$ y $\alpha x \in W$ para toda $\alpha \in K$, porque U y W son subespacios vectoriales, pero esto implica que $\alpha x \in U \cap W$. Por lo tanto $U \cap W$ es un subespacio vectorial de V. □

5.2. Bases de un espacio vectorial

5.2.1. Independencia lineal

Definicion 5.4. *Sea $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\} \subset V$. Diremos que S es un conjunto linealmente independiente si*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \ldots + = 0$$

implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0$

Notemos que el 0 en la ecuación de la combinación lineal es el 0 vectorial, mientras que el 0 de las ecuaciones de los escalares es el '0' del campo. De aquí en adelante para ser más precisos indicaremos el 0 vectorial como $\overrightarrow{0}$

Si existe una combinación lineal de elementos de S, igual a $\overrightarrow{0}$, con al menos un escalar diferente de '0' diremos que el conjunto es linealmente dependiente.

Definicion 5.5. *Al conjunto de todas las combinaciones de un subconjunto $S \subset V$ le llamaremos el span de S y lo denotaremos por $sp(S)$, es decir*

$$sp(S) = \{u \in V \quad tal \quad que \quad u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 + \ldots + \alpha_N v_N$$

con $v_i \in S$ para toda i y $\alpha_i \in K$ para toda $i = 1, \ldots, N$

5.2.2. Conjunto generador

Sea $S \subset V$. Si todo elemento del espacio V puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de S, decimos que S genera V.

Definicion 5.6. *Sea V un espacio vectorial sobre un campo K y $S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots\} \subset V$. Diremos que S es una* base *de V si S es linealmente independiente y genera V.*

Ejemplo. En $\mathbb{R}^n$ los vectores

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

forman una base

Proposicion 5.2.1. *Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial de todos los polinomios de grado $\leq n-1$. El conjunto $P(\lambda^k) = \{\lambda^k, k = 0, 1, 2, ..., n-1, \lambda \neq 0\}$ forma una base en $\mathbb{P}_n$*

Demostración. Primero se demostrará que cualquier elemento de $\mathbb{P}_n$ puede ser escrito como una combinación lineal de los elementos de $P(\lambda^k)$. Sea $P \in \mathbb{P}_n$, entonces

$$P = a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + ... + a\lambda + a_0$$

pero esto es precisamente la definición de que P sea combinación lineal de

$$\lambda^0, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1}$$

es decir P es combinación lineal de los elementos de $P(\lambda^k)$. Tomemos ahora una combinación lineal de los elementos de λ^k igual a $\overrightarrow{0}$:

$$a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + ... + a\lambda + a_0 = \overrightarrow{0}$$

Notemos que en este caso el 0 es el 0 del espacio vectorial, es decir el polinomio idénticamente cero $P_0(\lambda) = 0$ para toda λ. Por otra parte,

$$a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + ... + a\lambda + a_0$$

se anula a lo más en n valores de λ (sus raíces), entonces la igualdad se cumple si y sólo si $a_i = 0$ para toda i, porque de otra forma no tendría las mismas raíces que el polinomio $\overrightarrow{0}$ y dos polinomios son iguales si y sólo si tienen las mismas raíces. Así concluímos que

$$a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + ... + a\lambda + a_0 = \overrightarrow{0}$$

si y solo si $a_i = 0$ para toda i y el conjunto $P(\lambda^k)$ es linealmente independiente. Por último, se demostrará por reducción al absurdo que la combinación lineal con la que se expresa un elemento de $\mathbb{P}_n$ como combinación lineal de elementos de $P(\lambda^k)$ es única. Supongamos que $P \in \mathbb{P}_n$ y que existen 2 combinaciones lineales de $P(\lambda^k)$ diferentes que expresan a P

$$P = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a\lambda + a_0$$

y

$$P = b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + b\lambda + b_0$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0} &= P - P\\ &= (a_n - b_n)\lambda^n + (a_{n-1} - b_{n-1})\lambda^{n-1} + ... + (a_1 - b_1)\lambda + (a_0 - b_0)\end{aligned}$$

Entonces el polinomio 0 se anula a lo más en n valores de λ (!). Por lo tanto es falso suponer que existen 2 combinaciones lineales de $P(\lambda^k)$ diferentes, y la expresión de P en términos de elementos de $P(\lambda^k)$ es única □

5.3. El producto interno

Sea X un espacio vectorial. Decimos que en X está definido un producto escalar, si existe una función numérica (x, y) de 2 variables que satisface las siguientes propiedades:

Propiedad 5.6.1. Definida positiva: $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si x es el 0 vectorial

Propiedad 5.6.2. $\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x\ , y\rangle$, con λ un escalar

Propiedad 5.6.3. $\langle \alpha x + \beta y\ ,\ z\rangle = \alpha\langle x\ , z\rangle + \beta\langle y\ , z\rangle$

Propiedad 5.6.4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

El producto interno también es conocido como "producto escalar" o "producto punto". En realidad, es posible definir más de una función que cumpla con las propiedades mencionadas, sin embargo en el caso de R^n existe una función que es utilizada de manera estándar definida por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

para toda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$.

5.4. Matrices

Definicion 5.7. *Una matriz A de mxn es un arreglo rectangular de mn números dispuestos en m renglones y n columnas:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Cuando $m = n$, es decir cuando el número de renglones es igual al número de columnas, tenemos una matriz cuadrada. Puede verse fácilmente que si definimos la suma de 2 matrices cuadradas A y B como la matriz C que tiene por entradas $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ y el producto por un escalar $\alpha A = \alpha a_{ij}$ para toda i, j el conjunto de todas las matrices cuadradas con entradas complejas es un espacio vectorial.

Definicion 5.8. *Núcleo de una matriz. Sea $A \in M_{n,m}(C)$; $A : C^n \to C^m$. Definimos el núcleo de una matriz y lo denotamos como* $\ker A$ *al conjunto $\{x \in C^n$ tal que $Ax = 0\}$*

Notemos que $\ker A \subset C^n \neq \emptyset$ siempre, pues como A representa una transformación lineal, $A\vec{0} = \vec{0}$ por lo tanto $\vec{0} \in \ker A$.

Proposicion 5.4.1. *El núcleo de una matriz es un subespacio vectorial de C^n :*

Demostración. Vimos en el párrafo anterior que $\vec{0} \in A$; además si

$$x, y \in \ker A \Rightarrow Ax = \vec{0} = Ay$$

y como A es lineal

$$Ax + Ay = A(x + y) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \therefore (x + y) \in \ker A$$

Por último si $x \in \ker A$ y $\alpha \in R, \alpha \neq 0$, tenemos que

$$Ax = 0 = \alpha Ax = A\alpha x = 0 \therefore \alpha x \in \ker A$$

lo que completa la demostración □

Proposicion 5.4.2. *Sea* $A \in M_{n,m}(\mathbb{C})$; $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$.

$$A(\mathbb{C}^m) = \{y \in \mathbb{C}^m \textit{tal que } \exists\ x \in \mathbb{C}^n, Ax = y\}$$

definido como el contradominio o imagen, es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^m$

Demostración. Sean $y_1, y_2 \in A(\mathbb{C}^m)$

Si $y_1, y_2 \in A(\mathbb{C}^m)$ entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{C}^n$ tales que $A(x_1) = y_1; A(x_2) = y_2$, luego

$$y_1 + y_2 = A(x_1) + A(x_2) = A(x_1 + x_2)$$

entonces existe $x = x_1 + x_2 \in \mathbb{C}^n$ tal que $A(x) = y_1 + y_2$, por lo tanto $y_1 + y_2 \in A(\mathbb{C}^m)$

Por último, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $y \in A(\mathbb{C}^m)$. $\alpha y = \alpha A(x) = A(\alpha x)$, entonces existe $x_1 = \alpha x$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $A(x_1) = y$, por lo tanto $\alpha y_1 \in A(\mathbb{C}^m)$ y concluimos que el contradominio o imagen, es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^m$ □

Proposicion 5.4.3. *Sea* $A \in M_{nxn}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

El producto de una matriz A por el vector canónico $\delta_i = (0, 0, 0, i, \dots, 0)$ *es igual a la* $i -$ *ésima columna de A.*

Demostración. Sea R_{iA} el $i - esimo$ renglón de A. Recordemos que la entrada x_{ij} del producto $A\delta_i$ es, por definición, el producto punto del renglón i de A por δ_i, es decir: $x_{ij} = \langle R_{iA}, \delta_i \rangle$ entonces

$$x_{11} = \langle R_{1A}, \delta_i \rangle = \langle (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1i}, \dots, a_{1n}), (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \rangle = a_{1i}$$

$$x_{21} = \langle R_{2A}, \delta_i \rangle = \langle (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2i}, \dots, a_{2n}), (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \rangle = a_{2i}$$

$$x_{31} = \langle R_{3A}, \delta_i \rangle = \langle (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3i}, \dots, a_{3n}), (0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \rangle = a_{3i}$$

$$\vdots$$

$$x_{n1} = \langle R_{nA}, \delta_i \rangle = \langle (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \dots, a_{ni}, \dots, a_{nn}), (0, 0, 0, 1, \dots, 0) \rangle = a_{ni}$$

Por lo tanto $A\delta_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} \dots a_{ni})$ como se quería demostrar □

5.5. Características especiales de las Matrices tridiagonales

5.5.1. Caracterización de la matrices tridiagonales

Definicion 5.9. *Sea $A \in M_{nxn}$. Diremos que A es una matriz tridiagonal si, exceptuando la diagonal principal, sobre la cual no pondremos condición alguna, todas las entradas son iguales a 0 excepto para aquellas entradas x_{ij}con $j = i+1$ o $j = i-1$*

Las siguientes matrices son ejemplos de matrices tridiagonales

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Mientras que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

no lo es.

Es importante notar que las condiciones establecidas en la definición anterior implican que la columna $k-$ *ésima* de la matriz tiene un número bien definido de términos diferentes de 0, en efecto, las entradas de la columna k tienen la forma:

$$x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}, \ldots x_{k-2k}, x_{k-1k}, x_{kk}, x_{k+1k}, x_{k+2k}, \ldots x_{nk},$$

Entonces, a partir del renglón $k+2$ todas las entradas serán 0, pues para estos términos $j \neq i-1$ o $i+1$

5.5.2. Caso particular de las Matrices de Jacobi

Por la proposicion 5.4.3 sabemos entonces que $A\delta_0$ es la primera columna de A y en el caso en que A es una matriz tridiagonal, $A\delta_0$ tiene únicamente las 2 primeras entradas diferentes de 0, de hecho si A es una matriz de Jacobi tenemos que

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ddots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

y $A\delta_0 = (a_0, b_0, 0 \dots 0)$, es decir $A\delta_0$ tiene únicamente las 2 primeras entradas diferentes de 0. Notemos que es posible reescribir $A\delta_0$ como:

$$A\delta_0 = a_0\delta_0 + b_0\delta_1$$

Más aún, para $A^2\delta_0$ tenemos: $A^2\delta_0 = A(A\delta_0)$, luego las entradas x_{ij} de $A(A\delta_0)$ son iguales a

$$\begin{aligned}
x_{11} &= \langle R_{1A\delta_0}, \delta_0\rangle = \langle (a_0, b_0, 0, \dots, 0), (a_0, b_0, 0, \dots, 0)\rangle = a_0^2 + b_0^2 \\
x_{21} &= \langle R_{2A\delta_0}, \delta_0\rangle = \langle (b_0, a_1, b_1, \dots, 0), (a_0, b_0, 0, \dots, 0)\rangle = a_0b_0 + a_1b_0 \\
x_{31} &= \langle R_{3A\delta_0}, \delta_0\rangle = \langle (0, b_1, a_2, b_2, \dots, 0), (a_0, b_0, 0, \dots, 0)\rangle = b_0b_1 \\
x_{41} &= \langle R_{4A\delta_0}, \delta_0\rangle = \langle (0, 0, b_2, a_3, b_3, \dots, 0), (a_0, b_0, 0, \dots, 0)\rangle = 0 \\
x_{51} &= \langle R_{5A\delta_0}, \delta_0\rangle = \langle (0, 0, 0, b_3, a_4, b_4, \dots, 0), (a_0, b_0, 0, \dots, 0)\rangle = 0
\end{aligned}$$

En realidad, a partir del renglón 4 todas las entradas son 0, pues para que $x_{ij} = \langle R_{iA\delta_0}, \delta_0\rangle$ sea diferente de 0 es necesario que $R_{iA\delta_0}$ tenga al menos un valor diferente de 0 en las columnas 1 o 2, pero esto sólo se cumple para los primeros 3 renglones de A, porque a partir del cuarto renglón las únicas entradas diferentes de 0 son a_{43} y a_{45}, así que $A^2\delta_0$ tendrá exactamente los 3 primeros renglones diferentes de 0 y los demás 0, de hecho por cálculo directo obtenemos que

$$\begin{aligned}
A^2\delta_0 &= (a_0^2 + b_0^2, a_0b_0 + a_1b_0, b_0b_1, 0, 0, \dots, 0) \\
&= (a_0^2 + b_0^2)\delta_0 + (a_0b_0 + a_1b_0)\delta_1 + b_0b_1\delta_2
\end{aligned}$$

Siguiendo este razonamiento, vemos que

$$A^3\delta_0 = A(A^2\delta_0)$$

tendrá exactamente los primeros 4 renglones diferentes de 0 porque $A^2\delta_0$ es diferente de 0 sólo en los primeros 3 renglones y A tiene al menos una entrada diferente de 0 en las primeras 3 columnas sólo en los primeros 4 renglones, nuevamente por cálculo directo podemos ver que

$$\begin{aligned}
A^3\delta_0 = (a_0(a_0^2 + b_0^2) + b_0(a_0b_0 + a_1b_0), b_0(a_0^2 + b_0^2) + a_1(a_0b_0 + a_1b_0) + b_0b_1^2, \\
b_1(a_0b_0 + a_1b_0) + a_2(b_0b_1), b_0b_1b_2, 0, \dots, 0)
\end{aligned}$$

es decir

$$A^3\delta_0 = d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + d_3\delta_2$$

donde las d_i dependen de $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$

Concluiremos esta sección demostrando que es posible expresar $A^k\delta_0$ como una combinación lineal de las primeros k vectores unitarios.

Proposicion 5.5.1. *Sea A una matriz de Jacobi. Es posible expresar $A^k\delta_0$ como una combinación lineal de las primeros k vectores unitarios*

Demostración. Demostración por inducción. Hemos visto que el resultado se cumple para $n = 1$. Supongamos que es cierto para $n = k$, entonces

$$A^k\delta_0 = d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \ldots + d_k\delta_k$$

luego,

$$A^{k+1}\delta_0 = A(A^k\delta_0)$$

pero $A^k\delta_0$ tiene exactamente los primeros $k+1$ renglones diferentes de 0 y todo lo demás 0, mientras que A tiene al menos 1 valor diferente de 0 en las primeras $k+1$ columnas sólo en los primeros $k+2$ renglones, pues a partir del renglón $k+3$ las únicas entradas diferentes de 0 son a_{k+3k+2} y a_{k+3k+4}, es decir

$$\langle R_{iA}, A^k\delta_0\rangle = 0$$

para toda $i \geq k+3$ y consecuentemente todas las entradas x_{ij} de $A^{k+1}\delta_0$ serán 0 si $i \geq k+3$

Entonces $A^{k+1}\delta_0$ tiene exactamente los primeros $k+2$ renglones diferentes de 0 y todo lo demás 0 Por lo tanto

$$A^{k+1}\delta_0 = d'_0\delta_0 + d'_1\delta_1 + d'_2\delta_2 + \ldots + d'_k\delta_k + d'_{k+1}\delta_{k+1}$$

como se quería demostrar. □

Corolario 5.5.1. $d_k = b_0b_1b_2, \ldots b_{k-1}$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} A^{k+1}\delta_0 = A(A^k\delta_0) &= A(d_0\delta_0 + d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \ldots + d_{k-1}\delta_{k-1} + d_k\delta_k) \\ &= d_0A\delta_0 + d_1A\delta_1 + d_2A\delta_2 + \ldots + d_{k-1}A\delta_{k-1} + d_kA\delta_k \end{aligned}$$

pero

$$A\delta_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_{k-1} \\ a_k \\ b_k \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b_{k-1}\delta_{k-1} + a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}$$

entonces

$$\begin{aligned} A^{k+1}\delta_0 &= d_0A\delta_0 + d_1A\delta_1 + \ldots + d_{k-1}A\delta_{k-1} + d_k(b_{k-1}\delta_{k-1} + a_k\delta_k + b_k\delta_{k+1}) \\ &= d_0A\delta_0 + d_1A\delta_1 + \ldots + d_{k-1}A\delta_{k-1} + d_kb_{k-1}\delta_{k-1} + d_ka_k\delta_k + d_kb_k\delta_{k+1} \\ &= d_0A\delta_0 + d_1A\delta_1 + \ldots + d_{k-1}A\delta_{k-1} + d_kb_{k-1}\delta_{k-1} + d_ka_k\delta_k + (b_0b_1b_2, \ldots b_{k-1})b_k\delta_{k+1} \end{aligned}$$

por hipótesis, por lo tanto $d_{k+1} = b_0b_1b_2, \ldots b_{k-1}b_k$ □

5.6. Vectores y valores propios

Definicion 5.10. *Sea $A \in M_n(R)$ y $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la ecuación*

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \tag{5.6.1}$$

Con $\lambda \in R$. Si λ y un vector no nulo x satisfacen esta ecuación decimos que λ es un valor propio de A y $\vec{x}$ es el vector propio de A correspondiente a λ

Podemos interpretar los vectores propios de una transformación lineal como aquellos elementos del dominio de la transformación con la propiedad singular de que su imagen bajo la transformación es un múltiplo de sí mismo. Al conjunto de todos los valores propios $\lambda_i \in R$ se le llama el *espectro* de la matriz A y se denota por $\sigma(A)$; el número real no-negativo $\rho(A) = \text{máx}\{|\lambda_i|\}$ se le llama el *radio espectral* de la matriz A.

Proposicion 5.6.1. *Si c es un vector propio, entonces $\alpha c, \alpha \in \mathbb{R}$ también es un vector propio.*

Demostración. Como se menciona al inicio de este trabajo, podemos sustituir matrices cuadradas por operadores lineales, en este caso estaremos identificando A con el operador T que la representa.

Sea $\vec{c}$ un vector propio de una transformación lineal T y $\alpha \neq 0$, entonces:

$$T(\alpha\vec{c}) = \alpha T(\vec{c})$$

porque T es una transformación lineal, y también

$$T(\vec{c}) = \lambda\vec{c}$$

porque c es un vector propio de T, así que

$$T(\alpha\vec{c}) = \alpha T(\vec{c}) = \alpha\lambda\vec{c} = \lambda\alpha\vec{c} = \lambda(\alpha\vec{c})$$

Por lo tanto $\alpha\vec{c}$ es un valor propio asociado al vector propio $\vec{c}$ □

Definicion 5.11. *Sea A una matriz de mn. Diremos que A es inyectiva si y sólo si $\ker A = \{0\}$, en este caso decimos que la matriz es no degenerada. Si $m < n$ la matriz siempre es degenerada.*

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

I. La matriz A es no degenerada

II. Existe la inversa de A

III. El rango de la matriz A es n (rank $A = n$)

IV. El determinante de A es diferente de 0 ($\det A \neq 0$)

V. Dim (codominio de A) $= n$

VI. Dim $\ker A = 0$

VII. El sistema lineal de ecuaciones $Ax = 0$ tiene única solución $x = 0$

VIII. 0 no es un valor propio de A

5.7. Operadores lineales

Cabe mencionar que varios de los resultados que se presentan en esta sección son estudiados con mucha mayor profundidad en la teoría de operadores lineales, pero aquí sólo se mencionan de manera somera y en algunos casos se darán por hecho varios de ellos. El concepto de operador o transformación sobre un espacio de Banach es una generalización natural de la idea de una función de variable real. Los operadores lineales sobre un espacio vectorial normado son frecuentemente utilizados para representar cantidades físicas y por esto son muy importantes en matemáticas aplicadas y en física matemática.

Definicion 5.12. *Sean $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ espacios vectoriales y sea $T : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$. Diremos que T es una función lineal o un operador lineal si cumple las siguientes propiedades:*

Propiedad 5.12.1. Para toda $u, v \in \mathbb{U}$, $T(u + v) = T(u) + T(v)$

Propiedad 5.12.2. Para toda $u \in \mathbb{U}$, α un escalar, $T(\alpha u) = \alpha T(u)$

Proposicion 5.7.1. *Si T es un operador lineal sobre el espacio vectorial $\mathbb{V}$, entonces $\alpha T = \alpha T(V)$ también es un operador lineal sobre V.*

Demostración. Sea $v, w \in \mathbb{V}, \alpha, \beta$ escalares. Entonces

$$\alpha T(v + w) = \alpha(T(v) + T(w)) = \alpha T(v) + \alpha T(w)$$

y también

$$\alpha T(\beta v) = \alpha(\beta T(v)) = \alpha\beta T(v)$$

Por lo tanto αT es un operador lineal □

Definicion 5.13. *Sean U y V espacios lineales normados y sea $T : U \to V$ una transformación lineal. Decimos que T está acotada si existe un número real positivo k tal que $\|T(x)\| \leq k \|x\|$ para toda $x \in U$.*

Definicion 5.14. *Sean U y V espacios vectoriales normados. El conjunto de todas las transformaciones lineales $T : U \to V$ se denota por $L(U, V)$. En el caso en que $U = V$, escribiremos simplemente $L(U)$*

Definicion 5.15. *Sea T un operador $T \in L(U,V)$. Diremos que T es invertible si existe un operador $T^{-1} \in L(V,U)$ tal que*

$$T^{-1}T(x) = x \quad para \quad toda \quad x \in U$$

y

$$TT^{-1}(y) = y \quad para \quad toda \quad y \in V$$

Cuando tal operador existe se le llama el inverso de T

5.7.1. Operadores Autoadjuntos

Definicion 5.16. *Sea $T \in L(U)$. Diremos que T es autoadjunto si $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$*

Teorema 5.7.1. *Teorema de expansión de Neumann. Sea U un espacio de Banach. Si T es un operador con $\|T\| < 1$ entonces $I - T$ es invertible y su inversa está dada por:*

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

Corolario 5.7.1. *Sea $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots n$ los valores propios de la transformación T. Para $|\lambda| > \text{máx}\,|\lambda_i|$ la siguiente igualdad es cierta*

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$$

Demostración. Sea $|\lambda| > \text{máx}\,|\lambda_i|$. Entonces

$$1 = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} > \frac{\text{máx}\,|\lambda_i|}{|\lambda|} = \frac{\|T\|}{|\lambda|}$$

es decir $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$; por otra parte

$$(\lambda I - T) = \lambda(I - \frac{T}{\lambda})$$

implica que

$$(\lambda I - T)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1}$$

y como $\frac{T}{\lambda} < 1$ se concluye que

$$\frac{1}{\lambda}(I - \frac{T}{\lambda})^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=o}^{\infty} \frac{T^k}{\lambda^k}$$

□

y para cada factor $(x^2+2bx+c)^r$ *se puede determinar una expresión de la forma*

$$\frac{B_1+C_1x}{Q}+\frac{B_2+C_2x}{Q^2}+\dots\frac{B_r+C_rx}{Q^r}$$

con A_i, B_i, C_i *constantes, de tal manera que que la función* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *puede ser representada como la suma de estas fracciones*

Si $g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$ con $\alpha_i\neq\alpha_k$ si $i\neq k$ es decir, si la ecuación $g(x)=0$ tiene sólo reaíces simples, y si $f(x)$ es cualquier polinomio de grado menor al grado de g las expresiones cuadráticas no aparecen, mientras que la expresión para cada uno de los factores $(x-\alpha_1)^{l_i}$ tiene la forma $(x-\alpha_1)$ porque $l_i=1$ para toda i así que la expresión en fracciones parciales tiene la siguiente forma:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{(x-\alpha_2)}+\dots\frac{a_n}{(x-\alpha_n)}$$

Por otra parte, se obtienen expresiones explícitas para los coeficientes a_i multiplicando ambos lados por $(x-\alpha_i)$ y haciendo sucesivamente $x=\alpha_i$; esto es, para a_1 por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)}(x-a_1)&=(x-a_1)[\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{(x-\alpha_2)}+\dots\frac{a_n}{(x-\alpha_n)}]\\&=\frac{f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}(x-a_1)=(x-a_1)[\frac{a_1}{x-\alpha_1}+\frac{a_2}{(x-\alpha_2)}+\dots\frac{a_n}{(x-\alpha_n)}]\\&=\frac{f(x)}{(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}=a_1+\frac{a_2(x-a_1)}{x-\alpha_2}+\frac{a_3(x-a_1)}{(x-\alpha_3)}+\dots\frac{a_n(x-a_1)}{(x-\alpha_n)}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$a_1=\frac{f(x)}{(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}-\frac{a_2(x-a_1)}{x-\alpha_2}+\frac{a_3(x-a_1)}{(x-\alpha_3)}+\dots\frac{a_n(x-a_1)}{(x-\alpha_n)}$$

y haciendo $x=\alpha_1$

$$a_1=\frac{f(\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)\dots(\alpha_1-\alpha_n)} \tag{5.8.1}$$

por otra parte, recordemos que

$$g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$

así que poniendo

$$v(x)=(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)$$
$$g(x)=(x-\alpha_1)v(x)$$

y a partir de la regla para la derivada de un producto

$$g'(x) = (x - \alpha_1)v'(x) + v(x)(x - \alpha_1)' = (x - \alpha_1)v'(x) + v(x)$$

evaluando ahora g' en α_1

$$g'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_1)v'(\alpha_1) + v(\alpha_1) = v(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)\dots(\alpha_1 - \alpha_n) \tag{5.8.2}$$

Y combinando 5.8.1 y 5.8.2

$$a_1 = \frac{f(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)}$$

Por lo tanto

$$\frac{a_1}{x - \alpha_1} = \frac{\frac{f(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)}}{x - \alpha_1} = \frac{f(\alpha_1)}{g'(\alpha_1)(x - \alpha_1)}$$

Y se tiene que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(\alpha_i)}{g'(\alpha_i)(x - \alpha_i)} \tag{5.8.3}$$

5.8.2. Funciones escalonadas como integradores

Sea $[a, b]$ un intervalo compacto y sean f, α funciones reales y acotadas en $[a, b]$. Si α es constante en todo el intervalo $[a, b]$, la integral de Riemann-Stieltjes $\int_a^b f d\alpha$ existe y vale 0, ya que cada suma $S(P, f, \alpha) = 0$. Sin embargo, si α es constante excepto en un punto en el que presenta una discontinuidad de salto, la integral $\int_a^b f d\alpha$ no tiene porqué existir, y si existe, no tiene porqué valer cero. Una descripción más detallada la da el siguiente teorema.

Teorema 5.8.2. *Dados $a < c < b$, definimos α en $[a, b]$ como sigue:*

$$\alpha(x) = \alpha(a) \quad si \quad a \leq x < c$$

$$\alpha(x) = \alpha(b) \qquad si \quad c < x \leq b$$

con $\alpha(a)$, $\alpha(b)$ y $\alpha(c)$ arbitrarios. Sea f una función definida en $[a, b]$ de manera que una por lo menos de las funciones f o α sea continua a la izquierda de c y una por lo menos lo sea a la derecha de c. Entonces $f \in R(\alpha)$ en $[a, b]$ y se tiene

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)\,[\alpha(c+) - \alpha(c-)] \tag{5.8.4}$$

Reducción de una integral de Riemann-Stieltjes a una suma finita. El integrador α del teorema anterior es un caso particular de una clase importante de funciones conocidas con el nombre de funciones escalonadas. Estas funciones son constantes en todo el intervalo excepto en un número finito de discontinuidades de salto.

Definicion 5.18. *A una función α definida en $[a, b]$ se le llama función escalonada si existe una partición*

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

de modo que α sea constante en cada subintervalo abierto (x_{k-1}, x_k).

Al número $\alpha(x_k+) - \alpha(x_k-)$ se le llama el salto en x_k si $1 < k < n$. El salto en x_1 es $\alpha(x_1+) - \alpha(x_1-)$ y en x_n es $\alpha(x_n) - \alpha(x_k-)$.

Las funciones escalonadas establecen conexión entre las integrales de Riemann-Stieltjes y las sumas finitas como lo enuncia el siguiente teorema.

Reducción de una integral de Rieman-Stieltjes a una suma finita.

Teorema 5.8.3. *Sea α una función escalonada definida en $[a, b]$ con salto $\alpha(k)$ en x_k, en donde las x_i son una partición. Sea f una función definida en $[a, b]$ tal que f y α no sean ambas discontinuas a la derecha o a la izquierda de cada x_k. Entonces $\int_a^b f d\alpha$ existe y se tiene*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\alpha_k \tag{5.8.5}$$

Teorema 5.8.4. *Cada suma finita puede expresarse como una integral de Riemann-Stieltjes*

Demostración. Vemos que dada una suma finita $\sum_{k=1}^{n} a_k$, definimos f en $[0, n]$ como:

$$\begin{aligned} &f(x) = a_k \quad si \quad k-1 < x \leq k \quad (k = 1, 2, \ldots n) \\ &f(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.8.6}$$

Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x) d\,[x] \tag{5.8.7}$$

en donde $[x]$ es el mayor entero $\leq x$ $\square$

Bibliografía

[1] Harry Hochstadt: On the Construction of a Jacobi Matrix from Spectral Data. Linear Algebra and its applications (435-443) United National Science Foundation under Grant GP-27960 (1974)

[2] Vladimir A. Marchenko y Tatiana V. Misyura: Señalamientos metodológicos y didácticos al tema: Problemas inversos de la Teoría Espectral de Operadores de Dimensión Finita. Traducción hecha por Mikhail Kudryavtsev.Serie Monografías, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas (IIMAS) UNAM, Volumen 12, No. 28 (2004)

[3] Fritz Gesztezy and Barry Simon: m-Functions and inverse spectral analysis for finite and semi-infinite Jacobi matrices. Journal d'Analyse Mathématique Volume 73, Number 1, 267-297, (1997)

[4] Israel Gohberg and Seymour Goldberg: Basic Operator Theory. 1st ed. 1981, XII, 304 p., ISBN:978-0-8176-4262-4 A Birkhaüser Boston Products

[5] Stanley I. Grossman: Álgebra Lineal. Editorial McGraw Hill, México, 5a edición (2005)

[6] T. M. Apostol: Análisis Matemático Segunda Edición. Editorial Reverté, Barcelona, Reimpresión abril del 2006

[7] Luis O. Silva and Ricardo Weder: On the Two Spectra Inverse Problem for Semi-infinite Jacobi Matrices. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, Volume 9, Number 3, 263-290 (2007)

[8] Bryan P. Rynne and Martin A. Yougson: Linear Functional Analysis. 2nd ed., Springer-Verlag, in the Springer Undergraduate Mathematics Series. ISBN: 1-84800-004-9 (2008)

[9] Tosio Kato: Perturbation Theory for Linear Operators. Reprint of the Corr. 2nd ed. Berlín, Heidelberg, New York 1980, ISBN: 978-3-540-58661-6

[10] Richard Courant y Fritz John: Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático. Reprint of the 1st ed. Berlín, Heidelberg, New York 1989, ISBN: 978-3-540-65058-4