Absolut stetiges Spektrum gewöhnlicher Differentialoperatoren

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von

Rafael René del Rio Castillo
aus
Mexiko Stadt, Mexiko

Frankfurt am Main, 1985

Absolut stetiges Spektrum gewöhnlicher Differentialoperatoren

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

von

Rafael René del Rio Castillo
aus
Mexiko Stadt, Mexiko

Frankfurt am Main, 1985

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Mathematik der Johann Wolfgang Goethe Universität zu Frankfurt am Main und mit Unterstützung des Deutschen Akademischen Austauschdienstes

Dekan : Prof. Dr. H.F. deGroote

1. Berichterstatter : Prof. Dr. J. Weidmann

2. Berichterstatter : Prof. Dr. F. Constantinescu

Tag der mündlichen Prüfung : 23. 5. 1986

Este trabajo está dedicado
a mi esposa María del Carmen
y a mi hijo Diego.

Ich möchte mich besonders herzlich bei Prof. Dr. J. Weidmann bedanken, für die Anregung zu dieser Arbeit und die hervorragende Betreuung.

Mein Dank gilt auch dem D.A.A.D (Deutscher Akademischer Austauschdienst), ohne dessen Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

" Die Erforschung der Wahrheit ist in einer Beziehung schwer, in anderer Beziehung leicht. Das zeigt sich darin, daß niemand sie in ihrem vollen Wert erreichen, niemand aber auch sie gänzlich verfehlen kann. "

Aristoteles , Buch II Metaphysik

Inhalt

Einleitung

In J. Weidmann [27] Abschnitt 5, wurde unter recht allgemeinen Voraussetzungen die absolute Stetigkeit des Spektrums von Sturm–Liouville Operatoren bewiesen. Dabei wurden Differentialausdrücke der folgenden Gestalt zugrunde gelegt :

$$(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\, u(x) \quad \text{für } x \in (a,\infty)$$

wobei q reellwertig und in (a,∞) lokal integrierbar ist $(-\infty \leqq a < \infty)$.

Neben Bedingungen an q im Intervall (c,∞) mit $a<c<\infty$, wurden in [27] noch (implizit) eine Bedingung an das Verhalten von q beim Randpunkt a benötigt, genauer : Um die absolute Stetigkeit des Spektrums jeder selbstadjungierten Realisierung von l in einem Intervall $(\underline{\lambda},\overline{\lambda})$ zu beweisen, wurde dort gefordert, daß jede selbstadjungierte Realisierung von l in $L_2(a,c)$ in $(\underline{\lambda},\overline{\lambda})$ diskretes Spektrum hat.

In E. Heinz [9] wurde für Dirac–Systeme und in J. Weidmann [29] für Dirac–Systeme und Sturm–Liouville Operatoren das gleiche Resultat ohne diese zusätzliche Bedingung bei a bewiesen. Dabei wurde in [9] das Verhalten der Resolvente nahe der reellen Achse untersucht (Grenzabsorption), während in [29] wie schon in [27] Oszillationsmethoden benutzt wurden.

Die Tatsache, daß die absolute Stetigkeit des Spektrums in diesen Fällen nicht durch das Verhalten am linken Rand gestört werden kann, legt die folgende Vermutung nahe (siehe [29]) :

"Sei l ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf (a,b) und A eine selbstadjungierte Realisierung. Für ein $c \in (a,b)$ seien A_a und A_b selbstadjungierte Realisierungen von l in (a,c) bzw. (c,b). Hat A_a oder A_b in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum, so gilt dies auch für A."

In dieser Arbeit wird folgendes gemacht : In Par. 1 werden Beweisideen der

Resultate von [9] und [29] skizziert, sowie eine Verallgemeinerung eines Resultates von J. Walter [25] angegeben. Walter zeigte die absolute Stetigkeit eines Sturm–Liouville Problems auf (a,∞) in $(q(\infty),\infty)$ mit $q(\infty) := \lim_{x\to\infty} q(x) \geq -\infty$, falls das Problem bei a regulär ist ; wir zeigen, daß das Verhalten von q am linken Rand keine Rolle spielt.

In Par. 2 werden einige Bemerkungen über die obige Vermutung und einige Varianten davon gemacht. In Par. 3 werden die Formel für die Resolvente und die Formel von Weyl–Titchmarsh–Kodaira für die Spektralfunktion angegeben. Einige Bemerkungen werden über das Problem mit einem regulären Randpunkt gemacht.

In Par. 4 wird gezeigt, daß nur die absolute Stetigkeit aller selbstadjungierten Realisierungen A_b nicht genügt um die absolute Stetigkeit von A zu erhalten. Das beweist, daß die obige Vermutung sicher falsch ist. In Par. 5 wird bewiesen, daß es reicht zusätzliche Voraussetzungen über 2 selbstadjungierte Realisierungen in (c,b) anzugeben, um die reine absolute Stetigkeit des Spektrums jeder selbstadjungierten Realisierung zu beweisen. In Par. 6 wird gezeigt, daß die Resultate von Par. 5 auf Sturm–Liouville Ausdrücke mit in (c,∞) periodischen und (a,c) beliebigen Koeffizienten angewendet werden können. Die absolute Stetigkeit des Spektrums dieser Operatoren scheint bisher nicht bekannt gewesen zu sein. Auch wird eine Verallgemeinerung eines Resultats von Hinton–Shaw [12] für gestörte periodische Potentiale angegeben.

In Par. 7 wird gezeigt wie die obigen Resultate auf Dirac–Systeme ausgedehnt werden können. Als Anwendung wird bewiesen, daß das absolut stetige Spektrum bei den von Hinton–Shaw [13] untersuchten Dirac–Systemen unabhängig vom Verhalten der Koeffizienten am linken Rand ist.

1. Absolut stetiges Spektrum bei Sturm–Liouville Operatoren und Dirac–Systemen

In diesem Abschnitt werden wir die Resultate aus E. Heinz [9] und J. Weidmann [29] angeben und die Beweisideen skizzieren. Auch werden wir eine Verallgemeinerung eines Resultats von J. Walter [25] erhalten.

In [9] und [29] wurde die absolute Stetigkeit des Spektrums von Dirac–Systemen [9] und Dirac–Systemen und Sturm–Liouville Operatoren [29] bewiesen. Dabei wurden Differentialausdrücke der folgenden Gestalt zugrunde gelegt :

(1) Sturm–Liouville Ausdruck

$$(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\, u(x) \quad \text{für } x \in (a,\infty)$$

wobei q reellwertig und in (a,∞) lokal integrierbar ist.

(2) Dirac–System

$$(lu)(x) = Ju'(x) + P(x)\, u(x) \quad \text{für } x \in (a,\infty)$$

mit $u : (a,\infty) \to \mathbf{C}^2$ und

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_{12}(x) \\ p_{12}(x) & p_2(x) \end{pmatrix}$$

wobei p_1,p_2,p_{12} reellwertig und in (a,∞) lokal integrierbar sind.

Wir sagen im folgenden : " <u>der Operator T hat in I absolut stetiges Spektrum</u> " wenn $\|E(\lambda)\, f\|^2$ in I absolut stetig ist <u>für alle</u> $f \in L_2(a,b)$, wobei $E(\lambda)$ die Spektralschar von T ist.

Die Hauptsätze lauten :

1.1 Satz (J. Weidmann [29])

Sei l wie in (1) erklärt. Für ein $c \in (a,\infty)$ gelte

$$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$$

$q_1(\cdot) \in L_1(c,\infty)$

$q_2(\cdot)$ in $[c,\infty)$ von beschränkter Variation mit

$q_2(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Dann hat jede selbstadjungierte Realisierung H von l in $L_2\ (a,\infty)$ rein absolutstetiges Spektrum in $(0,\infty)$.

1.2 Satz (E. Heinz [9], J. Weidmann [29])

Sei l wie in (2) erklärt. Für ein $c \in (a,\infty)$ gelte

$P(x) = P_0 + P_1(x) + P_2(x)$

$$P_0 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \ \mu_1 < \mu_2$$

$|P_1(\cdot)| \in L_1\ (c,\infty)$

$P_2(\cdot)$ ist in $[c,\infty)$ von beschränkter Variation mit $P_2(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Dann hat jede selbstadjungierte Realisierung H von l in $L_2(a,\infty)^2$ rein absolut stetiges Spektrum in $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$.

In [9] wird Satz 1.2 bewiesen unter Benutzung geeigneter Resolventenabschätzungen in einer komplexen Umgebung der Punktmenge $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$:

Sei w eine C^∞-Funktion mit $w'(x) \leq 0$ und

$$w(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\infty < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$P_{n,j}(x) := w(\tfrac{x}{j})\, P_n(x) \qquad n = 1,2 \text{ und } j \in \mathbb{N}.$$

Mit diesen modifizierten Koeffizienten sei $\mathcal{L}_j$ definiert durch

$$\mathcal{L}_j(u) = Ju' + (P_0 + P_{1,j}(x) + P_{2,j}(x))\, u .$$

Die selbstadjungierten Realisierungen seien mit H_j bezeichnet (falls am linken Ende Grenzkreisfall vorliegt (GKF), ist dort die gleiche Randbedingung zu wählen wie bei H ; am rechten Rand liegt auch für $\mathcal{L}_j$ stets der Grenzpunktfall (GPF) vor). Es gilt $H_j \underset{j\to\infty}{\to} H$ im Sinne der starken Resolventenkonvergenz.

Sei $\delta>0$ und $\sigma > \max(|\mu_1|, |\mu_2|) + \delta$. Für $f \in L_2(a,b)^2$ mit Träger im $[r,s) \subset (a,\infty)$ wird gezeigt :

$$\max_{r\leq x\leq s} |(H_j-\zeta)^{-1} f(x)| \leq K\, \|f\|_1 \quad \text{für } \zeta\in D$$

mit

$$D = \{\lambda+i\tau\in\mathbb{C} \mid \lambda \in (\mathbb{R} \setminus [\mu_1-\delta,\ \mu_2+\delta]) \cap (-\sigma,\sigma),\ -(s-r)^{-1}<\tau<(s-r)^{-1}\}$$

wobei $K = K(r,s,\sigma,\delta)$ unabhängig von j ist.

Hieraus folgt die Abschätzung

$$|\langle f, (H_j-\zeta)^{-1} f\rangle| \leq K\|f\|_1^2 .$$

Mit der Stoneschen Formel für die Spektralschar folgt hieraus für $[\lambda_1,\lambda_2] \subset (\mathbb{R} \setminus [\mu_1-\delta,\ \mu_2+\delta]) \cap (-\sigma,\sigma)$

$$\|E_j(\lambda_2) - E_j(\lambda_1)\, f\|^2 = \lim_{\tau\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \mathrm{Im}(f,(H_j-\lambda-i\tau)^{-1} f)\, d\lambda$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\, K(\lambda_2-\lambda_1)\, \|f\|_1^2 .$$

Mit der starken Resolventenkonvergenz $H_j \to H$ folgt $E_j(\lambda) \overset{s}{\to} E(\lambda)$ und somit

$$\|(E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\, f\|^2 \leq \frac{1}{\pi}\, K(\lambda_2-\lambda_1)\, \|f\|_1^2 .$$

Da $\delta>0$ und $\sigma > \max(|\mu_1|, |\mu_2|) + \delta$ beliebig waren, folgt hieraus die absolute Stetigkeit (Lipschitzstetigkeit) von $\|E(\lambda)\, f\|^2$ in $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$ für alle $f \in L_2(a,\infty)^2$ mit kompaktem Träger in (a,∞). Da der absolut stetige Teilraum abgeschlossen ist, folgt daraus die absolute Stetigkeit von $\|E(\lambda)\, f\|^2$ in $[\lambda_1,\lambda_2]$ für alle $f \in L_2(a,\infty)^2$; das ist die Behauptung des Satzes.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß jede selbstadjungierte Realisierung von l in $L_2(a,c)$ (bzw. $L_2(a,c)^2$) mit $a<c<\infty$, in $(0,\infty)$ (bzw. $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$) nur diskretes Spektrum hat, sind Satz 1.1 und 1.2 in [27] bzw. [30] bewiesen worden. In [29] wird diese zusätzliche Annahme nicht mehr gebraucht. Die Beweisidee dieser Resultate ist die folgende :

Sei $a \leqq b < d < \infty$. Es werden selbstadjungierte Operatoren, H_b in (b,∞) und H_{bd} in (b,d) erklärt (man beachte, daß H_b bei b, und H_{bd} bei b und d regulär sind) mit folgenden Eigenschaften :

$$H_{bd} \to H_b \quad \text{für} \quad d \to \infty$$

$$H_b \to H \quad \text{für} \quad b \to a$$

im Sinne der starken Resolventenkonvergenz. Daraus folgt für die Spektralscharen E_{bd}, E_∞ bzw. E von H_{bd}, H_b bzw. H :

$$E_{bd}(\lambda) \overset{s}{\to} E_b(\lambda) \quad \text{für} \quad d \to \infty$$

(falls λ nicht Sprungstelle von $E_b(\cdot)$ ist)

$$E_b(\lambda) \overset{s}{\to} E(\lambda) \quad \text{für} \quad b \to a$$

(falls λ nicht Sprungstelle von $E(\cdot)$ ist).

Da H_{bd} regulär ist, besteht sein Spektrum nur aus Eigenwerten. Aus dem Spektralsatz haben wir

$$\|E_{bd}(\lambda_2) - E_{bd}(\lambda_1)\, f\|^2 = \| \sum_{\lambda_1<\lambda_{bdm}\leqq\lambda_2} \langle\varphi_{bdm},f\rangle\, \varphi_{bdm}\|^2$$

wobei φ_{bdm} die normierten Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_{bdm} sind.

Wir betrachten f mit kompaktem Träger und ein kompaktes Intervall $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}] \subset \mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$ im Fall des Dirac-Systems, $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}] \subset (0,\infty)$ im Fall des Sturm-Liouville Operators. Es wird versucht die Spektralschar E_{bd}, genauer, den oben angegebenen Ausdruck für $\|E_{bd}(\lambda_2) - E_{bd}(\lambda_1)\, f\|^2$, abzuschätzen.

Es wird bewiesen, daß für die normierten Eigenfunktionen φ_{bdm} von H_{bd} gilt

$$\left|\varphi_{bdm}(x)\right| \leqq C(d-c)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in \operatorname{supp} f$$

mit $b\leqq c<d$, für d hinreichend groß.

Unter Verwendung von Oszillationsmethoden wird die Zahl der Eigenwerte von H_{bd} die in $(\lambda_1,\lambda_2]$ liegen abgeschätzt durch

$$N_{bd}(\lambda_1,\lambda_2) \leqq C_1\, |\lambda_2-\lambda_1|\, d + C_b + o(d)$$

wobei C_1 von b und d, C_b von d und der Term o(d) von b unabhängig sind.

Dann folgt für $(\lambda_1,\lambda_2] \subset [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$

$$\|E_{bd}(\lambda_2) - E_{bd}(\lambda_1)\, f\|^2$$

$$= \| \sum_{\lambda_1<\lambda_{bdm}\leqq\lambda_2} \langle\varphi_{bdm},f\rangle\, \varphi_{bdm}\|^2$$

$$= \sum_{\lambda_1<\lambda_{bdm}\leqq\lambda_2} \left|\langle\varphi_{bdm},f\rangle\right|^2$$

$$\leqq \{C_1\, |\lambda_2-\lambda_1|\, d + C_b + o(d)\}\, C^2(d-c)^{-1}\, \|f\|^2 \operatorname{meas}(\operatorname{supp} f)$$

$$\leqq C(f)\, (|\lambda_2-\lambda_1| + C_b\, d^{-1})$$

für hinreichend große d, wobei die Konstanten nicht von d abhängen.

Für $d \to \infty$ folgt hieraus

$$\|E_b(\lambda_2) - E_b(\lambda_1)\, f\|^2 \leqq C(f)\, |\lambda_2-\lambda_1|$$

und hieraus für $b \to a^+$

$$\|E(\lambda_2)\, f\|^2 - \|E(\lambda_1)\, f\|^2 = \|E(\lambda_2) - E(\lambda_1)\, f\|^2 \leqq C(f)\, |\lambda_2-\lambda_1|$$

d.h. $\|E(\lambda)\, f\|^2$ ist absolut stetig in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ für alle f mit kompaktem Träger. Da der absolut stetige Teilraum abgeschlossen ist, folgt die absolute Stetigkeit von $\|E(\lambda)\, f\|^2$ in $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$ bzw. $(0,\infty)$ für alle f. Das ist was die Sätze 1.1, 1.2

behaupten.

Jetzt möchten wir folgenden Satz beweisen :

Satz 1.3 .

Sei $(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\,u(x)$ für $x \in (a,\infty)$, wobei $q(x)$ in (a,∞) zwei mal differenzierbar ist und $q(\infty) := \lim\limits_{t\to\infty} q(t)$ existiert, ($a = -\infty$ und $q(\infty) = -\infty$ zugelassen) . Für ein $c \in (a,\infty)$ gelte :

a) $$\int_c^\infty \frac{dt}{\sqrt{|q(t)|}} = \infty$$

b) $$\int_c^\infty \left|Q(t,\lambda)\right| dt < \infty \quad \text{für } \lambda \in (q(\infty),\, \infty)$$

$$Q(t,\lambda) := \frac{1}{4}\,\frac{q''}{(\lambda-q)^{\frac{3}{4}}} + \frac{5}{16}\,\frac{(q')^2}{(\lambda-\ q)^{\frac{5}{2}}}\ .$$

Dann hat jede selbstadjungierte Realisierung H von l in $L_2(a,\infty)$ rein absolut stetiges Spektrum in $(q(\infty),\infty)$.

Unter der zusätzlichen Annahme, daß der linke Punkt a regulär ist, ist dieser Satz in [25] bewiesen worden. Diese Bedingung ist jedoch nicht nötig.

Zuerst beweisen wir folgenden

Hilfssatz 1.4

Sei l wie im Satz 1.3. Für jedes Kompaktum $G \subset (a,\infty)$ und jedes Intervall $[\lambda_1,\lambda_2] \subset (q(\infty),\infty)$, gibt es ein $C>0$ und $T_0>0$ so, daß für jede Lösung u von $(l-\lambda)\,u = 0$ mit $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$ gilt :

$$\frac{|u(x)|}{\left(\int_{T_1}^{T_2} |u(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}} \leq C \left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{(\lambda_2-q(t))^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (x \in G)$$

$a < T_1 < T_2 < \infty$, T_1 groß genug , $T_2 > T_0$.

Beweis

Sei $G \subset (a,\infty)$ und $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$. Sei $g>a$ so, daß $G \subset (g,\infty)$.

Da $(l-\lambda)\,u(x) = 0$ für $x \in (a,\infty)$ gilt, gilt auch $(l-\lambda)\,u(x) = 0$ für $x \in [g,\infty)$.

Hieraus folgt

$$-v'' + \tilde{q}(t)\,v(t) = \lambda v(t) \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

wobei

$$v(t) := u(t+g)$$
$$\tilde{q}(t) := q(t+g)\ .$$

Es gilt auch

$$\int^\infty \frac{dt}{\sqrt{\tilde{q}(t)}} = \infty$$

und

$$\int^\infty |\tilde{Q}(t,\lambda)|\,dt < \infty$$

wobei $\tilde{Q}(t) := Q(t+g)$.

Aus [25] (Satz 2 und Formeln (19), (20), (21), (22), (23), (32)) folgt

$$\frac{|v(t)|}{\left(\int_{t_1}^{t_2} v^2(s)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} \leq M_3\,(8M_1)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{(\lambda_2-\tilde{q}(s))^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } t \in [0,\infty)$$

(mit t_1, t_2 groß genug) , deshalb

$$\frac{|u(t+g)|}{\left(\int_{t_1}^{t_2} u^2(s+g)\,ds\right)^{\frac{1}{2}}} \leq M_3\,8M_1 \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{ds}{(\lambda_2-q(s+g))^{\frac{1}{2}}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\frac{|u(x)|}{\left(\int\limits_{t_1+g}^{t_2+g} u^2(t)\,dt\right)} \leqq M_3\, 8M_1 \left(\int\limits_{t_1+g}^{t_2+g} \frac{dt}{(\lambda_2-q(t))^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } x \in [g,\infty)$$

mit $T_1 = t_1+g$ folgt die Behauptung.
$T_2 = t_2+g$

Q.E.D.

Beweis des Satzes 1.3

Für jedes $b \in (a,\infty)$ sei der Operator H_b erklärt durch

$$D(H_b) = \{\ v \in L_2(a,\infty) \mid v,v' \text{ absolut stetig in } [b,\infty)$$
$$-v'' + q\,v \in L_2(b,\infty)$$
$$[v,w]_b = 0 \text{ falls GKF bei } a$$
$$v(b^+) = 0 \text{ falls GPF bei } a\ \}$$

$$H_b = \begin{cases} -v''(x) + q(x)\,v(x) & x \in (b,\infty) \\ 0 & x \in (a,b) \end{cases}$$

wobei w die Lösung von $lw = 0$ ist, mit der die Randbedingung von H bei a gestellt ist.

H_b ist selbstadjungiert und es gilt $H_b \to H$ für $b \to a$ im Sinne der starken Resolventenkonvergenz. (Es gibt ein core von H so, daß für jedes f aus diesem core gilt $f \in D(H_b)$ für b hinreiched nahe bei a und $H_b f = Hf$. (Siehe [29] und [26] Satz 9.16 (i))) .

Da H in $(q(\infty),\infty)$ keine Eigenwerte hat (siehe [25] Satz 2) folgt

$$E_b(\lambda) \underset{b\to a^+}{\overset{s}{\to}} E(\lambda) \quad \text{für } \lambda \in (q(\infty),\infty)$$

wobei E_b die Spektralschar von H_b, (E die Spektralschar von H) ist. (Siehe [27] Satz 1,2')

Für b,d mit $a < b < d < \infty$ sei der Operator H_{bd} erklärt durch

$$D(H_{bd}) = \{\ v \in L_2(a,\infty) \mid v,v' \text{ absolut stetig in } [b,d]$$
$$-v'' + q\,v \in L_2(b,d)$$
$$[v,w]_b = 0 \text{ falls GKF bei } a$$
$$v(b) = 0 \text{ falls GPF bei } a$$
$$v(d) = 0\ \}$$

$$H_{bd} = \begin{cases} -v''(x) + q(x)\,v(x) & b \leqq x \leqq d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(man beachte, daß bei ∞ stets der GPF vorliegt, vgl. [25]) .

Dann gilt $H_{bd} \to H_b$ für $b \to \infty$ im Sinne der starken Resolventenkonvergenz und

$$E_{bd}(\lambda) \overset{s}{\to} E_b(\lambda) \quad \text{für } \lambda \in (q(\infty),\infty)$$

wobei E_{bd} die Spektralschar von H_{bd} ist.

Wir zeigen die absolute Stetigkeit des Spektrums von H in $(q(\infty),\infty)$. Dazu sei $f \in L_2(a,\infty)$ mit kompaktem Träger $G \subset (a,\infty)$. Da die Operatoren H_{bd} regulär sind, ist das Spektrum $\sigma(H_{bd})$ diskret. Aus dem Spektralsatz wissen wir, daß für $(\lambda',\lambda''] \subset [\lambda_1,\lambda_2] \subset (q(\infty),\infty)$

$$\langle E_{bd}(\lambda'') - E_{bd}(\lambda')\, f, f\rangle = \sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leqq\lambda''} \left| \langle f, \frac{v_{bdm}}{\|v_{bdm}\|}\rangle \right|^2$$

gilt, wobei v_{bdm} die Eigenfunktionen von H_{bd} sind, die zu den Eigenwerten λ_{bdm} gehören .

Zusammen mit Hilfssatz 1.4 folgt für $(\lambda',\lambda''] \subset [\lambda_1,\lambda_2] \subset (q(\infty),\infty)$

$$\sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leqq\lambda''} \left| \langle f, \frac{v_{bdm}}{\|v_{bdm}\|}\rangle \right|^2 = \sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leqq\lambda''} \left| \int\limits_G f(t)\, \frac{v_{bdm}(t)}{\|v_{bdm}\|}\, dt \right|^2$$

(1.1)

$$\leqq \left(\int\limits_G f(t)\,dt\right)^2 C^2 \left(\int\limits_{T_1}^{d} \frac{dt}{(\lambda''-q(t))^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} \sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leqq\lambda''} 1$$

falls d hinreichend groß.

Jetzt möchten wir $\sum\limits_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leq\lambda''} 1$ abschätzen. Für jedes λ_{bdm} gilt

$$-v''_{bdm} + q(x)\, v_{bdm}(x) = \lambda_{bdm}\, v(x)\,, \qquad b \leq x \leq d$$

und deshalb auch

$$-u''_m(t) + q(t)\, u_m(t) = \lambda_{bdm}\, u_m(t)\,, \qquad 0 \leq t \leq d-b\,,$$

wobei

$$u_m(t) := v_{bdm}(t+b)$$
$$\tilde{q}(t) := q(t+b)\,.$$

Aus [25] wissen wir, daß in diesem Fall

$$\sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leq\lambda''} 1 \leq M + \frac{\lambda''-\lambda'}{\pi} \int_{t_2}^{d-b} \frac{dt}{(\lambda''-\tilde{q}(t))^{\frac{1}{2}}}$$

gilt, M unabhängig von d (aber im allgemeinen nicht von b). Deshalb folgt

$$\sum_{\lambda'<\lambda_{bdm}\leq\lambda''} 1 \leq M + \frac{\lambda''-\lambda'}{\pi} \int_{t_2+b}^{d} \frac{dt}{(\lambda''-q(t))^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Wir können t_2 so groß wählen, daß $t_2+b = T_1$ gilt. Setzen wir diese Ungleichung in (1.1) ein, dann erhalten wir

$$\langle E_{bd}(\lambda'') - E_{bd}(\lambda')\, f, f\rangle$$
$$\leq M \Big(\int_G f(t)\, dt \Big)^2 C^2 \Big(\int_{T_1}^{d} \frac{dt}{(\lambda''-q(t))^{\frac{1}{2}}} \Big)^{-1} + \frac{|\lambda''-\lambda'|}{\pi} \Big(\int_G f(t)\, dt \Big)^2 C^2$$

Für $d \to \infty$ folgt hieraus, da

$$\Big(\int_{T_1}^{d} \frac{dt}{(\lambda''-q(t))^{\frac{1}{2}}} \Big)^{-1} \overset{d\to\infty}{\to} 0$$

gilt und die Konstanten nicht von d abhängen :

$$\|E_b(\lambda'') - E_b(\lambda')\, f\|^2 \leq \frac{|\lambda''-\lambda'|}{\pi} \Big(\int_G f(t)\, dt \Big)^2 C^2$$

und hieraus für $b \to a^+$

$$\|E(\lambda'') - E(\lambda')\, f\| \leq C(f)\, |\lambda''-\lambda'|$$

d.h. $\|E(\lambda)\|^2$ ist absolut stetig in $[\lambda_1,\lambda_2]$ für alle f mit kompaktem Träger. Da der absolut stetige Teilraum abgeschlossen ist, folgt daraus die absolute Stetigkeit von $\|E(\lambda)\, f\|^2$ in $[\lambda_1,\lambda_2]$ für alle $f \in L_2(a,\infty)$.

Q.E.D.

2. Einige Vermutungen

Die Tatsache, daß die absolute Stetigkeit des Spektrums in den Sätzen 1.1, 1.2, 1.3 nicht durch das Verhalten des Differentialausdrucks am linken Rand gestört werden kann, legt die folgende Vermutung nahe (siehe [29]) :

(V1) Sei l ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf (a,b) und A eine selbstadjungierte Realisierung. Für $c \in (a,b)$ sei A_b eine selbstadjungierte Realisierung von l in (c,b). Hat A_b in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum , so gilt dies auch für A . (Eine entsprechende Aussage wäre für den Randpunkt a statt b zu erwarten.)

Wenn es für alle $\lambda \in [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ keine $L_2(a,b)$–Lösung von $(l-\lambda)\ u = 0$ gibt, dann liegt in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ kein Eigenwert vor und das Spektrum ist stetig. In allen uns bekannten explizit lösbaren Problemen liegt dann stets absolut stetiges Spektrum vor (siehe [20]) . Dies könnte die folgende Vermutung nahelegen :

(V2) Sei l ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf (a,b). Existiert für kein $\lambda \in [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ eine $L_2(a,b)$–Lösung von $(l-\lambda)\ u = 0$, so ist das Spektrum jeder selbstadjungierten Realisierung von l in (a,b) absolut stetig in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$.

Die erste Vermutung wird in Par. 4 widerlegt, sogar in der abgeschwächten Form :

(V1') Hat jede selbstadjungierte Realisierung A_b von l in (c,b) absolut stetiges Spektrum in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$, so gilt dies auch für A.

Daß dies auch die zweite Vermutung widerlegt, kann man folgendermaßen sehen : Nehmen wir an, daß alle selbstadjungierten Realisierungen A_b, in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum haben, während A auch einen singulär stetigen Teil besitzt.

Für kein $\lambda \in [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ existiert eine $L_2(c,b)$ Lösung von $(l-\lambda)\ u = 0$, sonst hätte eine geeignete selbstadjungierte Realisierung A_b den Eigenwert λ. Deshalb existiert keine $L_2(a,b)$ Lösung von $(l-\lambda)\ u = 0$.

Da A in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ singulär stetiges Spektrum hat und für $\lambda \in [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ keine Lösung von $(l-\lambda)\ u = 0$ in $L_2(a,b)$ liegt, ist damit die zweite Vermutung widerlegt.

Eine modifizierte Form der ersten Vermutung, bei der über zwei selbstadjungierte Realisierungen in (c,b) stärkere Annahmen gemacht werden, wird für Sturm–Liouville Operatoren und Dirac–System in Par. 5 und Par. 7 bewiesen.

Das absolut stetige Spektrum eines selbstadjungierten Operators T ist definiert durch

$$\sigma_{ac}(T) := \sigma(T_{ac})$$

wobei T_{ac} die Einschränkung von T auf den absolut stetigen Teilraum $H_{ac}(T)$ ist. (Siehe [16] S. 519 und [26] S. 196). Die Aussage "$[\underline{\lambda},\overline{\lambda}] \subset \sigma_{ac}(T)$" ist offensichtlich schwächer als die Aussage "T hat in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum". Deshalb ist die folgende Vermutung eine Abschwächung von (V1) :

(V3) Hat A_b in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum (für eine selbstadjungierte Realisierung A_b in (c,b)), so gilt $\sigma_{ac}(A) \supset [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$. Diese Vermutung ist leicht zu beweisen :

Sei $M := A_a \oplus A_b$; M ist selbstadjungiert in $L_2(a,c) \oplus L_2(c,b) = L_2(a,b)$, da A_a undA_b selbstadjungiert sind. Da auch A selbstadjungiert ist, haben wir $R(i+A) = R(i+M) = L_2(a,b)$. Wir wollen beweisen, daß $R[(i+A)^{-1} - (i+M)^{-1}]$ endlichdimensional ist. Sei $\tilde{l} := i+l$ und $r \in L_2(a,b)$ beliebig.

$$\tilde{l}[(i+A)^{-1}r - (i+M)^{-1}r] = \tilde{l}(i+A)^{-1}r - \tilde{l}(i+M)^{-1}r .$$

Da $(i+A)^{-1}r \in D(A)$ und $(i+M)^{-1}r \in D(M)$ gilt, kann der obige Ausdruck auch in der Form

$$(i+A)(i+A)^{-1}r - (i+M)(i+M)^{-1}r = r - r = 0$$

geschrieben werden, d.h. die Elemente y von $R[(i+A)^{-1} - (i+M)^{-1}]$ sind Lösungen der homogenen Gleichung $\tilde{l}y = 0$. Also ist die Dimension dieses Teilraums höchstens gleich der Ordnung von $\tilde{l}$, (siehe [19]).

Aus [21] Satz XI.9 (Kuroda-Birman) folgt, daß $\sigma_{ac}(M) = \sigma_{ac}(A)$, da die Wellenoperatoren eine unitäre Äquivalenz zwischen den Einschränkungen von M und A auf die entsprechenden absolutstetigen Teilräume darstellen.

Sei $H_{ac} \subset L_2(a,b)$ der absolutstetige Teilraum bezüglich M und $H^a_{ac} \subset L_2(a,c)$, $H^b_{ac} \subset L_2(c,b)$ die absolutstetigen Teilräume bezüglich A_a und A_b. Aus der Definition von M, wissen wir, daß $E(\lambda) = E_a(\lambda) \oplus E_b(\lambda)$ gilt, wobei E, E_a und E_b die Spektralscharen von M, A_a und A_b sind. Hieraus folgt

$$H_{ac} = H^a_{ac} \oplus H^b_{ac}$$

$$M\Big|_{H_{ac}} = A_a\Big|_{H^a_{ac}} \oplus A_b\Big|_{H^b_{ac}}$$

und deshalb

$$\sigma_{ac}(A) = \sigma_{ac}(M) = \sigma(M\Big|_{H_{ac}}) = \sigma(A_a\Big|_{H^a_{ac}} \oplus A_b\Big|_{H^b_{ac}})$$

$$= \sigma(A_a\Big|_{H^a_{ac}}) \cup \sigma(A_b\Big|_{H^b_{ac}}) = \sigma_{ac}(A_a) \cup \sigma_{ac}(A_b) .$$

Q.E.D.

Da in den Sätzen 1.1, 1.2, 1.3 die stärkere Eigenschaft der Lipschitzstetigkeit statt der absoluten Stetigkeit vorliegt, und da dies die absolute Stetigkeit der Spektralfunktion (siehe Par. 3) impliziert, wie der nächste Hilfssatz zeigt, könnte vielleicht folgende Modifikation der ersten Vermutung gelten :

(V4) Sei l ein formal selbstadjungierter Differentialausdruck auf (a,b) und A eine selbstadjungierte Realisierung. Für ein $c \in (a,b)$ sei A_b selbstadjungierte Realisierung von l in (c,b). Ist die Spektralfunktion von A_b in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ Lipschitzstetig, so hat A in $[\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$ absolut stetiges Spektrum .

Hilfssatz 2.1

$\|E(\lambda) f\|^2$ Lipschitzstetig für alle f mit kompaktem Träger => die Spektralfunktion (siehe Par. 3) $\rho(\lambda)$ ist auch Lipschitzstetig.

Beweis

Wir wissen, daß (siehe Par. 3)

$$\|E(\lambda) - E(\lambda_0) f\|^2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \int_c^d u(x,\mu) f(x)\, dx \right|^2 d\rho(\mu)$$

gilt, falls der Träger von f in (c,d) enthalten ist.

Wählen wir

$$f(x) := \begin{cases} u(x,\lambda_0) & \text{für } x \in [c,d] , \\ 0 & \text{sonst} , \end{cases}$$

so folgt

$$\|E(\lambda) - E(\lambda_0) f\|^2 = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| \int_c^d \overline{u(x,\mu)}\, u(x,\lambda_0)\, dx \right|^2 d\rho(\mu)$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \Big[\int_c^d \left|u(x,\lambda_0)\right|^2 dx + \int_c^d \overline{(u(x,\mu)-u(x,\lambda_0))}\, u(x,\lambda_0)\, dx \Big]^2 d\rho(\mu)$$

$$= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \left| C + o(\mu-\lambda_0) \right|^2 d\rho(\mu)$$

$$= C^2 \left(\rho(\lambda) - \rho(\lambda_0)\right) + o(\lambda-\lambda_0) \left(\rho(\lambda) - \rho(\lambda_0)\right) .$$

Aus der Lipschitzstetigkeit von $\|E(\lambda) f\|^2$ haben wir

$$\left|\rho(\lambda) - \rho(\lambda_0)\right| \leq \frac{K}{C^2+o(\lambda-\lambda_0)} |\lambda-\lambda_0| ,$$

also ist ρ Lipschitzstetig.

Q.E.D.

Es ist übrigens einfach zu sehen, daß für Multiplikationsoperatoren (i.e. Differentialoperatoren der Ordnung 0) die erste Vermutung nicht stimmt, wie folgendes Beispiel zeigt :

$$\text{Sei} \quad u(x) = \begin{cases} k > 0 & , \quad a \leq x < 0 \\ x & , \quad 0 \leq x < \infty \end{cases} .$$

Seien T und T_∞ erklärt durch

$$D(T) = \{f \in L_2(a,\infty) \mid uf \in L_2(a,\infty)\}$$

$$(Tf)(x) = u(x)\, f(x)$$

$$D(T_\infty) = \{f \in L_2(0,\infty) \mid id(\cdot)\, f(\cdot) \in L_2(0,\infty)\}$$

$$(T_\infty f)(x) = xf(x) .$$

T und T_∞ sind selbstadjungiert. Sei $[\lambda_1,\lambda_2] \subset (0,\infty)$ so, daß $k \in (\lambda_1,\lambda_2)$.

Es gilt $[\lambda_1,\lambda_2] \subset \sigma(T_\infty)$. Der Wertebereich von $E_\infty(\lambda)$ (die Spektralschar von T_∞) ist die Menge der u so, daß $u(x) = 0$ für $x > \lambda$ gilt. Deshalb

$$\|E_\infty(S)\, u\|^2 = \int_{id^{-1}(S)} \left|u(x)\right|^2 dx = \int_S \left|u(x)\right|^2 dx$$

und das Spektrum von T_∞ ist rein absolut stetig. Das Spektrum von T enthält jedoch k als Eigenwert.

3. Spektraltheorie für Sturm–Liouville–Operatoren

Sei l der folgende Sturm–Liouvillesche Differentialausdruck

(3.1) $lu = -u'' + q(x)\,u \qquad a \leqq x \leqq b$

Die Funktion q ist reellwertig und in (a,b) lokal integrierbar.

Wir sagen:

- bei b liegt der Grenzkreisfall (GKF) vor, falls für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ jede Lösung von $(l-\lambda)\,u = 0$ in $L_2(c,b)$ enthalten ist, (mit $c \in (a,b)$).
- bei b liegt der Grenzpunktfall (GPF) vor, falls für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mindestens eine Lösung von $(l-\lambda)\,u = 0$ nicht in $L_2(c,b)$ enthalten ist. $(c \in (a,b))$.

Der Weylsche Alternativsatz besagt, daß die beiden Fälle eine echte Alternative darstellen. Siehe [26]. Die entsprechende Fallunterscheidung ist am Endpunkt a möglich.

Der Endpunkt a (bzw. b) heißt regulär, wenn a (bzw. b) endlich ist und q in [a,b), (bzw. (a,b]) lokal integrierbar ist. Andernfalls nennen wir den Endpunkt a, (bzw. b) singulär. Wenn beide Endpunkte regulär sind, heißt der Ausdruck l(u) regulär. An einem regulären Endpunkt liegt stets der Grenzkreisfall vor.

Sei L der Differentialoperator, der durch (3.1) und getrennte selbstadjungierte Randbedingungen definiert ist. Wir wissen (siehe [26] S. 241), daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Resolvente die Form :

$$R_z(L)\,g(x) := (z-L)^{-1}\,g(x) =$$

$$W(u_a,u_b)^{-1}\,\{u_b(x)\int_a^x u_a(y)\,g(y)\,dy + u_a(x)\int_x^b u_b(y)\,g(y)\,dy\}$$

hat, wobei $W(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ die Wronskideterminante ist und u_a, u_b bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte Lösungen von $lu = zu$ sind, mit

$$u_a \begin{cases} \text{bei a quadratisch integrierbar} \\ \text{falls GPF bei a} \\[4pt] \text{bei a die Randbedingung von L erfüllt ,} \\ \text{falls GKF bei a} \end{cases}$$

$$u_b \begin{cases} \text{bei a quadratisch integrierbar ,} \\ \text{falls GPF bei a} \\[4pt] \text{bei b die Randbedingung von L erfüllt ,} \\ \text{falls GKF bei b} \end{cases}$$

u_a und u_b können in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ holomorph gewählt werden.

Sei $\{u_1(x,z),u_2(x,z)\}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung

$$lu = zu$$

das holomorph von z abhängt.

Sei $G_a := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid u_1(\,\cdot,z) \text{ linear abhängig zu } u_a(\,\cdot,z)\}$

Da u_1, u_a holomorphe Funktionen von z sind, gilt entweder $G_a = \emptyset$ oder $G_a = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \setminus A$, wobei A eine abzählbare Menge ist.

Falls $G_a \neq \emptyset$ gilt, existiert eine Funktion

$$m_a : G_a \to \mathbb{C}$$

m_a holomorph in G_a so, daß

(3.2) $u_a(x,z) = m_a(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z)$

gilt. Entsprechend können wir schreiben, falls $G_b \neq \emptyset$

(3.3) $u_b(x,z) = m_b(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z)$

wobei

$$m_b : G_b \to \mathbb{C}$$

m_b holomorph in

$$G_b = \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid u_1(\cdot,z) \text{ linear unabhängig zu } u_b(\cdot,z)\}$$

Für $z \in G_a \cap G_b$ gelten beide Gleichungen (3.2) und (3.3). Die Fälle $G_a = \emptyset$ und $G_b = \emptyset$ können durch geeignete Wahl des Fundamentalsystems ausgeschlossen werden.

Dann können wir schreiben :

$$\begin{aligned}(3.4)\quad R_z(L)g(x) = {} & [W(m_a(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z),\ m_b(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z))]^{-1} \\ & \cdot \{(m_b(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_a^x (m_a(z)\,u_1(y,z) + u_2(y,z))\,g(y)\,dy \\ & + (m_a(z)\,u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_x^b (m_b(z)\,u_1(y,z) + u_2(y,z))\,g(y)\,dy\}\end{aligned}$$

Dieser Integraloperator hat den Kern

$$(3.4)'\quad R(x,y,z) = \begin{cases} \sum_{j,k=1}^{2} m_{jk}^{+}(z)\,u_j(x,z)\,u_k(y,z) & \text{für } y<x \\ \sum_{j,k=1}^{2} m_{jk}^{-}(z)\,u_j(x,z)\,u_k(y,z) & \text{für } x<y \end{cases}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{+}(z) & m_{12}^{+}(z) \\ m_{21}^{+}(z) & m_{22}^{+}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_a(z)\,m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} \\ \dfrac{m_a}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{1}{W(u_a,u_b)(z)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{-}(z) & m_{12}^{-}(z) \\ m_{21}^{-}(z) & m_{22}^{-}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_a(z)\,m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{m_a(z)}{W(u_a,u_b)(z)} \\ \dfrac{m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{1}{W(u_a,u_b)(z)} \end{pmatrix}$$

$$W(u_a,u_b) = [m_a - m_b]\,W(u_1,u_2)\,.$$

Die Matrizen $(m_{ij}^{\pm})$ werden wir die charakteristischen Matrizen bezüglich des Fundamentalsystems u_1,u_2 nennen.

Nehmen wir an, daß $p \in (a,b)$ und daß u_1,u_2 folgende Anfangsbedingungen bei p erfüllen :

$$(3.5)\quad \begin{aligned} u_1(p,z) &= \sin\alpha & u_2(p,z) &= \cos\alpha \\ u_1'(p,z) &= -\cos\alpha & u_2'(p,z) &= \sin\alpha \end{aligned} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

dann haben wir folgenden

Hilfssatz 3.1

Für $z \in \mathbb{C}^{+} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ gilt :

$$\operatorname{Im} m_b(z) < 0$$

$$\operatorname{Im} m_a(z) > 0$$

(siehe [17] S. 134) .

Beweis

Mit der Greenschen Formel (siehe [15]) folgt

$$\begin{aligned} & (z-\bar{z}) \int_p^b u_b(x,z)\,u_b(x,\bar{z})\,dx \\ &= \int_p^b \{l u_b(x,z)\,u_b(x,\bar{z}) - u_b(x,z)\,l u_b(x,\bar{z})\}\,dx \\ &= W(u_b(x,z),\,u_b(x,\bar{z}))\Big|_p^b \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (3.5) erhalten wir nach einer kleinen Rechnung

$$W(u_b(x,z),\,u_b(x,\bar{z}))\Big|_p = m_b(z) - m_b(\bar{z})\,.$$

Nehmen wir zunächst an, daß $b<\infty$ ein regulärer Punkt ist. Da $u_b(x,z)$, $u_b(x,\bar{z})$ die Randbedingung bei b erfüllen, haben wir, daß

$$W(u_b(x,z),\,u_b(x,\bar{z}))\Big|_b = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Hieraus folgt

$$(z-\bar{z}) \int_p^b u_b(x,z)\, u_b(x,\bar{z})\, dx = 0 - [m_b(z) - m_b(\bar{z})]$$

$$= m_b(\bar{z}) - m_b(z) .$$

Da unser Differentialausdruck l und die getrennten Randbedingungen reell sind, haben wir

$$m(\bar{z}) = \overline{m(z)} \quad \text{und} \quad u_b(x,\bar{z}) = \overline{u_b(x,z)} .$$

Hieraus folgt, daß

$$\int_p^b |u_b(x,z)|^2\, dx = \frac{\overline{m_b(z)} - m_b(z)}{z-\bar{z}}$$

$$= - \frac{\operatorname{Im} m_b(z)}{\operatorname{Im} z}$$

gilt, also

$$\operatorname{Im} m_b(z) < 0 \quad \text{für } \operatorname{Im} z > 0 .$$

Jetzt nehmen wir an, daß b kein regulärer Punkt ist. Sei $c \in (p,b)$ und sei m_c so, daß $m_c(z)\ u_1+u_2$ eine selbstadjungierte Randbedingung bei c erfüllt. Mit derselben Überlegung wie oben, erhalten wir, daß $\operatorname{Im} m_c(z) < 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$ gilt. Wir wissen (siehe [3], [17]), daß $m_c(z)$ einen Kreis umläuft, wenn wir die Randbedingungen bei c variieren. Dieser Kreis ist in $\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ enthalten und $m_b(z)$ liegt im Inneren dieses Kreises (siehe [3], [17]). Hieraus folgt, daß $\operatorname{Im} m_b(z) < 0$ gilt, falls $z \in \mathbb{C}^+$.

Um die Behauptung für m_a zu beweisen, machen wir genau dasselbe wie oben, jetzt mit dem Intervall (a,0) und erhalten

$$\int_a^0 |u_a(x,z)|^2\, dx = \frac{\operatorname{Im} m_a(z)}{\operatorname{Im}(z)} .$$

Hieraus folgt $\operatorname{Im} m_a(z) > 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$.

Q.E.D.

Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine 2x2 matrixwertige Funktion mit :

a) Für $\lambda \leq \mu$ ist die Differenz $\rho(\mu) - \rho(\lambda)$ eine positiv semidefinite Matrix, i.e. ρ ist nichtfallend .

b) Alle Funktionen $\rho_{ij}(\lambda)$, i,j = 1,2 sind rechtsseitig stetig.

Mit Hilfe von ρ können wir einen Hilbertraum von (Äquivalenzklassen von) $\mathbb{C}^2$-wertigen Funktionen definieren.

Für beschränkte, stückweise stetige Vektorfunktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$, mit kompaktem Träger, erklären wir das Skalarprodukt

$$(f,g) = \sum_{j,k=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\, \overline{g_k(\lambda)}\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

und identifizieren alle Funktionen, die sich nur um ein h mit (h,h) = 0 unterscheiden. Die Vervollständigung dieses Raumes ist ein Hilbertraum, der mit $L_2(\mathbb{R},d\rho)$ bezeichnet wird.

Die Funktion $\rho(\lambda)$ des nächsten Satzes charakterisiert das Spektrum des Differentialoperators L vollständig. Die Menge der λ mit $\rho(\lambda+\varepsilon) - \rho(\lambda-\varepsilon) \neq 0$ $\forall\ \varepsilon > 0$, bildet das Spektrum von L. Die Unstetigkeitsstellen von $\rho(\lambda)$ sind die Eigenwerte.

Satz 3.2 (Weyl-Titchmarsh-Stone-Kodaira)

Sei L der oben erwähnte selbstadjungierte Differentialoperator. Seien u_1,u_2 und $(m_{ij}^{\pm})$ wie in Formel (3.4)' . Dann gibt es eine rechtsstetig nichtfallende 2x2 Matrixfunktion

$$\rho(\lambda) = (\rho_{ij}(\lambda))_{i,j=1,2} \qquad -\infty < \lambda < \infty$$

so, daß

$$ULU^{-1} = M_\rho$$

gilt, wobei M_ρ der Multiplikationsoperator mit der Funktion id in $L_2(\mathbb{R},d\rho)$ ist, U unitär

$$U : L_2(a,b) \to L_2(\mathbb{R}, d\rho)$$

$$(Uf)(\lambda) = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}}{\text{l.i.m.}} \displaystyle\int_\alpha^\beta u_1(x,\lambda)\, f(x)\, dx \\ \underset{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}}{\text{l.i.m.}} \displaystyle\int_\alpha^\beta u_2(x,\lambda)\, f(x)\, dx \end{pmatrix}$$

$$(U^{-1}g)(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x,\lambda)\, g_k(\lambda)\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

$\rho(\lambda)$ heißt Spektralfunktion und ist gegeben durch die Formel von Titchmarsh

$$\rho_{kj}(\lambda) = K_{kj} - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\delta^{\lambda+\delta} [m_{kj}^{\pm}(s+i\varepsilon) - m_{kj}^{\pm}(s-i\varepsilon)]\, ds$$

$K_{kj} \in \mathbb{R}$ Konstanten. Da der Differentialausdruck l reell ist, haben wir

$$\rho_{kj}(\lambda) = K_{kj} + \frac{1}{\pi} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\delta^{\lambda+\delta} -\text{Im}\, m_{kj}^{\pm}\,(s+i\varepsilon)\, ds\, .$$

(Wir können ρ_{kj} normieren, indem wir $\rho(0) = 0$ setzen und deshalb auch $K_{kj} = 0$).

Für die Spektralschar $E(\lambda)$ von L und die Resolvente $R_z L := (z-L)^{-1}$ gilt

$$(E(\Delta)u)(x) = \int_a^b E(x,y,\Delta)\, u(y)\, dy$$

$$(R_z L u)(x) = \int_a^b R(x,y,z)\, u(y)\, dy)$$

wobei

$$E(x,y,\Delta) := \int_\Delta \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x,\lambda)\, u_k(y,\lambda)\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

$$R(x,y,z) := \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{u_j(x,\lambda)\, u_k(y,\lambda)}{z-\lambda}\, d\rho_{jk}(\lambda)\, .$$

Für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$\int_a^b \left|E(x,y,\Delta)\right|^2 dy < \infty\, , \quad \int_a^b \left|R(x,y,z)\right|^2 dy < \infty\, .$$

(Siehe [19], [14], [17]).

Allgemein gilt für jede Borelmenge Δ

$$\langle E(\Delta)\, f,\, g\rangle = \int_\Delta \sum_{j,k=1}^{2} F_j(\lambda)\, \overline{G_k(\lambda)}\, d\rho_{jk}(\lambda) \tag{3.6}$$

wobei

$$Uf = \begin{pmatrix} F_1(\lambda) \\ F_2(\lambda \end{pmatrix} \qquad Ug = \begin{pmatrix} G_1(\lambda) \\ G_2(\lambda) \end{pmatrix}$$

und U wie im Satz 3.2 erklärt ist.

Sei $m_f(\Delta) := \|E(\Delta)f\|^2$. Wenn wir in (3.6) g=f wählen, folgt sofort, daß m_f absolut stetig bezüglich ρ ist, für alle f. (Für die Definition des Radon–Stieltjes Integrals siehe [23])

$U: L_2(a,b) \to L_2(\mathbb{R}, d\rho)$ so solche

Wir können in (3.6) f und g so wählen, daß

$$\langle E(\Delta)\, f,\, g\rangle = \int_\Delta d\rho_{jk}(\lambda) = \rho_{jk}(\Delta)$$

gilt. Hieraus folgt, daß ρ absolut stetig bezüglich m_f ist.

Aus diesen Überlegungen folgt sofort folgender

Hilfssatz 3.3

Das Maß m_f ist absolut stetig bezüglich dem Lebesguesche Maß für alle $f \in L_2(a,b)$ <=> ρ_{ik} ist absolut stetig bezüglich dem Lebesgueschen Maß für alle i,k.

Später werden wir unter Benutzung der Formel von Titchmarsh (siehe Satz 3.2) die absolute Stetigkeit von ρ untersuchen. Aus obigem Hilfsatz wird dann die absolute Stetigkeit für m_f folgen .

Wenn das Problem regulär am linken Randpunkt $a > -\infty$ ist (d.h. q in [a,b) lokal integrierbar), können wir $u_1(x,z) = u_a(x,z)$ ersetzen. Die Resolvente sieht dann so aus :

$$(R_z(L)g)(x) = W(u_1(x,z),\ m_b(z)\ u_1(x,z) + u_2(x,z))^{-1}$$

$$\cdot \{(m_b(z)\ u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_a^x u_1(y,z)\ g(y)\ dy$$

$$+ u_1(x,z) \int_x^b (m_b(z)\ u_1(y,z) + u_2(y,z))\ g(y)\ dy\} .$$

Die charakteristischen Matrizen sehen so aus :

$$\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)} & 0 \\ \frac{1}{W(u_1,u_2)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}^- & m_{12}^- \\ m_{21}^- & m_{22}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)} & \frac{1}{W(u_1,u_2)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Spektralfunktion

(3.7) $$\rho(\lambda) = \rho_{11}(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_\delta^{\lambda+\delta} - \operatorname{Im} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)} (u+i\varepsilon)\ du + K_{11}$$

$\rho_{ik}(\lambda) = K_{ik}$ Konstanten für $(i,k) \neq (1,1)$. In diesem Fall ist das Spektrum einfach, d.h. für die Spektraldarstellung von A wird nur eine Komponente benötigt.

Sei weiterhin l regulär bei a. Wenn die selbstadjungierte Randbedingung bei a durch

(3.8) $$u(a,z) \cos \alpha + u'(a,z) \sin \alpha = 0$$

gegeben ist, können wir u_1 und u_2 so wählen, daß

(3.9) $$\begin{array}{ll} u_1(a,z) = \sin \alpha & u_2(a,z) = \cos \alpha \\ u_1'(a,z) = - \cos \alpha & u_2'(a,z) = \sin \alpha \end{array}$$

gilt. Die Funktion u_1 erfüllt offensichtlich die Randbedingung bei a und $W(u_1,u_2)(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

In diesem Fall hat die Resolvente $R_z(L)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ den Kern (man beachte, daß $W(u_1,u_b) = 1$ gilt)

$$R(x,y,z) = \begin{cases} [m(z)\ u_1(x,z) + u_2(x,z)]\ u_1(y,z) & y \leq x \\ [m(z)\ u_1(y,z) + u_2(y,z)]\ u_1(x,z) & y > x \end{cases}$$

wobei m(z) so gewählt ist, daß

(3.9)' $$m(z)\ u_1(x,z) + u_2(x,z)$$

- bei b quadratisch integrierbar falls GPF bei b vorliegt
- die selbstadjungierte Randbedingung von L erfüllt, falls GKF bei b vorliegt.

Andererseits gilt (siehe Satz 3.2)

$$R(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_1(x,\lambda)\ u_1(y,\lambda)}{z-\lambda}\ d\rho(\lambda)$$

$(\rho(\lambda) := \rho_{11}(\lambda))$.

Deshalb haben wir, falls $u_1(a,z) \neq 0$, i.e. falls $\alpha \neq n\pi$

$$[m(z)\ u_1(a,z) + u_2(a,z)]\ u_1(a,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_1(a,\lambda)]^2}{z-\lambda}\ d\rho(\lambda)$$

$$[m(z) \sin \alpha + \cos \alpha] \sin \alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha}{z-\lambda}\ d\rho(\lambda) .$$

Hieraus folgt

$$m(z) = - \cot \alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{z-\lambda}$$

und deshalb für $z = u+i\varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$

$$(3.10) \qquad -\operatorname{Im} m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(u-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, d\rho(\lambda)$$

Wenn $u_1(a,z) = 0$ gilt, haben wir $u'(a,z) = \pm 1$ und können schreiben

$$[m(z)\, u_1'(a,z) + u_2'(a,z)]\, u_1'(a,z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[u_1'(a,\lambda)]^2}{z-\lambda}\, d\rho(\lambda) .$$

Analog wie oben folgt auch in diesem Fall Formel (3.10).

Satz 3.4

Sei l regulär bei a. Bei b liege der GPF vor. Sei die selbstadjungierte Randbedingung bei a und u_1, u_2, $m(z)$ genau wie in (3.8), (3.9) und (3.9)'. Wenn wir statt u_2 eine andere zu u_1 linear unabhängige Funktion $\tilde{u}_2(\cdot,z)$ wählen, die holomorph von z abhängt, erhalten wir unter Benutzung der Formel von Weyl–Titchmarsh–Kodaira, die gleiche Spektralfunktion.

Beweis

Sei $\tilde{u}_2(x,z) = C_1(z)\, u_1(x,z) + C_2(z)\, u_2(x,z)$ so, daß $W(u_1,\tilde{u}_2)(z) \neq 0$ gilt. $C_1(z)$ und $C_2(z)$ hängen holomorph von z ab, da $\tilde{u}_2(\cdot,z)$, $u_1(\cdot,z)$ und $u_2(\cdot,z)$ holomorph von z abhängen.

Sei $m_b(z)$ so, daß

$$m_b(z)\, u_1(x,z) + \tilde{u}_2(x,z) \in L_2(c,b) \text{ gilt} .$$

$c \in (a,b)$.

Dann folgt

$$(m_b(z) + C_1(z))\, u_1(x,z) + C_2(z)\, u_2(x,z) \in L_2(c,b)$$

und

$$\left(\frac{m_b(z)+C_1(z)}{C_2(z)} \right) u_1(x,z) + u_2(x,z) \in L_2(c,b) . \quad (C_2(z) \neq 0)$$

Hieraus folgt

$$m(z) = \frac{m_b(z)+C_1(z)}{C_2(z)} ,$$

also

$$C_2(z)\, m(z) = m_b(z) + C_1(z) .$$

Auch haben wir, daß

$$W(u_1,\tilde{u}_2) = C_2(z)\, W(u_1,u_2)$$

gilt.

Hieraus folgt

$$\frac{m_b(z)}{W(u_1,\tilde{u}_2)} + \frac{C_1(z)}{W(u_1,\tilde{u}_2)} = \frac{m_b(z)+C_1(z)}{C_2(z) W(u_1,u_2)}$$

$$= \frac{C_2\, m(z)}{C_2\, W(u_1,u_2)} = \frac{m(z)}{W(u_1,u_2)} = m(z) .$$

Da $\dfrac{C_1(z)}{W(u_1,\tilde{u}_2)(z)}$ holomorph und reell für $z \in \mathbb{R}$ ist, aus (3.7) folgt die Behauptung.

Q.E.D.

4. Widerlegung der Vermutungen (V1) und (V1')

Jetzt werden wir zeigen, daß die absolute Stetigkeit aller selbstadjungierten Realisierungen A_b nicht reicht, um die absolute Stetigkeit von A zu erhalten (vgl. Vermutung (V1) in Par. 2).

Seien $\rho_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad i = 1,2$

nicht abnehmende Funktionen, die folgende Bedingungen erfüllen :

a) $\rho_1(\lambda)$ ist absolut stetig in einem Intervall $I' \subset \mathbb{R}$

$$\left.\frac{d\rho_1}{d\lambda}\right|_{\lambda \in I'} \geqq N' > 0$$

ρ_2 singulär stetig in I' .

b) Die Funktion $\rho_0 := \rho_1 + \rho_2$ erfülle die Bedingungen des Satzes von Gelfand-Levitan (siehe [19]) :

A) Für beliebiges reelles x existiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}x}\, d\rho_0(\lambda)$$

B) Setzt man

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \rho_0(\lambda) - \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda > 0 \\ \rho_0(\lambda) & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$$

so existiert das Integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\tau(\lambda)$$

für alle x aus dem Intervall $0 \leqq x < \infty$ und die Funktion

$$a(x) = \int_{1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda}\, d\tau(\lambda)$$

hat in $0 \leqq x \leqq \infty$ stetige Ableitungen bis zur vierten Ordnung einschließlich.

Wir können zum Beispiel ρ_i (i = 1,2) wie folgt wählen :

$I' = [0,1]$

$$\rho_1(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda \in (-\infty,0] \\ \frac{2}{\pi}\lambda & \text{für } \lambda \in (0,1] \\ \frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \text{für } \lambda \in (1,\infty) \end{cases}$$

$$\rho_2(\lambda) = \begin{cases} 0 & \lambda \in (-\infty,0] \\ F(\lambda) & \lambda \in (0,1] \\ 1 & \lambda \in (1,\infty) \end{cases}$$

wobei $F(\lambda)$ eine singulärstetige nichtabnehmende Funktion ist mit

$$F(0) = 0\ ,\ F(1) = 1$$

Siehe z.B. [22] S. 48.

Da ρ_0 offensichtlich die Bedingungen des Satzes von Gelfand-Levitan erfüllt (man beachte, daß τ nur in [0,1] wächst), gibt es einen Differentialoperator L_0 mit Spektralfunktion ρ_0, der durch einen Differentialausdruck

$$(l_0u)(x) = -u''(x) + q_0(x)\, u(x) \qquad 0 \leqq x < \infty$$

mit stetigen reellwertigen Koeffizienten q_0 und Randbedingungen der Form

$$u(0) \cos \alpha + u'(0) \sin \alpha = 0$$

definiert ist.

Jetzt wählen wir $\{u_1(x,z),\ u_2(x,z)\}$ so, daß

$$-u_k''(x) + q_0(x)\, u_k(x) = z\, u_k(x) \qquad k = 1,2\ ,\quad 0 \leqq x < \infty$$

gilt und

$$u_1(0,z) \cos \alpha + u_1'(0,z) \sin \alpha = 0$$

$$u_2(p,z) \cos \theta + u_2'(p,z) \sin \theta = 0$$

wobei $0 < p < \infty$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

Bemerkung

Alle folgenden Überlegungen gelten auch, wenn wir $p < 0$ wählen. In diesem Fall ist das Potential beliebig in $[p,0)$ und gleich q_0 in $[0,\infty)$.

Die Funktionen $u_1(x,z)$ und $u_2(x,z)$ hängen für festes x holomorph von z ab, deshalb ist auch die Wronskideterminante $W(u_1,u_2)(z)$ eine holomorphe Funktion von z. Diese Funktion $W(u_1,u_2)(z)$ kann nicht identisch Null sein, sonst wäre jedes z ein Eigenwert des Problems mit obigen Randbedingungen in $[0,p]$, aber dies ist unmöglich, weil das Problem in $[0,p]$ regulär ist. (Siehe [26], Satz 8.29 (c)). Hieraus folgt, daß $u_1(x,z)$ und $u_2(x,z)$ linear unabhängig sind, abgesehen von isolierten Punkten z.

Sei $I_\theta \subset I'$ ein Intervall, das keinen dieser Punkte enthält, I_θ kompakt.

I) Die charakteristische Matrix des Operators L_0 bezüglich $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$ ist

$$\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)} & 0 \\ \frac{1}{W(u_1,u_2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Aus (3.10) folgt, für $z = u+i\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$-\operatorname{Im} m(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(u-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_0(\lambda)$$

wobei $m(z) = \frac{m_b}{W(u_1,u_2)}(z) + H(z)$.

$H(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C}$ (vgl. Satz 3.4). Da der Differentialausdruck reell ist, haben wir $\operatorname{Im} H(z) = 0$ für $z \in \mathbb{R}$. Deshalb können wir für jedes $M > 0$ ein $k'' > 0$ wählen so, daß

$$|\operatorname{Im} H(u+i\varepsilon)| < M \quad \text{für } \varepsilon < k''.$$

Dies gilt gleichmäßig für $u \in I_\theta$ (I_θ ist kompakt).

Genau wie in Behauptung b des Satzes 5.3 folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_1(\lambda) > 2N > 0$$

für $u \in I_\theta$, $0 < \varepsilon < k'$, k' klein genug.

Da ρ_2 nichtfallend ist, gilt

$$-\operatorname{Im} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)}(z) - \operatorname{Im} H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_0(\lambda)$$

$$\geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_1(\lambda) > 2N \quad \text{für } u \in I_\theta,\ 0 < \varepsilon < k'.$$

Deshalb haben wir, für $u \in I_\theta$, $0 < \varepsilon < k$, k hinreichend klein

$$-\operatorname{Im} \frac{m_b}{W(u_1,u_2)}(u+i\varepsilon) > N > 0. \tag{4.1}$$

II) Sei $L_{p\theta}$ der Differentialoperator, der durch den oben gefundenen Differentialausdruck

$$(l_0 u)(x) = -u''(x) + q_0(x)\, u(x), \quad 0 < p \leqq x < \infty$$

und durch die Randbedingung

$$u(p,z) \cos\theta + u'(p,z) \sin\theta = 0$$

definiert ist. Die Funktion u_2 erfüllt diese Randbedingung bei p.

Die charakteristische Matrix des Operators $L_{p\theta}$ bezüglich $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$ ist :

$$\begin{pmatrix} m_{11}^+ & m_{12}^+ \\ m_{21}^+ & m_{22}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{W(u_1,u_2)} \\ 0 & -\frac{1}{W(u_1,u_2)m_b} \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt nach der Formel von Weyl-Tichmarsh-Kodaira mit $m_{p\theta} := m_{22}^+$, daß für $\gamma < \mu$

$$\rho_{p\theta}(\mu) - \rho_{p\theta}(\gamma) = \frac{1}{\pi} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} -\operatorname{Im} m_{p\theta}(u+i\varepsilon)\, du$$

gilt, wobei $[\gamma+\delta, \mu+\delta] \subset I_\theta$. $\rho_{p\theta}$ ist die Spektralfunktion von $L_{p\theta}$.

Jetzt wollen wir beweisen, daß $\rho_{p\theta}$ in I_θ absolutstetig ist. Damit hätten wir, daß $L_{p\theta}$ in I_θ absolut stetiges Spektrum hat, während dies für L_0 nicht gilt.

Sei $m_0 := \frac{m_b}{W(u_1,u_2)}$. Wenn wir die charakteristischen Matrizen von L_0 und $L_{p\theta}$ vergleichen, sehen wir, daß

$$m_{p\theta} = -\frac{[W(u_1,u_2)]^{-2}}{m_0} = -K(z)\,[m_0(z)]^{-1}$$

gilt, (wobei $K(z) := [W(u_1,u_2)(z)]^{-2}$) . (Es ist klar, daß $K(z)$ und m_0 von θ abhängen) . Auch wissen wir aus (4.1), daß

$$-\operatorname{Im} m_0 \geqq N > 0$$

gilt.

Sei $-m_0(z) = u(z) + i\,v(z)$

(wobei $u(z) := -\operatorname{Re} m_0$, $v(z) := -\operatorname{Im} m_0$) .

Dann gilt

$$\frac{1}{m_0(z)} = -\frac{1}{u(z)+iv(z)}$$

und

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{m_0(z)}\right) = \frac{v(z)}{u^2(z)+v^2(z)} \leqq \frac{1}{v(z)}.$$

Da $v(z) \geqq N > 0$ gilt, haben wir

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{m_0(z)}\right) \leqq \frac{1}{N}.$$

Andererseits gilt

$$N \leqq v(z) = \frac{\operatorname{Im}\left(\frac{1}{m_0(z)}\right)}{\left(\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}\right)^2+\left(\operatorname{Im}\frac{1}{m_0(z)}\right)^2} \leqq \frac{\frac{1}{N}}{\left(\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}\right)^2},$$

$$N \leqq \frac{1}{N\left(\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}\right)^2}, \text{ also } N^2 \leqq \frac{1}{\left(\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}\right)^2}$$

und somit

$$\left|\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}\right| \leqq \frac{1}{N}.$$

Diese Ungleichungen gelten für $z = u+i\varepsilon$ mit $u \in I_\theta$, $0 < \varepsilon < k$, k klein .

Betrachten wir jetzt die Spektralfunktion $\rho_{p\theta}$ des Problems in (p,∞) ,

$$\rho_{p\theta}(\mu) - \rho_{p\theta}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} -\operatorname{Im}\left[K(z)\left(-\frac{1}{m_0(z)}\right)\right] du$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta} \left[\operatorname{Re} K(z)\operatorname{Im}\left(\frac{1}{m_0(z)}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{m_0(z)}\right)\operatorname{Im} K(z)\right] du\,.$$

Aus der Holomorphie von $K(z)$ und der Beschränktheit von $\operatorname{Im}\frac{1}{m_0(z)}$ und $\operatorname{Re}\frac{1}{m_0(z)}$ folgt die absolute Stetigkeit von $\rho_{p\theta}$ in I_θ.

Hiermit ist schon die erste Vermutung (V1) aus Par. 2 widerlegt, wenn wir $c = p$, $A_b = L_{p\theta}$, $A = L_0$, $a = 0$, $b = \infty$ setzen, und Hilfssatz 3.3 benutzen.

III) Jetzt zeigen wir noch, daß der Operator $L_{p\theta}$ in I' rein absolut stetiges Spektrum hat. Dies gilt dann für alle $\theta \in \mathbb{R}$, während L_0 dort singuläres Spektrum hat. Damit ist dann auch (V1'), die abgeschwächte Form der Vermutung (V1) (vgl. Par. 2) widerlegt.

Da $\rho_{p\theta}$ in jedes $I_\theta \subset I'$ (das im Sinne der obigen Konstruktion zulässig ist) absolut stetig ist, gibt es nur isolierte Stellen, nämlich die Punkte $\lambda_i \in I'$ mit $W(u_1,u_2)(\lambda_i) = 0$, die noch zu untersuchen sind. Da $\rho_{p\theta}$ monoton ist, genügt es für die absolute Stetigkeit in I', die Stetigkeit in diesen Punkten λ_i zu beweisen.

Nehmen wir an, daß $\rho_{p\theta}$ in einem der Ausnahmepunkte λ_i nicht stetig ist. Dieser Punkt muß Eigenwert von $L_{p\theta}$ sein. Sei $\tilde{u}_i$ die Eigenfunktion zum Eigenwert λ_i. Da

$$-u_2'' + q_0(x)\,u_2 = \lambda_i\,u_2$$

gilt (siehe Def. von u_2), folgt, daß $\tilde{u}_i$ und $u_2(x,\lambda_i)$ linear abhängig sind, weil beide dieselbe Gleichung mit derselben Randbedingung erfüllen. Hieraus folgt, daß u_2 auch Eigenfunktion zu λ_i ist.

Da $W(u_1,u_2)(\lambda_i) = 0$ gilt, sind u_1,u_2 linear abhängig, i.e. $u_2(x,\lambda_i) = K\ u_1(x,\lambda_i)$. Hieraus folgt, daß u_1 Eigenfunktion von L_0 zum Eigenwert λ_i ist. Hiermit haben wir einen Widerspruch, weil wir angenommen haben, daß L_0 keine Eigenwerte in I' hat (siehe Konstruktion von L_0).

Hieraus folgt, daß $\rho_{p\theta}$ absolut stetig in I' ist, für alle θ. Zusammen mit Hilfssatz 3.3 folgt, daß der Operator $L_{p\theta}$ in I' absolut stetiges Spektrum hat.

5. Unabhängigkeit des absolut stetigen Spektrums vom linken Rand

Sei

$$(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\ u(x)\ ,\ x \in (a,b)\ ,\quad a < 0 < b\ ,$$

q reellwertig und in (a,b) lokal integrierbar. Bei b liege der Grenzpunktfall vor. Seien die Operatoren L_θ und L erklärt durch :

$$D(L_\theta) = \{u \in L_2(0,b)\ |\ u,u' \text{ absolut stetig in } (0,b)$$
$$lu \in L_2(0,b)$$
$$u(0,z)\cos\theta + u'(0,z)\sin\theta = 0\}$$

(der Endpunkt 0 ist regulär und deshalb liegt dort der GKF vor)

$$L_\theta u = lu$$

$$D(L) = \{u \in L_2(a,b)\ |\ u,u' \text{ absolut stetig in } (a,b)$$
$$lu \in L_2(a,b)$$
$$[u,v]_a = 0 \text{ falls GKF bei } a\}$$

(v reelle Lösung von $lv = 0$)

$$Lu = lu\ .$$

Die so definierten Operatoren L_θ bzw. L sind selbstadjungiert in $L_2(0,b)$ bzw. $L_2(a,b)$. Seien ρ_θ bzw. ρ die entsprechenden Spektralfunktionen.

Sei $m_\theta(z)$ so, daß

$$m_\theta(z)\ u_1^\theta(x,z) + u_2^\theta(x,z) \in L_2(0,b)$$

gilt, wobei $\{u_1^\theta,u_2^\theta\}$ ein Fundamentalsystem von $L_\theta u = zu$ ist mit

$$u_1^\theta(0,z) = \sin\theta \qquad u_2^\theta(0,z) = \cos\theta$$

(5.1)

$$u_1^{\theta\prime}(0,z) = -\cos\theta \qquad u_2^{\theta\prime}(0,z) = \sin\theta$$

$$\theta \in [0,2\pi)\ .$$

(Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist $u_1^\theta(\cdot,z) \notin L_2(0,b)$, denn sonst hätten wir einen nicht reellen Eigenwert von L_θ).

Hilfssatz 5.1

Seien α,β zwei verschiedene Werte von θ, i.e. $\alpha \in [0,2\pi)$, $\beta \in [0,2\pi)$, $\alpha \neq \beta$. Dann gilt

$$(5.2) \qquad m_\beta(z) = \frac{m_\alpha(z)\cot\gamma - 1}{m_\alpha(z) + \cot\gamma}, \quad \gamma = \alpha - \beta .$$

Beweis

Es gilt

$$(5.3) \qquad u_1^\alpha(x,z) = C_{11}(z)\, u_1^\beta(x,z) + C_{12}(z)\, u_2^\beta(x,z) ,$$

$$(5.4) \qquad u_2^\alpha(x,z) = C_{21}(z)\, u_1^\beta(x,z) + C_{22}(z)\, u_2^\beta(x,z) .$$

Hieraus folgt

$$[m_\alpha(z)\, C_{11}(z) + C_{21}(z)]\, u_1^\beta(x,z) + [m_\alpha(z)\, C_{12}(z) + C_{22}(z)]\, u_2^\beta(x,z)$$
$$= m_\alpha(z)\, u_1^\alpha(x,z) + u_2^\alpha(x,z) \in L_2(0,b)$$

und falls $m_\alpha(z)\, C_{12}(z) + C_{22}(z) \neq 0$ gilt

$$\frac{m_\alpha(z)\, C_{11}(z) + C_{21}(z)}{m_\alpha(z)\, C_{12}(z) + C_{22}(z)}\, u_1^\beta(x,z) + u_2^\beta(x,z) \in L_2(0,b) .$$

Die Konstanten C_{ij} können wir z.B. ausrechnen indem wir die Gleichungen (5.3) und (5.4) ableiten, $x = 0$ einsetzen und (5.1) benutzen. Wir erhalten

$\tilde{C}_{11} = C_{11}$
$\tilde{C}_{21} = -C_{21} = \sin(\alpha - \beta)$
$\tilde{C}_{12} = -C_{12}$
$\tilde{C}_{22} = C_{22}$

$$C_{11} = \cos(\alpha-\beta) \qquad C_{12} = \sin(\alpha-\beta)$$
$$C_{21} = -\sin(\alpha-\beta) \qquad C_{22} = \cos(\alpha-\beta) .$$

Da wir für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ stets $\operatorname{Im} m(z) \neq 0$ haben, gilt auch $m_\alpha(z)\, C_{12}(z) + C_{22}(z) \neq 0$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und die Gleichung (5.2) ist bewiesen.

Q.E.D.

Satz 5.2

Existieren $k > 0$, $N > 0$, $M > 0$ so, daß

$$|m_\alpha(u+i\varepsilon)| < N \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} m_\alpha(u+i\varepsilon)| > M$$

gilt, für $0<\varepsilon<k$, $\forall \; u \in I' = [\underline{\lambda}', \overline{\lambda}']$.

Dann folgt

$$\rho(\lambda) \text{ ist absolut stetig in } I' .$$

Beweis

Sei $m_a(z)$ so, daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt :

$m_a(z)\, u_1^\alpha(x,z) + u_2^\alpha(x,z)$ entweder bei a in L_2 liegt, falls GPF bei a, oder bei a die selbstadjungierte Randbedingung von L erfüllt, falls GKF bei a. (Für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ kann $u_1^\alpha(\cdot,z)$ nicht bei a in L_2 liegen bzw. bei a die Randbedingung erfüllen, sonst hätte das selbstadjungierte Problem in (a,0) einen nicht reellen Eigenwert.)

Sei $m_b(z) := m_\alpha(z)$. Es gilt

$$m_b(z)\, u_1^\alpha(x,z) + u_2^\alpha(x,z) \in L_2(0,b) .$$

Sei jetzt

$$a(z) = \operatorname{Re} m_a(z) \qquad c(z) = \operatorname{Re} m_b(z)$$
$$b(z) = \operatorname{Im} m_a(z) \qquad d(z) = \operatorname{Im} m_b(z)$$

$$-\operatorname{Im} m_{22}^{+} = -\operatorname{Im} \frac{1}{m_a(z) - m_b(z)} = -\operatorname{Im} \frac{1}{(a(z)-c(z)) + (b(z)-d(z))i}$$

$$= -\operatorname{Im}\frac{(a-c)-(b-d)i}{(a-c)^2+(b-d)^2} = \frac{b-d}{(a-c)^2+(b-d)^2}.$$

Wir wissen aus Hilfssatz 3.1, daß $b(z) > 0$ und $d(z) < 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$ gilt. Deshalb haben wir .

$$0 < \frac{b-d}{(a-c)^2+(b-d)^2} \leqq \frac{1}{b-d} \leqq -\frac{1}{d} = -\frac{1}{\operatorname{Im} m_b(z)} \quad z \in \mathbb{C}^+,$$

also

$$\left|-\operatorname{Im}\frac{1}{m_a(u+i\varepsilon)-m_b(u+i\varepsilon)}\right| < \frac{1}{|\operatorname{Im} m_b(u+i\varepsilon)|}$$

für $0 < \varepsilon$.

Jetzt wissen wir, daß für $\varepsilon < k$, $u \in I'$ $|\operatorname{Im} m_b(u+i\varepsilon)| > M$ gilt, also

$$\left|-\operatorname{Im}\frac{1}{m_a(z)-m_b(z)}\right| < \frac{1}{M} \qquad \text{für } u \in I',\ 0<\varepsilon<k.$$

Damit folgt

$$\rho_{22}(\mu)-\rho_{22}(\gamma) = \frac{1}{\pi}\lim_{\delta\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma+\delta}^{\mu+\delta}\left\{-\operatorname{Im}\frac{1}{m_a(u+i\varepsilon)-m_b(u+i\varepsilon)}\right\}du \leqq \frac{1}{\pi M}\int_{\gamma}^{\mu} du$$

i.e. ρ_{22} ist absolut stetig.

Jetzt betrachten wir

$$-\operatorname{Im} m_{11}^{+}(z) = -\operatorname{Im}\frac{m_a\, m_b}{m_a-m_b}$$

$$= \frac{\operatorname{Im}\frac{1}{m_b} - \operatorname{Im}\frac{1}{m_a}}{(\operatorname{Re}\frac{1}{m_b} - \operatorname{Re}\frac{1}{m_a})^2 + (\operatorname{Im}\frac{1}{m_b} - \operatorname{Im}\frac{1}{m_a})^2}$$

(> 0 für $z \in \mathbb{C}^+$),

$$\leqq \frac{1}{\operatorname{Im}\frac{1}{m_b} - \operatorname{Im}\frac{1}{m_a}} \leqq \frac{1}{\operatorname{Im}\frac{1}{m_b}} = -\frac{|m_b|}{\operatorname{Im} m_b} \leqq \frac{N}{M}.$$

Also gilt

$$\rho_{11}(\mu)-\rho_{11}(\gamma) \leqq \int_{\gamma}^{\mu} du \cdot \frac{1}{\pi}\,\frac{N}{M}$$

und deshalb ist ρ_{11} absolut stetig.

Es ist auch einfach zu sehen, daß (siehe [17] S. 155 und [24] S. 66)

$$\left\{\operatorname{Im}\frac{m_a}{m_a-m_b}\right\}^2 = \left\{\operatorname{Im}\frac{m_b}{m_a-m_b}\right\}^2 \leqq \left(\operatorname{Im}\frac{1}{m_a-m_b}\right)\left(\operatorname{Im}\frac{m_a m_b}{m_a-m_b}\right)$$

gilt . Hieraus folgt die absolute Stetigkeit von ρ_{12} und ρ_{21} .

Q.E.D.

Satz 5.3

Sei ρ_θ absolut stetig in $I = (\underline{\lambda},\overline{\lambda}) \subset \mathbb{R}$ für $\theta = \alpha$ und $\theta = \beta$ (zwei verschiedene Werte von θ). Seien M,N,N' Konstanten so, daß

$$0 < N < \left.\frac{d\rho_\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I} < M < \infty$$

und

$$0 < N' < \left.\frac{d\rho_\beta}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I}$$

gilt. Dann folgt :

$\rho(\lambda)$ ist absolut stetig in I.

Beweis

a) **Behauptung** :

Es existiert ein $k > 0$ so, daß für $0<\varepsilon<k$ gilt

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda)\right| < C = \text{konstant}$$

gleichmäßig für $u \in I' = [\underline{\lambda}',\overline{\lambda}'] \subset I = (\underline{\lambda},\overline{\lambda})$.

Beweis der Behauptung :

Zuerst betrachten wir das Integral über $\bar{I} = [\underline{\lambda},\overline{\lambda}]$.

$$\left|\int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda)\right| = \left|\int_{\underline{\lambda}}^{\overline{\lambda}} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, \rho'_\alpha(\lambda)\, d\lambda\right|$$

$$\leq M \int_{\underline{\lambda}}^{\bar{\lambda}} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\lambda \leq M\pi .$$

Jetzt sei $u \in I'$. Dann gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}\setminus\bar{I}} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) \right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}\setminus\bar{I}} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}$$

$$\leq \varepsilon\, C_1 \int_{\mathbb{R}\setminus\bar{I}} \frac{1}{1+\lambda^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) = \varepsilon\, C_1\, C_2$$

weil eine Konstante $C_1 > 0$ existiert so, daß

$$\frac{1}{(\lambda-u)^2} < \frac{C_1}{1+\lambda^2} \quad \begin{array}{l}\text{für alle } u \in I' \text{ und} \\ \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \bar{I}\end{array}$$

gilt und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\lambda^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) = -\operatorname{Im} m_\alpha(i) < C_2 < \infty$$

(Siehe Formel (3.10)). Hieraus folgt die Behauptung.

b) **Behauptung** :

Es existiert ein k so, daß für $0<\varepsilon<k$ gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) \right| \geq D = \text{konstant} > 0$$

gleichmäßig für $u \in I'$.

Beweis der Behauptung :

Zuerst betrachten wir das Integral über I'

$$\left| \int_{I'} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) \right| = \left| \int_{I'} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, \rho_\alpha'(\lambda)\, d\lambda \right|$$

$$\geq N \int_{I'} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\lambda = N \int_{\frac{\underline{\lambda}'-u}{\varepsilon}}^{\frac{\bar{\lambda}'-u}{\varepsilon}} \frac{dv}{v^2+1} \geq N \int_{\frac{\underline{\lambda}'-u}{k}}^{\frac{\bar{\lambda}'-u}{k}} \frac{dv}{v^2+1} \geq N\, C_1 = D$$

($C_1 > 0$ falls $\varepsilon < k$).

Oben haben wir $v = \frac{\lambda-u}{\varepsilon}$ eingesetzt. Auch haben wir

$$\int_{\mathbb{R}\setminus I'} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) \geq 0 \quad (\text{da } \rho_\alpha \text{ nicht fallend ist}).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt die Behauptung.

Indem wir die Formel (3.10) benutzen, können wir schreiben :

$$(5.5) \qquad D \leq \left| -\operatorname{Im} m_\alpha(u+i\varepsilon) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon}{(\lambda-u)^2+\varepsilon^2}\, d\rho_\alpha(\lambda) \right| \leq C$$

Wenn wir $U_\beta = \operatorname{Re} m_\beta(z)$, $V_\beta = \operatorname{Im} m_\beta(z)$ setzen und entsprechend für m_α, erhalten wir aus Hilfsatz 5.1

$$(5.6) \qquad V_\beta(z) = \frac{[(\cot\gamma)^2+1]V_\alpha(z)}{(U_\alpha(z)+\cot\gamma)^2+V_\alpha^2(z)}$$

Da, nach Voraussetzung, $\rho_\beta'(\lambda) > N' > 0$ für $\lambda \in (\underline{\lambda},\bar{\lambda})$ gilt, haben wir, genau wie in der Behauptung b), daß ein $R > 0$ existiert so, daß

$$\left|V_\beta(z)\right| = \left|\operatorname{Im} m_\beta(u+i\varepsilon)\right| \geq R > 0$$

gilt, gleichmäßig in ε für $u \in I'$.

Hieraus und aus (5.5) und (5.6) folgt, daß eine Konstante ζ existiert so, daß

$$\left|U_\alpha(u+i\varepsilon)\right| \leq \zeta \qquad \text{gleichmäßig für } u \in I'$$

gilt.

Bis jetzt haben wir bewiesen, daß

$$\left|m_\alpha(u+i\varepsilon)\right| < N \quad \text{und} \quad \left|\operatorname{Im} m_\alpha(u+i\varepsilon)\right| > M$$

gilt für $u \in I' = [\underline{\lambda}',\bar{\lambda}']$ gleichmäßig für ε klein. Zusammen mit Satz 5.2 und der

Tatsache, daß die absolute Stetigkeit in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $(\underline{\lambda},\bar{\lambda}) = I$ die absolute Stetigkeit im ganzen Intervall I impliziert, ergibt sich die Behauptung des Satzes.

Q.E.D.

6. Anwendungen

6.1 Sturm–Liouville Operatoren mit periodischen Koeffizienten

Als Anwendung von Satz 5.2, betrachten wir jetzt folgendes Problem

$$(lu)(x) = -u''(x) + q(x)\,u(x)\,, \qquad 0 \leqq x < \infty$$

$$u(0,z)\cos\alpha + u'(0,z)\sin\alpha = 0$$

mit $q(x) = q(x+c)$, i.e. q periodisch mit Periode c. Der Endpunkt 0 ist regulär. Bei ∞ liegt in diesem Fall der Grenzpunktfall vor (siehe [3] S.231).

Seien $u_1(x,z)$, $u_2(x,z)$ linear unabhängige Lösungen der Gleichung $lu = zu$ die folgende Anfangsbedingungen erfüllen :

$$u_1(0,z) = \sin\alpha \qquad u_2(0,z) = \cos\alpha$$

$$u_1'(0,z) = -\cos\alpha \qquad u_2'(0,z) = \sin\alpha$$

Da q periodisch ist, sind auch $u_1(x+c,z)$ und $u_2(x+c,z)$ linear unabhängige Lösungen der Gleichung $lu = zu$. Deshalb können wir schreiben

$$(6.1) \qquad u_1(x,z) = c_{11}(z)\,u_1(x+c,z) + c_{12}(z)\,u_2(x+c,z)$$

$$(6.2) \qquad u_2(x,z) = c_{21}(z)\,u_1(x+c,z) + c_{22}(z)\,u_2(x+c,z)$$

$c_{ij}(z)$ können wir z.B. ausrechnen indem wir die Gleichung 6.1 und 6.2 ableiten und $x = 0$ einsetzen. Wir erhalten :

$$(6.3)\quad \begin{cases} c_{11} = u_2(c,z)\cos\alpha + u_2'(c,z)\sin\alpha \\ c_{12} = -[u_1(c,z)\cos\alpha + u_1'(c,z)\sin\alpha] \\ c_{21} = -u_2(c,z)\sin\alpha + u_2'(c,z)\cos\alpha \\ c_{22} = u_1(c,z)\sin\alpha - u_1'(c,z)\cos\alpha \end{cases}$$

Da bei ∞ der GPF vorliegt, gibt es ein eindeutig bestimmtes $m(z)$ mit

$$m(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z) \in L_2(0,\infty)$$ für Im z ≠ 0

Aus den Gleichungen (6.1) und (6.2) folgt

$$[m(z)\, c_{11}(z) + c_{21}(z)]\, u_1(x+c,z) + [m(z)\, c_{12}(z) + c_{22}(z)]\, u_2(x+c,z)$$
$$= m(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z) \in L_2(0,\infty)\,.$$

Andererseits haben wir

$$m(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z) \in L_2$$
$$\Rightarrow m(z)\, u_1(x+c,z) + u_2(x+c,z) \in L_2$$
$$\Rightarrow m(z)\, [m(z)\, c_{12} + c_{22}]\, u_1(x+c,z) + [m(z)\, c_{12} + c_{22}]\, u_2(x+c,z) \in L_2\,.$$

Da nur eine Lösung von $lu = zu$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in L_2 liegen kann folgt

$$m(z)\, c_{11}(z) + c_{21}(z) = m(z)\, [m(z)\, c_{12} + c_{22}].$$

Deshalb erfüllt $m(z)$ die Gleichung

$$c_{12}[m(z)]^2 + [c_{22} - c_{11}]\, m(z) - c_{21} = 0$$

d.h. $m(z)$ muß die Gleichung

$$(6.4)\qquad m(z) = \frac{[c_{11}(z) - c_{22}(z)] \pm \sqrt{[c_{22}(z) - c_{11}(z)]^2 + 4c_{12}(z)c_{21}(z)}}{2c_{12}(z)}$$

erfüllen, (wobei das Vorzeichen zu wählen ist).

Aus der Spektraltheorie periodischer Differentialoperatoren (siehe [18], [7] S.27) wissen wir, daß für $z_0 \in S$

$$4 > (c_{11}(z_0) + c_{22}(z_0))^2$$

gilt, wobei S die Menge innerer Stabilitätspunkte ist.

Indem wir die Ausdrücke (6.3) für c_{ij} benutzen und die Gleichung $W(u_1,u_2) = 1$ können wir sehen, daß $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 1$ gilt.

Hieraus folgt für $z \in S$

$$[c_{11} + c_{22}]^2 < 4[c_{11}\, c_{22} - c_{12}\, c_{21}]$$
$$\Rightarrow [c_{22} - c_{11}]^2 < -4\, c_{12}\, c_{21}$$
$$\Rightarrow [c_{22}(z) - c_{11}(z)]^2 + 4\, c_{12}(z)\, c_{21}(z) < 0$$

($c_{ij}(z)$ sind holomorphe Funktionen von z)

Da $c_{ij}(z) \in \mathbb{R}$ für $z \in \mathbb{R}$ gilt, folgt, daß $|\operatorname{Im} m(z)| > 0$ für $z \in S$. Aus der Stetigkeit von $\operatorname{Im} m(z)$ folgt, daß für jede $z \in S$ eine Konstante $N_{z_0} > 0$ und ein Kreis U_{z_0} mit Mittelpunkt z_0 existieren so, daß $|\operatorname{Im} m(z)| > N_{z_0} > 0$ für alle $z \in U_{z_0}$.

Auch existieren $k > 0$ und $\delta > 0$ so, daß

$$[z_0-\delta,\, z_0+\delta] \times [z_0, z_0+ik] \subset U_{z_0} \text{ gilt.}$$

Hieraus folgt $|\operatorname{Im} m(u+i\varepsilon)| > N_{z_0} > 0$ für $0 < \varepsilon < k$, $\forall\, u \in [z_0-\delta,\, z_0+\delta]$.

Wir wissen, daß $m(z)$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ stetig ist. Aus (6.4) folgt die Stetigkeit von $m(z)$, für alle $z \in \mathbb{R}$ so, daß $|\operatorname{Im} m(z)| > 0$ gilt.

Hieraus folgt, daß es eine Konstante $M > 0$ gibt so, daß $|m(u+i\varepsilon)| < M$ für $0<\varepsilon<k$, $\forall\, u \in [z_0-\delta,\, z_0+\delta]$ ($z_0 \in S$) gilt.

Hieraus und aus Satz 5.2 folgt, daß S im absolutstetigen Spektrum jeder selbstadjungierten Realisierung des folgenden Problems enthalten ist ($-\infty \leqq a \leqq 0$) :

$$\tilde{l}u = -u'' + \tilde{q}(x)\, u \qquad a < x < \infty$$

mit $\tilde{q} \in L_{1,loc}\,(a,\infty)$, (i.e. $\tilde{q}$ lokal integrierbar) ,

$$\tilde{q}(x) = \begin{cases} q(x) & \text{für } 0 \leqq x < \infty \\ \text{beliebig} & \text{für } a < x < 0 \end{cases}$$

Als Spezialfall haben wir $q \equiv 0$ in $(0,\infty)$. Dann ist das Spektrum absolut stetig in $(0,\infty)$. Dies folgt jedoch auch aus [29].

Für den allgemeinen Fall (q periodisch in $(0,\infty)$) ist das Resultat neu.

6.2 Verallgemeinerung eines Resultats von Hinton-Shaw für gestörte periodische Potentiale.

In der Arbeit [12] werden folgende Differentialausdrücke behandelt

(A) $\tau_0 y = -y'' + q(x)y \qquad -\infty < x < \infty$

$q(x)$ ist reell, stückweise stetig und periodisch.

(B) $\tau y = -y'' + \{q(x) + p(x)\}y \qquad -\infty < x < \infty$

mit $p(x) \in L_1(-\infty,\infty)$, i.e.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p(x)|\, dx < \infty$$

Diese Ausdrücke erzeugen folgende selbstadjungierten Operatoren

$$T_0 : D_0(T_0) \to L_2(-\infty,\infty)$$

$$T \ : D(T) \to L_2(-\infty,\infty)$$

mit

$D_0(T_0) = \{f \in L_2(-\infty,\infty) \mid f$ diffferenzierbar, f' lokal absolut stetig, $-f''+qf \in L_2(-\infty,\infty)\}$

$D(T) \ = \{f \in L_2(-\infty,\infty) \mid f$ differenzierbar, f' lokal absolut stetig, $\tau f \in L_2(-\infty,\infty)\}$

$$(T_0f)(x) = -f''(x)+q(x)\, f(x)\ , \quad (Tf)(x) = -\, f''(x) + \{q(x) + p(x)\}\, f$$

$m_0^{(+)}(\lambda)$ bzw. $m^{(+)}(\lambda)$ sind die Titchmarsh-Weyl Koeffizienten (bezüglich $x = +\infty$) von τ_0 bzw. τ.

Aus der oben genannten Arbeit ist zu sehen, daß $m^{(+)}$ die Bedingungen des Satzes 5.2 erfüllt, i.e. $m^{(+)}$ ist beschränkt und $\operatorname{Im} m^{(+)} > 0$.

Es gilt (siehe [12] S. 188 unten)

$$\lim_{\lambda_2\to 0} m^{(+)}(\lambda_1+i\lambda_2) = -\,\frac{d(\lambda_1)-c(\lambda_1)\ m_0^{(+)}(\lambda_1)}{b(\lambda_1)-a(\lambda_1)\ m_0^{(+)}(\lambda_1)}$$

$$\forall\ \lambda_1 \in S = \ \{\text{Menge innerer Stabilitätspunkte}\}$$

a,b,c,d hängen stetig von λ ab und sind reell für $\lambda \in \mathbb{R}$; b und a können nicht

gleichzeitig Null sein (siehe [12] S. 184 (3.18)) . Für $\lambda_1 \in S$ gilt $\operatorname{Im} m_0^{(+)}(\lambda_1) > 0$.

Deshalb haben wir

$$b(\lambda_1) - a(\lambda_1)\ m_0^{(+)}(\lambda_1) \neq 0 \qquad \forall\ \lambda_1 \in S\ .$$

Hieraus folgt die Beschränktheit von $m^{(+)}$.

Daß $m^{(+)}$ die zweite Bedingung des Satzes erfüllt, folgt aus (siehe [12], S. 189)

$$\operatorname{Im} m^{(+)} = \frac{\operatorname{Im} m_0}{|b-am_0^{(+)}|^2}$$

und der Tatsache, daß $\operatorname{Im} m_0 > 0$ gilt.

Unter Anwendung des Satzes 5.2 können wir sofort folgendes Resultat erhalten :

Die Menge innerer Stabilitätspunkte S liegt im absolut stetigen Spektrum des Problems

(6.5) $\qquad \hat{l}\, u = -u'' + \hat{q}(x)\, u \qquad -\infty<x<\infty$

mit $\hat{q} \in L_{1,loc}(-\infty,\infty)$

$$\hat{q}(x) = \begin{cases} q(x) + p(x) \text{ für} & 0\leq x<\infty \\ \text{beliebig} & \text{sonst} \end{cases}$$

$q(x)$ periodisch, $p \in L_1(0,\infty)$.

Dies verallgemeinert unser letztes Resultat und auch Satz 1 aus [12] wobei $\hat{q}$ bestimmte Voraussetzungen in $(-\infty,0)$ erfüllen muß.

Die Umkehrung gilt nicht, d.h. das Spektrum des Problems (6.5) muß nicht in S enthalten sein, wie folgendes Beispiel zeigt :

Sei

(6.6) $\qquad lu - -u'' + q(x)\, u \qquad x \in (-\infty,\infty)$

mit $q(x)$ periodisch. Nehmen wir an, daß S eine endliche oder abzählbare Menge von endlichen getrennten Intervallen ist. (Siehe [26]).

Sei

$$q_-(x) := \begin{cases} -q(x) & x \in (-\infty,0] \\ 0 & x \in (0,\infty) \end{cases}$$

Sei

$$(6.7) \qquad \hat{l} u = - u'' + \hat{q}(x)\, u \qquad x \in (-\infty,\infty)$$

mit $\hat{q}(x) = q(x) + q_-(x)$.

Sowohl in (6.6) als auch in (6.7) liegt der GPF bei $-\infty$ und bei ∞ vor. Siehe [12] .

Seien $u_1(x,\lambda)$ und $u_2(x,\lambda)$ Lösungen von

$$\hat{l} u = \lambda u \qquad \text{mit}$$
$$u_1(0,\lambda) = \sin\alpha \qquad u_2(o,\lambda) = \cos\alpha$$
$$u_1'(0,\lambda) = -\cos\alpha \qquad u_2'(0,\lambda) = \sin\alpha .$$

Wir werden $m(\lambda)$ berechnen, wobei

$$\chi(x,y) := m(\lambda)\ u_1(x,\lambda) + u_2(x,\lambda) \in L_2(-\infty,0) \qquad \text{gilt.}$$

Für $x \in (-\infty,0)$ $\chi(x,\lambda)$ ist eine Lösung von $-\chi''(x,\lambda) = \lambda\chi(x,\lambda)$. Hieraus folgt, daß

$$(6.8) \qquad m(\lambda)\ u_1(x,\lambda) + u_2(x,\lambda) = C_1(\lambda)\ e^{ix\sqrt{\lambda}} + C_2(\lambda)\ e^{-ix\sqrt{\lambda}} \qquad \text{gilt.}$$

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$ und $x \in (-\infty,0)$ gilt $e^{ix\sqrt{\lambda}} \notin L_2(-\infty,0)$, deshalb müssen wir $C_1(\lambda) = 0$ haben.

Indem wir (6.8) ableiten und $x = 0$ setzen, können wir $C_1(\lambda)$ berechnen und erhalten

$$0 = C_1(\lambda) = \left[\frac{i\sqrt{\lambda}\sin\alpha - \cos\alpha}{2i\sqrt{\lambda}} \right] m(\lambda) + \frac{1}{2}\left[\cos\alpha + \frac{\sin\alpha}{i\sqrt{\lambda}} \right]$$

Hieraus folgt

$$m(\lambda) = \frac{\sin\alpha - i\sqrt{\lambda}\cos\alpha}{-\cos\alpha + i\sqrt{\lambda}\ \text{sind}\ \alpha} .$$

Es gilt $|m(\lambda)| < N$ und $|\operatorname{Im} m(\lambda)| > M$ für $\lambda = u + i\varepsilon$, $0 < \varepsilon$ klein und $u \in I \subset (0,\infty)$.

Genau wie in Satz 5.2 können wir die Absolutstetigkeit des Spektrums des Problems (6.7) in $(0,\infty)$ beweisen. Da S eine Menge von endlichen Intervallen ist, folgt $(0,\infty) \not\subset S$.

6.3 Ein neuer Beweis des Resultats von Heinz und Weidmann

Wir werden jetzt den Satz 5.3 anwenden auf den Sturm-Liouville Ausdruck

$$(6.9) \qquad lu = -u''(x) + q(x)\ u(x) \qquad \text{für } x \in (a,\infty) .$$

Für $c \in (a,\infty)$ gelte (o.B.d.A. können wir $c = 0$ setzen)

$q(x) = q_1(x) + q_2(x)$

$q_1 \in L_1(c,\infty)$

q_2 von beschränkter Variation in (c,∞)

mit $q_2(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Seien L_{α_i}, $i = 1,2$ zwei selbstadjungierte Realisierungen von (6.9) in (c,∞). Die Randbedingungen bei dem regulären Punkt c sind

$$u(c)\cos\alpha_i + u'(c)\sin\alpha_i = 0 .$$

Bei ∞ liegt der GPF vor. Siehe [27] . Wir müssen beweisen, daß die Spektralfunktionen ρ_{α_i} von L_{α_i} die Bedingungen des Satzes erfüllen i.e. daß Konstanten M,N,N' existieren so, daß

$$(6.10) \qquad \begin{aligned} &0 < N < \left.\frac{d\rho_{\alpha_1}}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I\subset(0,\infty)} < M < \infty \\ &0 < N' < \left.\frac{d\rho_{\alpha_2}}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I\subset(0,\infty)} \end{aligned}$$

gilt.

Damit haben wir einen neuen Beweis des Satzes 3.1. Wobei lediglich die Überlegungen aus der früheren Arbeit [27] benutzt werden. (Interessant ist insbesondere, daß dieses mit Hilfe von Satz 5.7 erzielte Resultat nicht schwächer ist, als das in [29] direkt bewiesene Ergebnis.)

Um die obigen Bedingungen für ρ_{α_i} $i = 1,2$ nachzuweisen, beweisen wir tatsächlich viel mehr, nämlich, daß für die Spektralfunktion ρ_α einer beliebigen selbstadjungierten Realisierung L_α (6.10) erfüllt ist, d.h.

$$0 < N < \frac{d\rho_\alpha}{d\lambda} < M < \infty \quad \text{für } \lambda \in I \subset (0,\infty) .$$

Sofort aus [27] Satz 5.1, und Hilfssatz 2.1 folgt

$$\left.\frac{d\rho_\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I\subset(0,\infty)} < M .$$

Die andere Bedingung nämlich, die Beschränktheit nach unten durch eine positive Konstante, ist auch erfüllt. Um dies zu sehen, definieren wir zuerst die Operatoren $L_{b,\alpha}$ in $L_2(c,b)$ wie folgt :

$$D(L_{b,\alpha}) = \{u \in L_2(c,b) \mid u,u' \text{ absolutstetig in } [c,b]$$
$$lu \in L_2(c,b) \ , \quad u(c)\cos\alpha + u'(c)\sin\alpha = o$$
$$u(b) = 0 \ \}$$

$$L_{b,\alpha}u = lu \text{ für } u \in D(L_{b,\alpha}) .$$

Sei $u(x,\lambda)$ Lösung von $(l-\lambda)u = 0$

mit $\quad u(c,\lambda) = \sin\alpha$

$\quad u'(c,\lambda) = -\cos\alpha$.

Da l in (c,b) regulär ist, hat $L_{b,\alpha}$ ein reines Punktspektrum, d.h. die orthonomierten Eigenfunktionen bilden eine Orthonomalbasis.

Jede normierte Eigenfunktion des Operators $L_{b,\alpha}$ zu Eigenwert λ_{b_j} hat die Form

$$v_{b_j} = c_{b_j}\, u(x,\lambda_{b_j})$$

mit

$$c_{b_j} := \{ \int_c^b |v(x,\lambda_{b_j})|^2\, dx\}^{-\frac{1}{2}} .$$

Für $f \in L_2(c,b)$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_c^b |f(x)|^2\, dx = \sum_{j=1}^{\infty} (\int_c^b f(x)\, v_{b_j}(x)\, dx)^2$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} c_{b_j}^2 (\int_c^b f(x)\, u(x,\lambda_{b_j})\, dx)^2 .$$

Dies kann geschrieben werden in der Form

$$\int_c^b |f(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\rho_{b\alpha}(\lambda)$$

mit $F(\lambda) = \int_c^b f(x)u(x,\lambda)$ und

$$\rho_{b\alpha}(\lambda) := \begin{cases} -\sum\limits_{j:\lambda<\lambda_{b_j}\leqq 0} c_{b_j}^2 & \text{für } \lambda \leqq 0 \\ \sum\limits_{j:0<\lambda_{b_j}\leqq\lambda} c_{b_j}^2 & \text{für } \lambda > 0 \end{cases}$$

$\rho_{b\alpha}$ ist die Spektralfunktion für $L_{b\alpha}$ und hat einen Sprung der Höhe $c_{b_j}^2$ bei λ_{b_j}. Siehe [17] , [3] .

Es gilt

$$\rho_{b,\alpha} \underset{b\to\infty}{\to} \rho_\alpha ,$$

wobei ρ_α die Spektralfunktion des Problems

$$-u''(x) + q(x)\,u(x) = \lambda u(x) \qquad x \in (c,\infty)$$
$$u(x)\cos\alpha + u'(c)\sin\alpha = 0$$

ist.

Für $\lambda \in I$ gilt $|u(x,\lambda)| \leqq C$ für $x \in [c,\infty)$, $C > 0$. Siehe [27]. Hieraus folgt

$$(6.11) \qquad c_{b_j} = \{ \int_c^b |u(x,\lambda_{b_j})|^2 \, dx\}^{-\frac{1}{2}} \geqq C^{-1} \, (b-c)^{-\frac{1}{2}} \, .$$

Sei $N(c,b,\lambda)$ die Zahl der Nullstellen von $u(x,\lambda)$ in (c,b). Aus Lemma 5.3 von [27] folgt

$$(6.12) \qquad N(c,b,\lambda_2) - N(c,b,\lambda_1) = \pi \, (b-c) \, \{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} + o(1)\}$$

wobei $o(1)$ für $b \to \infty$ zu verstehen ist.

Ist $M(\lambda)$ die Zahl der Eigenwerte von $L_{b\alpha_i}$ die kleiner oder gleich λ sind, so gilt

$$(6.13) \qquad N(c,b,\lambda_2) - N(c,b,\lambda_1) - 3 \leqq M(\lambda_2) - M(\lambda_1) \, .$$

Dies folgt aus Par. 13 in [28]. Aus (6.12) und (6.13) folgt

$$(6.14) \qquad M(\lambda_2) - M(\lambda_1) \geqq \pi \, (b-c) \, \{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} + o(1)\} - 3 \, .$$

Aus (6.11) und (6.14) und aus der Definition von der Spektralfunktion von $L_{b\alpha_i}$ folgt

$$(6.15) \qquad \begin{aligned} \rho_{b\alpha_i}(\lambda_2) - \rho_{b\alpha_i}(\lambda_1) &= \sum_{j:\lambda_{b_j}\in(\lambda_1,\lambda_2]} c_{b_j}^2 \geqq \sum_{j:\lambda_{b_j}\in(\lambda_1,\lambda_2]} C^{-2} \, (b-c)^{-1} \\ &\geqq C^{-2} \, (b-c)^{-1} \, \{\pi(b-c) \, (\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} + o(1)) - 3\} \\ &= C^{-2} \, \pi \, \{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1} + o(1)\} - 3C^{-2} \, (b-c)^{-1} \end{aligned}$$

Wenn wir auf beiden Seiten der Ungleichheit (6.15) $\lim\limits_{b\to\infty}$ anwenden, erhalten wir :

$$\begin{aligned} \lim_{b\to\infty} \rho_{b\alpha_i}(\lambda_2) - \rho_{b\alpha_i}(\lambda_1) &= \rho_{\alpha_i}(\lambda_2) - \rho_{\alpha_i}(\lambda_1) \\ &\geqq \pi \, C^{-2} \, (\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}) \\ &\geqq \pi \, C^{-2} \, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}+\sqrt{\lambda_1}} \, (\lambda_2-\lambda_1) \\ &\geqq \frac{\pi}{2C^2\sqrt{\lambda_2}} \, (\lambda_2 - \lambda_1) \, . \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß

$$\frac{d\rho_{\alpha_i}(\lambda)}{d\lambda} \geqq \frac{\pi}{2C^2\sqrt{\lambda_2}} = \text{Konstante} \, , \quad i = 1,2$$

gilt und deshalb wird die Bedingung der Beschränktheit nach unten durch eine positive Konstante erfüllt. Unter Anwendung von Satz 5.3 erhalten wir sofort einen neuen Beweis des Satzes 3.1 von Weidmann [29] .

7. Dirac-System

A) Selbstadjungierte Realisierungen vom Dirac-System

Betrachten wir jetzt für $-\infty \leqq a \leqq x \leqq b \leqq \infty$ Differentialausdrücke der Gestalt

(7.1) $\quad \mathcal{L}(v) = Jv' + P(x)\, v$.

Dabei ist $v = v(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) \\ v_2(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_{12}(x) \\ p_{12}(x) & p_2(x) \end{pmatrix}$$

mit reellwertigen, meßbaren und lokal integrierbaren Koeffizienten p_1, p_2, p_{12}. Solche Ausdrücke heißen Dirac-Systeme (weil sie bei der Separation der Dirac-Gleichung auftreten).

Zur Abkürzung setzen wir

$$(\varphi,v) = \varphi_1\, v_1 + \varphi_2\, v_2\,, \quad |u| = (u,u)^{\frac{1}{2}}$$

und fassen $\mathcal{L}$ als einen linearen Operator im Hilbertraum $L_2(a,b)^2$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle\varphi,v\rangle = \int_a^b (\bar{\varphi},v)\, dx \text{ auf .}$$

Der Differentialoperator $\mathcal{L}$ ist formal selbstadjungiert. Die Weylsche Alternative (siehe [28]) erlaubt es, wie bei Sturm-Liouville-Operatoren einen sehr vollständigen Überblick über alle selbstadjungierten Realisierungen von $\mathcal{L}$ zu gewinnen.

Wenn es bekannt ist, welcher Fall (Grenzkreisfall GKF oder Grenzpunktfall

GPF) bei a bzw. b vorliegt, ist es möglich, die Defektzahlen des minimalen Operators zu berechnen (für die Definition des minimalen bzw. maximalen Operators siehe [19]) und die Definitionsbereiche der verschiedenen selbstadjungierten Realisierungen von $\mathcal{L}$ zu bestimmen. Diese sind Einschränkungen des Definitionsbereichs des maximalen Operators und sind durch Randbedingungen (an Randpunkten an denen der GKF vorliegt) bestimmt.

Wenn bei a und b der GKF vorliegt, sind diese Randbedingungen im allgemeinen gekoppelt. Wir werden nur getrennte Randbedingungen betrachten. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung für unsere Untersuchungen, da bei den hier betrachteten Operatoren an mindestens einem Randpunkt der GPF vorliegt.

Wenn $\mathcal{L}$ regulär bei a bzw. bei b ist, können wir die Randbedingungen wie folgt schreiben :

$$u_1(a)\cos\alpha + u_2(a)\sin\alpha = 0$$

bzw.

$$u_1(b)\cos\beta + u_2(b)\sin\beta) = 0\ .$$

Sei jetzt L der selbstadjungierte Differentialoperator der durch obiges Dirac-System und getrennte Randbedingungen definiert ist.

Wir wissen (siehe [30]), daß für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Resolvente die Form

$$R_z(L)\, g(x) := (z-L)^{-1}\, g(x)$$

$$= \frac{1}{W(u_a,u_b)}\left[u_a(x)\int_x^b (u_b,f)(y)\, dy + u_b(x)\int_a^x (u_a,f)(y)\, dy\right]$$

hat, wobei

$$W(u_a,u_b) := u_b^1\, u_a^2 - u_a^1\, u_b^2$$

$$u_a = \begin{pmatrix} u_a^1 \\ u_a^2 \end{pmatrix}, \quad u_b = \begin{pmatrix} u_b^1 \\ u_b^2 \end{pmatrix}$$

u_a und u_b sind die bis auf einen Faktor eindeutig bestimmten Lösungen von $\mathcal{L}(u) = zu$ mit

$$u_{a(b)} \begin{cases} \text{ist bei } a(b) \text{ quadratisch integrierbar,} \\ \quad \text{falls GPF bei } a(b) \\[2mm] \text{erfüllt bei } a(b) \text{ die selbstadjungierte Randbedingung von } L, \\ \quad \text{falls GKF bei } a(b)\,. \end{cases}$$

$u_a(x,z)$ und $u_b(x,z)$ sind holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (bzw. können so gewählt werden).

Jetzt sei $\{u_1(x,z),\ u_2(x,z)\}$ für jedes $z \in \mathbb{C}$, ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung $\mathcal{L}u = zu$ das holomorph von z abhängt.

Sei $G_{a(b)} := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \mid u_1(\cdot,z)$ und $u_{a(b)}(\cdot,z)$ sind linear unabhängig$\}$.

Da u_1, u_a (bzw. u_b) holomorphe Funktionen von z in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ sind, gilt entweder $G_a = \emptyset$ oder $G_a = (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \setminus A_{a(b)}$, wobei $A_{a(b)}$ eine abzählbare Menge ist.

Falls $G_{a(b)} \neq \emptyset$ gilt, existiert eine Funktion $m_{a(b)} : G_{a(b)} \to \mathbb{C}$, $m_{a(b)}$ holomorph in $G_{a(b)}$ so, daß

$$u_{a(b)}(x,z) = m_{a(b)}(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z) \quad \text{gilt}\,.$$

Unter Benutzung dieser Gleichungen können wir für $z \in G_a \cap G_b$ die Resolvente wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
(7.2) \qquad R_z(L)\, g(x) &= (z-L)^{-1}\, g(x) \\
&= [W(m_a(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z)\ ,\ m_b(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z))]^{-1} \\
&\quad \cdot \{(m_b(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_a^x (m_a(z)\, u_1(y,z) + u_2(y,z),\ g(y))\, dy \\
&\quad + (m_a(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_x^b (m_b(z)\, u_1(y,z) + u_2(y,z),\ g(y))\, dy\}
\end{aligned}$$

Dieser Integraloperator hat den Kern

$$R(x,y,z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} m_{jk}^{+}(z)\, u_j(x,z)\, u_k(y,z) & \text{für } y < x \\[4mm] \displaystyle\sum_{j,k=1}^{2} m_{jk}^{-}(z)\, u_j(x,z)\, u_k(y,z) & \text{für } x < y \end{cases}$$

wobei

$$u_j\, u_k := \begin{pmatrix} u_{j1}\, u_{k1} & u_{j1}\, u_{k2} \\ u_{j2}\, u_{k1} & u_{j2}\, u_{k2} \end{pmatrix}, \quad u_j = \begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \end{pmatrix}, \quad u_k = \begin{pmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{+}(z) & m_{12}^{+}(z) \\ m_{21}^{+}(z) & m_{22}^{+}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_a(z)\, m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} \\[4mm] \dfrac{m_a(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{1}{W(u_a,u_b)(z)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{-}(z) & m_{12}^{-}(z) \\ m_{21}^{-}(z) & m_{22}^{-}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_a(z)\, m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{m_a(z)}{W(u_a,u_b)(z)} \\[4mm] \dfrac{m_b(z)}{W(u_a,u_b)(z)} & \dfrac{1}{W(u_a,u_b)(z)} \end{pmatrix}$$

$$W(u_a,u_b) = [m_b - m_a]\, W(u_1,u_2)\,.$$

Wenn das Problem regulär am linken Randpunkt $a > -\infty$ ist, (d.h. $P(x)$ in $[a,b)$ lokal integrierbar), können wir $u_1(x,z) = u_a(x,z)$ setzen.

Die Resolvente sieht dann so aus:

$$\begin{aligned}
R_z(L)\, g(x) &= (z-L)^{-1} = [W(u_1,\ m_b(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z))]^{-1} \\
&\quad \cdot \{(m_b(z)\, u_1(x,z) + u_2(x,z)) \int_a^x (u_1(y,z),\ g(y))\, dy \\
&\quad + u_1(x,z) \int_x^b (m_b(z)\, u_1(y,z) + u_2(y,z),\ g(y))\, dy\}
\end{aligned}$$

Die charakteristischen Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{+} & m_{12}^{+} \\ m_{21}^{+} & m_{22}^{+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_b(z)}{W(u_1,u_2)(z)} & 0 \\ \dfrac{1}{W(u_1,u_2)(z)} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11}^{-} & m_{12}^{-} \\ m_{21}^{-} & m_{22}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m_b(z)}{W(u_1,u_2)(z)} & \dfrac{1}{W(u_1,u_2)(z)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt nehmen wir an, daß u_1, u_2 folgende Anfangsbedingungen erfüllen

$$u_1(0,z) = \begin{pmatrix} u_{11}(0,z) \\ u_{12}(0,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

(7.3)

$$u_2(0,z) = \begin{pmatrix} u_{21}(0,z) \\ u_{22}(0,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Dann gilt folgendes Resultat (vgl. Hilfssatz 3.1) :

Hilfssatz 7.1

Für $z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} \;/\; \operatorname{Im} z > 0\}$ gilt

$$\operatorname{Im} m_b(z) > 0$$

$$\operatorname{Im} m_a(z) < 0 .$$

Beweis

Analog zu dem, was in Hilfssatz 3.1 gemacht worden ist, haben wir ($b < \infty$ regulär)

$$(z-\bar{z}) \int_0^b u_b(x,z)\, u_b(x,\bar{z})\, dx$$

$$= (z-\bar{z}) \int_0^b [u_b^1(x,z)\, u_b^1(x,\bar{z}) + u_b^2(x,z)\, u_b^2(x,\bar{z})]\, dx$$

$$= u_b^2(x,z)\, u_b^1(x,\bar{z}) - u_b^1(x,z)\, u_b^2(x,\bar{z}) \Big|_0^b$$

(nach der Greenschen Formel)

$$= W(u_b(x,z),\, u_b(x,\bar{z})) \Big|_0^b$$

$$= W(u_b(x,z),\, u_b(x,\bar{z})) \Big|_b - W(u_b(x,z),\, u_b(x,\bar{z})) \Big|_0$$

(wobei $u_b := \begin{pmatrix} u_b^1 \\ u_b^2 \end{pmatrix}$, $u_a := \begin{pmatrix} u_a^1 \\ u_a^2 \end{pmatrix}$).

Da $u_b(x,z)$ und $u_b(x,\bar{z})$ die Randbedingung bei b erfüllen, gilt $W(u_b(x,z),\, u_b(x,\bar{z})) \Big|_b = 0$.

Unter Benutzung der Anfangsbedingungen (7.3) und nach einer kleinen Rechnung erhalten wir

$$-\, W(u_b(x,z),\, u_b(x,\bar{z})) \Big|_0 = m_b(z) - m_b(\bar{z}) .$$

Da der Differentialausdruck L reell ist, gilt

$$m_b(\bar{z}) = \overline{m_b(z)} \;,\; u_b(x,\bar{z}) = \overline{u_b(x,z)}$$

also

$$\int_0^b |u_b(x,z)|^2\, dx = \frac{m_b(z) - \overline{m_b(z)}}{z-\bar{z}} = \frac{\operatorname{Im} m_b(z)}{\operatorname{Im} z}$$

Hieraus folgt, daß für $z \in \mathbb{C}^+$, $\operatorname{Im} m(z) > 0$ gilt.

Sei nun b ein singulärer Randpunkt. Für ein $c \in (0,b)$ erfülle $m_c(z)\, u_1 + u_2$ eine selbstadjungierte Randbedingung bei c. Mit derselben Überlegung wie oben, erhalten wir, daß $\operatorname{Im} m_c(z) > 0$ für $z \in \mathbb{C}^+$ gilt. $m_c(z)$ liegt in einem Kreis in $\mathbb{C}^+$. Dieser Kreis wird kleiner, wenn c größer wird, und ist immer in $\mathbb{C}^+$ enthalten. $m_b(z)$ ist in einem solchen Kreis enthalten (siehe [17] S. 174). Hieraus folgt, daß $\operatorname{Im} m_b(z) > 0$ gilt, falls $z \in \mathbb{C}^+$. Entsprechend wird die Behauptung für a bewiesen.

Q.E.D.

B) Spektraldarstellung und inverses Problem für Dirac-System

Völlig analog zu Satz (3.2) gilt folgender Spektraldarstellungssatz :

Satz 7.2 (siehe [28], [17]) .

Sei L der oben erwähnte selbstadjungierte Differentialoperator. Seien u_1, u_2 und $m_{ij}^{\pm}$ wie früher. Dann gibt es eine rechtsstetig nichtfallende 2×2 Matrixfunktion

$$\rho(\lambda) = (\rho_{ij}(\lambda))_{i,j=1,2} \qquad -\infty<\lambda<\infty$$

so, daß

$$ULU^{-1} = M\rho$$

gilt, wobei $M\rho$ der Multiplikationsoperator mit der Funktion id in $L_2(\mathbb{R},d\rho)$ ist, U unitär

$$U\colon L_2(a,b)^2 \to L_2(\mathbb{R}, d\rho)$$

$$(Uf)(\lambda) = \begin{pmatrix} \underset{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}}{\text{l.i.m.}} \int_\alpha^\beta (u_1(x,\lambda), f(x))\, dx \\ \underset{\substack{\alpha\to a\\ \beta\to b}}{\text{l.i.m.}} \int_\alpha^\beta (u_2(x,\lambda), f(x))\, dx \end{pmatrix}$$

$$(U^{-1}g)(x) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x,\lambda)\, g_k(\lambda)\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

$\rho(\lambda) = (\rho_{ij}(\lambda))$ ist reell und symmetrisch. Für $\lambda < \mu$ ist die Differenz $\rho(\mu) - \rho(\lambda)$ eine positiv semidefinite Matrix.

$\rho(\lambda)$ heißt Spektralfunktion und ist gegeben durch

$$\rho_{ij}(\lambda) = K_{ij} - \frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_\delta^{\lambda+\delta} [m_{ij}^{\pm}(s+i\varepsilon) - m_{ij}^{\pm}(s-i\varepsilon)]\, ds$$

$K_{ij} \in \mathbb{R}$ Konstanten .

Für die Spektralschar $E(\lambda)$ von L und die Resolvente $R_z(L) = (z-L)^{-1}$ gilt

$$(E(\Delta)u)(x) = \int_a^b E(x,y,\Delta)\, u(u)\, dy$$

$$(R_z(L)u)(x) = \int_a^b R(x,y,z)\, u(y)\, dy\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

wobei

$$E(x,z,\Delta) := \int_\Delta \sum_{j,k=1}^{2} u_j(x,\lambda)\, u_k(y,\lambda)\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

$$R(x,y,z) := \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-N}^{N} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{u_j(x,\lambda)\, u_k(y,\lambda)}{z-\lambda}\, d\rho_{jk}(\lambda)$$

$$u_j\, u_k := \begin{pmatrix} u_{j1}\, u_{k1} & u_{j1}\, u_{k2} \\ u_{j2}\, u_{k1} & u_{j2}\, u_{k2} \end{pmatrix}$$

Für alle $x \in (a,b)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b |E(x,y,\Delta)|^2\, dy < \infty\,, \quad \int_a^b |R(x,y,z)|^2\, dy < \infty\,.$$

In Analogie zur Lösung des inversen Problems von Gelfand-Levitan, wurde von Gasymov-Levitan die folgende Lösung des inversen Problems für Dirac-Systeme angegeben.

Satz 7.3 (Siehe [8])

$\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt folgende Bedingungen :

1. ρ ist eine monotone wachsende Funktion .

2. Ist $G(\lambda) = \int_0^\infty \{g_1 \sin \lambda x - g_2 \cos \lambda x\}\, dx$

   mit zwei Funktionen g_1 und g_2 aus $L_2(0,\infty)$, so gilt :

   Aus $\int_{-\infty}^{\infty} |G|^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0$ folgt $G(\lambda) \equiv 0$

   (und deshalb $g_1(x) = g_2(x) = 0$) .

3. $$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} (\sin \lambda y\ ,\ -\cos \lambda y)\, d\,[\rho(\lambda) - \frac{1}{\pi}\lambda]$$

   $= F(x,y)$ existiert und ist beschränkt für x,y aus einem beschränkten Gebiet.

   Dann existiert ein

$$P(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

so, daß ρ die Spektralfunktion des folgenden Problems ist :

$$\mathcal{L}u = Ju' + P(x)\,u \qquad 0 \leqq x < \infty$$

mt der Randbedingung

$$u_1(0,z) = 0 \quad \text{wobei} \quad u(0,z) = \begin{pmatrix} u_1(0,z) \\ u_2(0,z) \end{pmatrix}$$

Dieses Problem ist regulär bei Null.

Alle Sätze, die wir für Sturm–Liouville Operatoren bewiesen haben, stützen sich wesentlich auf die Darstellung der Resolventenformel (3.4), Satz 3.2 und den Satz von Gelfand–Levitan (siehe [19]) .

Die Darstellungsformel (7.2), der Satz 7.2 und der Satz 7.3 von Gasymov–Levitan sind Resultate für Dirac–Systeme, die den oben genannten Resultaten für Sturm–Liouville Operatoren voll entsprechen.

Für Dirac–Systeme gelten Resultate, die völlig analog zu den Resultaten in

Par. 4, Par. 5 und Par. 6 sind.

Wie in Par. 4 können wir zeigen, daß auch für Dirac–Systeme die Vermutung in [29] (siehe Par. 2) nicht gilt.

Dazu wählen wir die entsprechenden Funktionen ρ_i, i=1,2 folgendermaßen :

$$\rho_1(\lambda) := \frac{1}{\pi}\lambda \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\rho_2(\lambda) := \begin{cases} 0 & \lambda \in (-\infty,0] \\ F(\lambda) & \lambda \in (0,1] \\ 1 & \lambda \in (1,\infty) \end{cases}$$

wobei F wie in Par. 4 , i.e. ρ_2 ist genau dieselbe Funktion wie in Par. 4 .

Die Funktion ρ_0 wird, wie in Par. 4, als die Summe von ρ_1 und ρ_2 definiert, i.e. :

$$\rho_0 := \rho_1 + \rho_2 = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\lambda & \lambda \in (-\infty,0] \\ F(\lambda) + \frac{1}{\pi}\lambda & \lambda \in [0,1) \\ \frac{1}{\pi}\lambda + 1 & \lambda \in [1,\infty) \end{cases}$$

Direkt aus dieser Definition ist zu sehen, daß $\rho_0(\lambda)$ strikt zunimmt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Aus dieser Tatsache folgt, daß ρ_0 die erste Bedingung des Satzes von Gasymov–Levitan erfüllt. Die zweite Bedingung ist erfüllt, weil aus

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G|^2(\lambda)\, d\rho_0(\lambda) = 0 \quad \text{folgt} \quad G(\lambda) = 0$$

an allen Stellen, an denen ρ_0 zunimmt und deshalb $G(\lambda) \equiv 0$.

Auch ist direkt aus der Definition von ρ_0 zu sehen, daß das im Integral der Bedingung 3 des Satzes von Gasymov–Levitan auftretende Maß außerhalb von [0,1) verschwindet. Hieraus folgt, daß ρ_0 auch diese Bedingung erfüllt.

Mit Hilfe der Funktion ρ_0 können wir genau wie in Par. 4 Operatoren L_0 und $L_{p\theta}$ konstruieren und beweisen, daß $L_{p\theta}$ rein absolut stetiges Spektrum für alle $\theta \in [0,2\pi)$ hat, während L_0 singulär stetiges Spektrum hat. Dies widerlegt die Vermutung in [29] auch für Dirac-Systeme.

Wie in Par. 5 können wir zeigen, daß in vielen Fällen die absolute Stetigkeit eines Dirac-Systems vom Verhalten der Koeffizienten am linken Rand nicht beeinflußt wird. Dazu wählen wir ein Fundamentalsystem $\{u_1,u_2\}$ von $\mathcal{L}u = \lambda u$ so, daß $W(u_1,u_2) = 1$ gilt. Unter Benutzung des Satzes 7.1 erhalten wir wie im Satz 5.2

$$\left| \operatorname{Im} \frac{1}{m_b(u+i\varepsilon)-m_a(u+i\varepsilon)} \right| < \frac{1}{|\operatorname{Im} m_b(u+i\varepsilon)|}$$

und

$$\left| \operatorname{Im} \frac{m_a\, m_b}{m_b-m_a} \right| < \frac{|m_b|}{|\operatorname{Im} m_b|}.$$

Indem wir die Formel für die Spektralfunktion

$$\rho_{ij}(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\delta\downarrow 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\delta}^{\lambda+\delta} \operatorname{Im} m_{ij}^{+}(s+i\varepsilon)\, ds$$

benutzen, können wir genau wie in Satz 5.2 folgendes beweisen :

Satz 7.4

Existiert $k > 0$, $N > 0$, $M > 0$ so, daß

$$|m_b(u+i\varepsilon)| < N \quad \text{und} \quad |\operatorname{Im} m_b(u+i\varepsilon)| > M$$

gilt für $0<\varepsilon<k$, für alle $u \in I$ (Intervall), dann folgt : Der Operator L hat in I rein absolut stetiges Spektrum. (Für ein verwandtes Resultat vgl. [11] Satz 3.2).

Auch gilt, völlig analog zu Satz 5.3 für Sturm-Liouville Operatoren das entsprechende Resultat für Dirac-Systeme, i.e. :

Satz 7.5

Sei ρ_θ die Spektralfunktion des Differentialoperators L_θ, der durch das Dirac-System (7.1) in $L_2(0,\infty)^2$ und die Randbedingung bei Null

$$u_1(0,z)\cos\theta + u_2(0,z)\sin\theta = 0$$

definiert ist. Sei ρ_θ absolut stetig in $I = (\underline{\lambda},\overline{\lambda}) \subset \mathbb{R}$ für $\theta = \alpha$ und $\theta = \beta$ (zwei verschiedene Werte von θ). Seien M,N,N' Konstanten so, daß

$$0 < N < \left.\frac{d\rho_\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I} < M < \infty$$

$$0 < N' < \left.\frac{d\rho_\beta}{d\lambda}\right|_{\lambda\in I}$$

gilt. Dann folgt : $\rho(\lambda)$ ist absolut stetig in I, wobei ρ die Spektralfunktion des Dirac-Operators L in $L_2(-\infty,\infty)^2$ ist.

C) Anwendungen

C1 Als Anwendung des Satzes 7.4 betrachten wir jetzt

$$\mathcal{L}(u) = Ju' + P(x)\,u\,, \quad 0 \leqq x < \infty$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}, \quad u_1(0)\cos\alpha + u_2(0)\sin\alpha = 0$$

mit $P(x) = P(x+c)$, i.e. $P(x)$ periodisch.

Der Endpunkt 0 ist regulär. Bei ∞ liegt der Grenzpunktfall vor, (dies ist immer der Fall für Dirac-Systeme, siehe [17] S. 179).

Genau wie in Par. 6 können wir die Koeffizienten m(z) abschätzen. Wir erhalten auch, daß

$$|\operatorname{Im} m(u+i\varepsilon)| > M \quad \text{und} \quad |m(u+i\varepsilon)| < N$$

gilt für $z \in S$, wobei S die Menge innerer Stabilitätspunkte ist.

Hieraus und aus Satz 7.4 folgt genau wie in Par. 6, daß S im absolutstetigen Spektrum des Problems

$$\tilde{L}u = Ju' + \tilde{P}(x)\, u \qquad a < x < \infty$$

wobei

$$|\tilde{P}| \in L_{1,loc}(a,\infty)\,, \quad \tilde{P}(x) = \begin{cases} P(x) \text{ für } 0 < x < \infty \\ \text{beliebig für } x \in (a,0) \end{cases}$$

enthalten ist.

Spezialfall : $P(\cdot) = P_0$ konstant in $(0,\infty)$, $\mu_1 < \mu_2$, Eigenwerte von P_0 ; dann hat L absolut stetiges Spektrum in $\mathbb{R} \setminus [\mu_1,\mu_2]$.

C2 Unter Anwendung des Satzes 7.4 bzw. 7.5 können wir sofort zeigen, daß in den drei Sätzen aus Hinton und Shaw [13] das absolut stetige Spektrum unabhängig vom Verhalten der Koeffizienten des Dirac-Systems am linken Rand ist (in [13] sind zusätzliche Voraussetzungen an das Verhalten des Koeffizienten am linken Rand erforderlich) .

In den Sätzen 1 und 2 aus [13] wird unter bestimmten Voraussetzungen an den Koeffizienten bei ∞ bewiesen, daß die Spektralfunktion ρ_θ des Operators L_θ, definiert wie in Satz 7.5, stetig differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus [\lambda_1,\lambda_2]$ (Satz 1), bzw. in $\mathbb{R}$ (Satz 2) ist, und daß $\rho_\theta'(\lambda) > 0$ gilt. In $[\lambda_1,\lambda_2]$ liegt diskretes Spektrum vor (Satz 1) .

Unter Anwendung von Satz 7.5 folgt sofort die absolute Stetigkeit des Spektrums in $\mathbb{R} \setminus [\lambda_1,\lambda_2]$ bzw. $\mathbb{R}$, auch wenn der linke Randpunkt a ein singulärer Punkt (z.B $a = -\infty$) ist.

Der Satz 3 aus [13] lautet (in einer an unsere Bezeichnungsweise angepaßten Form) : Für das Dirac-System

$$(7.4) \qquad \mathcal{L}v = Jv' + P(x)\, v$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p(x) \\ p(x) & p_2(x) \end{pmatrix}$$

gelte

$$p_k(x) \underset{x\to\infty}{\to} \lambda_k\,, \quad \underset{k=1,2}{x > 0}\,, \quad \lambda_1 < \lambda_2\,.$$

P(x) erfüllt geeignete Voraussetzungen in $(0,\infty)$, (wobei ein gewisses oszillatorisches Verhalten der Koeffizienten zulässig ist).

Entsprechend für $x < 0$ gelte

$$p_k(x) \underset{x\to-\infty}{\to} \mu_k\,, \quad \underset{k=1,2}{\mu_1 < \mu_2}\,.$$

P(x) erfüllt die entsprechenden Voraussetzungen in $(-\infty,0)$.

Dann gilt :

Die selbstadjungierte Realisierung des Dirac-Systems (7.4) in $L_2(-\infty,\infty)^2$ hat diskretes Spektrum in I_{00} und stetig differenzierbares Spektrum in I_{jk}, $(j,k) \neq (0,0)$, wobei $I_{jk} = I_j^{(+)} \cap I_k^{(-)}$, $I_0^{(+)} = (\lambda_1,\lambda_2)$, $I_1^{(+)} = (-\infty,\lambda_1)$, $I_2^{(+)} = (\lambda_2,\infty)$, $I_0^{(-)} = (\mu_1,\mu_2)$, $I_1^{(-)} = (-\infty,\mu_1)$, $I_2^{(-)} = (\mu_2,\infty)$.

Es wird in [13] bewiesen, daß m^+ (der m-Koeffizient für $[0,\infty)$) die Voraussetzungen des Satzes 7.4 in $I_1^{(+)}$ und $I_2^{(+)}$ erfüllt (siehe [13] S. 210 und S. 203, (4.7) und (4.8)). Also folgt, daß die absolute Stetigkeit des Spektrums in $I_1^{(+)} \cup I_2^{(+)}$ bewiesen werden kann, ohne die zusätzlichen Voraussetzungen (7.4) an den Koeffizienten in $(-\infty,0]$. Entsprechend folgt die absolute Stetigkeit in $I_1^{(-)} \cup I_2^{(-)}$.

Am Ende der Arbeit [13] wird bemerkt (S. 211 unten, Bemerkung 2), daß es wichtige Beziehungen gibt, zwischen dem Spektrum des Operators T in $(-\infty,\infty)$ und dem Spektrum der selbstadjungierten Realisierungen T_α^- bzw. T_α des Dirac-Systems in $(-\infty,0]$ bzw. $[0,\infty)$. (Diese Operatoren sind regulär bei Null). Wenn in einem Intervall $J \subset \mathbb{R}$, T_α^- oder T_α diskretes Spektrum hat, während die andere stetig differenzierbares Spektrum in J hat mit $\rho'(\lambda) > 0$, dann hat T stetig differenzierbares Spektrum in J.

Wir können bemerken, daß die Annahme "T_α^- oder T_α hat diskretes Spektrum" nicht nötig ist, um die absolute Stetigkeit des Spektrums von T in J zu erhalten. Dies folgt sofort aus Satz 7.5.

C3 Wie am Schluß von Par. 6 kann das Resultat über Dirac-Systeme an [29] bewiesen werden, indem lediglich die Abschätzung der Lösungen $u(x,\lambda)$ und der Zahl der Eigenwerte in (λ_1,λ_2) aus [30] benutzt werden.

Literatur

[1] Achieser, N.I., Glasman, I.M. Theorie der Linearen Operatoren im Hilbert-Raum. Akademie-Verlag Berlin (1968)

[2] Aronszajn, N . On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations . Amer. Jour. Math. 79, 597-610 (1957)

[3] Coddington, E.A., Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations. McGraw Hill (1955)

[4] Donoghue, W.F. On the Perturbation of Spectra , Comm. Pure App. Math. 18, 559-579 (1965)

[5] Donoghue, W.F. Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation . Springer Verlag (1974)

[6] Dunford, N., Schwartz, J.T. Linear Operators Part II : Spectral Theory , Interscience Publishers (1963)

[7] Eastham, M.S.P. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations . Scottish Academic Press (1973)

[8] Gasymov, M.G., Levitan, B.M. The inverse Problem for a Dirac System . Soviet Mathematics, Doklady Tom 167, No. 5 (1966)

[9] Heinz, E. Über das absolut stetige Spektrum singulärer Differentialgleichungs-systeme . Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II Math.-Phys. Kl. (1982)

[10] Hellwig, G. Differential Operators of Mathematical Physics . Addison-Wesley (1964)

[11] Hinton, D.B., Shaw, J.K. Spectral properties of a separated Dirac Operators . Preprint (1985)

[12] Hinton, D.B., Shaw, J.K. On the absolutely continuous Spectrum of the Perturbed Hill's Equation . Proc. London Math. Soc. (3) 50, 175-192 (1985)

[13] Hinton, D.B., Shaw, J.K. Absolutely continuous Spectra of Dirac Systems with long Range, short Range and oscillating Potentials . Quart. J. Math. Oxford (2), 36, 183-213 (1985)

[14] Jörgens, K. Spectral Theory of Second Order Ordinary Differential Operators . Lectures delivered at Aarhus Universitet 1962/63 . Lecture Notes Series No. 2 .

[15] Jörgens, K., Rellich, F. Eigenwerttheorie gewöhnlicher Differentialgleichungen . Springer-Verlag (1976)

[16] Kato, T. Perturbation Theory for Linear Operators . Springer-Verlag (1976)

[17] Levitan, B.M., Sargsjan, I.S. Introduction to Spectral Theory . Vol. 39 . Translations of Mathematical Monographs, American Math. Soc. (1975)

[18] Magnus, W., Winkler, S. Hill's Equation.. Interscience Publishers (1966)

[19] Neumark, M.A. Lineare Differentialoperatoren . Akademie-Verlag Berlin (1960)

[20] Ramm, A.G. Zentralblatt für Math. 35 003, Band 491 (1983)

[21] Reed, M., Simon, B. Methods of Modern Mathematical Physics . Vol III . Academic Press (1979)

[22] Riesz, F., Nagy, B.S. Functional Analysis . Frederick Ungar Publishing Co. (1953)

[23] Stone, M.H. Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis . Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol XV (1932)

[24] Titchmarsh, E.C. Eigenfunction Expansions . Vol 1 , Oxford University Press (1962)

[25] Walter, J. Absolute Continuity of the Essential Spektrum of $-\frac{d^2}{dt^2} + q(t)$ without Monotony of q . Math. Z. 129, 83–94, Springer-Verlag (1972)

[26] Weidmann, J. Lineare Operatoren in Hilberträumen . B.G. Teubner, Stuttgart (1976)

[27] Weidmann, J. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville-Operatoren . Math. Z. 98, 268–307 , Springer-Verlag (1967)

[28] Weidmann, J. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators . unveröffentlichtes Manuskript

[29] Weidmann, J. Absolut stetiges Spektrum bei Sturm-Liouville-Operatoren und Dirac-Systemen . Math. Z. 180, 423–427 , Springer-Verlag (1982)

[30] Weidmann, J. Oszillationsmethoden für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. Math. Z. 119, 349–373 , Springer-Verlag (1971) .

Lebenslauf

Geboren am 3. Juli 1957 in Mexiko Stadt, Mexiko .

Schulbildung

1963 – 1975	Colegio Madrid in Mexiko Stadt

Studium

1976 – 1981	Universidad Nacional Autonoma de Mexico in Mexiko Stadt

Tesis de Licenciatura (Diplomarbeit) bei Dr. Jorge Ize : " Estudio Matematico de las Ecuaciones de von Kármán " (Mathematisches Studium der Gleichungen von v. Kármán)

Seit 1. April 1982 bin ich an der J.W. Goethe–Universität, Frankfurt am Main immatrikuliert .