UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO MATEMATICO DE LAS ECUACIONES DE VON KARMAN

T E S I S

Que para obtener el título de:

M A T E M A T I C O

P r e s e n t a :

RAFAEL RENE DEL RIO CASTILLO

México, D. F. 1981

Esta tesis está dedicada a dos personas:

A mi abuelo Juan Castillo Tielemans que tanto me ha ayudado con los problemas de mi Dinalpin.

A mi hermano Enrique en memoria de "El Primo".

Entre la gran cantidad de agradecimientos que deseo dar escogí hacer explícitos los siguientes:

María del Carmen Arillaga Arjona escribió y reescribió de su puño y letra esta tesis por lo cual siento una gratitud comparable con la inmensa paciencia que fué necesaria para pasar en limpio este trabajo.

Mi familia siempre me ha proporcionado las facilidades de estudiar cuanto quiera por lo cual me siento agradecido especialmente a mis padres.

Agradezco al Dr. Jorge Ize el haber sugerido el tema y dirigido este trabajo y al Dr. Antonmaría Minzoni por sus comentarios y sugerencias.

Agradezco a la U.N.A.M. el apoyo económico que me ha brindado ya que parte de este trabajo lo hice siendo becario del I.I.M.A.S.

INDICE

INTRODUCCION

El propósito de este trabajo es hacer un estudio de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= [\varphi, u] + \lambda [\varphi_0, u] \\ \Delta^2 \varphi &= -[u,u] \end{aligned} \qquad \ldots *$$

$$\Delta^2 = \Delta\Delta \quad , \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$[h,g] = \frac{\partial h^2}{\partial x^2}\frac{\partial g^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial g}{\partial x \partial y} .$$

Estas ecuaciones * aparecen en la teoría no lineal de placas elásticas (ver [3], [10], [11], [18]) y son comunmente llamadas Ecuaciones de Von Kármán (para los artículos originales ver [3'], [8']).

El parámetro λ mide la intensidad de las fuerzas aplicadas en el borde de una placa y u es el desplazamiento vertical del plano medio de ésta. Nos interesa estudiar u como función de λ.

Primero deducimos las ecuaciones y a continuación estudiamos el operador lineal Δ^2 con condiciones de frontera bastante generales; después estudiamos el corchete $[\cdot,\cdot]$. Esto nos sirve para reformular las ecuaciones y entonces usamos la teoría de bifurcaciones en el problema completo.

DESCRIPCION DE LAS DEFORMACIONES Y DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES

Se observa que bajo la acción de fuerzas aplicadas a los cuerpos sólidos exhiben deformaciones, es decir cambian su forma y su volumen. Para hacer una descripción matemática de estas deformaciones identificaremos el objeto físico (cuerpo sólido) con un objeto matemático; lo usual es que a cada punto p del cuerpo se le asigne un elemento $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ llamado "posición de p". Donde Ω es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^3$. Por razones técnicas se pide que Ω cumpla todas las condiciones necesarias para aplicar el teorema de encaje de Sobolev (ver [1] pag. 97) el teorema de compacidad de Rellich (ver [1] pag. 144) y para integrar por partes.

Deformemos Ω, es decir consideremos la función

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$x \longmapsto x + u(x)$$

explícitamente

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$$

u se llama vector de desplazamiento

Ahora consideremos una curva contenida en Ω, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, la longitud de esta curva es por definición

$$\int_0^T |x'(t)|\,dt$$

La longitud de la curva después de la deformación es

$$\int_0^T |x'(t) + J\,x'(t)|\,dt$$

ya que $f(x(t)) = x(t) + U\,x(t)$.
(Aquí $J = \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ es la matriz derivada de U)

que también puede ser escrita

$$\int_0^T \left([(I+J)\,x']^T\,[(I+J)\,x'] \right)^{1/2}$$

$$= \int_0^T \left(x'^T (I+J)^T (I+J)\,x' \right)^{1/2}$$

$$= \int_0^T \left(x'^T \sqrt{(I+J)^T(I+J)}\,\sqrt{(I+J)^T(I+J)}\,x' \right)^{1/2}$$

$$= \int_0^T \left(\sqrt{(I+J)^T(I+J)}\,x'\,\sqrt{(I+J)^T(I+J)}\,x' \right)^{1/2}$$

$$= \int_0^T \left| \sqrt{(I+J)^T(I+J)}\;x' \right|$$

tomemos el cociente

$$\frac{\text{long. final}}{\text{long. inicial}} = \frac{\int_0^T \left| \sqrt{(I+J)^T(I+J)}\;x' \right|}{\int_0^T |x'|}$$

Ahora nos interesa conocer el límite de este cociente cuando $T \to 0$. Aplicando la regla de l' Hospital y parametrizando por longitud de arco obtenemos:

$$\left| \sqrt{(I+J)^T (I+J)}\ x'(0) \right|$$

EL TENSOR $\sqrt{(I+J)^T(I+J)}$ DESCRIBE LAS DEFORMACIONES QUE SUFRE Θ.

POR RAZONES MATEMÁTICAS, PARA TENER QUE EL TENSOR DE DEFORMACINES DE UN CUERPO NO DEFORMADO SEA CERO CONSIDERAREMOS LA EXPRESIÓN

$$\sqrt{(I+J)^T(I+J)} - I = \sqrt{g} - I$$

$$g = (I+J^T)(I+J)$$

LA RAÍZ CUADRADA HACE QUE EL MANEJO DE ESTE TENSOR SE COMPLIQUE POR LO QUE HAREMOS UNA APROXIMACIÓN.

PARA ESTO APLIQUEMOS EL TEOREMA DE TAYLOR PARA MATRICES

$$\sqrt{g} - I = \sqrt{I + (g-I)} - I = \left[I + \tfrac{1}{2}(g-I) + \cdots \right] - I$$

SI NOS QUEDAMOS CON EL PRIMER TÉRMINO DE LA EXPANSIÓN TENEMOS:

$$\begin{aligned} g - I &\approx I + \tfrac{1}{2}(g-I) - I \\ &= \tfrac{1}{2}(g-I) \\ &= \tfrac{1}{2}(J + J^T + J^T J) = \rho_u \end{aligned}$$

(Para que la expansión converja necesitamos que $\|g-I\|<1$.) P_u será el tensor de deformaciones que emplearemos en este trabajo.

El estudio de las deformaciones que se acaba de hacer tiene validez prácticamente para cualquier medio continuo. Ahora nos restringiremos a un caso particular haciendo tres hipótesis sobre el cuerpo sólido.

1) Supondremos que el cuerpo sólido es elástico. Matemáticamente esto se expresa diciendo que $\exists$ una función $W(B)$, llamada densidad de energía potencial, de manera que el cuerpo se encuentra en equilibrio para x' minimizando el funcional

$$\int_\omega W(B) - \int_\omega F x' - \int_{\partial\omega} F_{\partial\omega} x'$$

donde $x=(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow x'=(x_1',x_2',x_3')$ es decir la deformación viene dada por las funciones $x_i'(x_1,x_2,x_3)$, $i=1,2,3$, y donde $B=(B_{ik})=\frac{\partial x_i'}{\partial x_k}$.

2) También supondremos que el cuerpo es homogéneo (las propiedades no dependen de la posición). Esto matemáticamente se expresa diciendo que W depende de P y no directamente de x.

Así si ponemos $x'=x+u(x)$, esto quiere decir que el cuerpo está en equilibrio para $x+u(x)$ con $u(x)$ minimizando.

$$\int_\omega W(P) - \int_\omega F u - \int_{\partial\omega} F_{\partial\omega} u$$

3) Por último supondremos que el cuerpo es isotrópico, (las propiedades no dependen de la dirección). En términos

matemáticos esto se expresa así: $W(\rho) = W(P^t W P)$ $\forall P$ t.q. $PP^t = I$, es decir para toda transformación ortogonal. (Sabemos que las transformaciones ortogonales nos dan movimientos rígidos.)

También haremos las siguientes hipótesis:

a) $W(0) = 0$ (esto lo podemos hacer escalando las energías)

b) $W(\rho)$ es una función suficientemente diferenciable

c) Si $F = F_{\partial w} \equiv 0$ entonces la configuración de equilibrio es la misma que la configuración no deformada, es decir $u(x) = 0$

Ahora usando las hipótesis 1, 2, 3, a, b, c, hallaremos una expresión (por supuesto aproximada) para W.

Como ρ es simétrica $\exists$ P ortogonal t.q. $P^t \rho P$ es una matriz diagonal.

Por ser el cuerpo isotrópico $W(\rho) = W(P^t \rho P)$ $= W$ (invariantes de ρ bajo la acción de P). Nuestro problema es ahora encontrar los invariantes de ρ bajo la acción de P. Para ésto demostraremos primero el siguiente teorema, donde A es una matriz simétrica y $\det A \doteq |A|$

<u>Teorema 1</u> $\exists$ P ortogonal t.q. $P^t A P = B$

$\Leftrightarrow$ $|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = 0$, B simétrica.

<u>Dem.</u> $\Rightarrow$) $\det(\lambda I - P^t A P) = \det(\lambda P^t P - P^t A P)$

$= \det(P^t(\lambda I - A)P) = \det P^t \det(\lambda I - A) \det P$

$= \det P^t \det P \det(\lambda I - A) = \det(P^tP)\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)$

Ahora que $\det(\lambda I - A) = 0$ es claro porque A es simétrica y $\therefore$ tiene eigenvectores. Que B es simétrica es claro ya que $B^t = (P^tAP)^t = (AP)^t P^{tt} = P^tAP^{tt} = P^tAP = B$, $\therefore$ B es simétrica.

$\Leftarrow)$ Como A y B son matrices simétricas existen $\underline{P}$ y $\bar{P}$ matrices ortogonales que diagonalizan a A y a B respectivamente. Sabemos que las matrices diagonales $\underline{P}^tA\underline{P}$ y $\bar{P}^tB\bar{P}$ tienen como elementos de la diagonal a los eigenvalores de A y B respectivamente. Como los polinomios característicos de A y B son iguales A y B tienen los mismos eigenvalores y $\therefore$

$$\underline{P}^tA\underline{P} = \bar{P}^tB\bar{P}$$

y usando el hecho de que $\underline{P}$ es ortogonal

$$A = \underline{P}\,\bar{P}^tB\bar{P}\,\underline{P}^t$$

Ahora sea $P = \bar{P}\underline{P}^t$, como $P^t = \underline{P}^{tt}\bar{P}^t = \underline{P}\bar{P}^t$ tenemos que

$$PP^t = \bar{P}\underline{P}^t\underline{P}\,\bar{P}^t = \bar{P}(I)\bar{P}^t = I$$

$\therefore$ P es ortogonal ■

Ahora hagamos la siguiente <u>observación</u>:

Si A es una matriz simétrica 3×3

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - (\operatorname{tr} A)\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\left[(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr} A^2\right]\lambda - \det A$$

Esto se puede checar haciendo todas las operaciones

explícitamente, o también de la siguiente manera:
tomemos P ortogonal que diagonaliza a A y calculemos el determinante mas sencillo

$$|\lambda I - P^t A P| = \lambda^3 - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

(donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son elementos de la diagonal de A).
lo cual se puede reescribir:

$$\lambda^3 - (\operatorname{tr} P^t A P)\lambda^2 + 1/2[(\operatorname{tr} P^t A P)^2 - \operatorname{tr}(P^t A P)^2]\lambda - |P^t A P|$$

Ahora usando la propiedad conocida de las trazas que dice $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, fácilmente se observa que $\operatorname{tr} P^t A P = \operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr}(P^t A P)^2 = \operatorname{tr} A^2$, además sabemos que $|P^t A P| = |A|$.
Con esto y usando el teorema anterior tenemos la igualdad.

Ahora, usando el teorema de Cayley tenemos que

$$\rho^3 - (\operatorname{tr}\rho)\rho^2 + \frac{1}{2}[(\operatorname{tr}\rho) - \operatorname{tr}\rho^2]\rho = (\det \rho)\, I$$

tomando trazas a ambos lados de la igualdad obtenemos:

$$\operatorname{tr}\rho^3 - (\operatorname{tr}\rho)(\operatorname{tr}\rho^2) + \frac{1}{2}[(\operatorname{tr}\rho) - \operatorname{tr}\rho^2]\operatorname{tr}\rho = 3 \det \rho .$$

Con los resultados anteriores y recordando la definición de igualdad entre polinomios podemos afirmar que si A y B son simétricas entonces.

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \\ \operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} B^2 \\ \operatorname{tr} A^3 = \operatorname{tr} B^3\end{array}\right. \iff \exists\ P \text{ ortogonal } \text{ t.q. } A = P^t B P$$

Así en el caso isotrópico tenemos que $\bar W(\rho) = \bar W(\operatorname{tr}\rho, \operatorname{tr}\rho^2, \operatorname{tr}\rho^3)$, ya que el conocimiento de $\operatorname{tr}\rho$, $\operatorname{tr}\rho^2$ y $\operatorname{tr}\rho^3$ determina a ρ independientemente de transformaciones ortogonales.

Ahora usando la hipótesis b), desarrollemos en serie de Taylor alrededor de cero.

$$W(\rho) = W(0) + \alpha \operatorname{tr}\rho + \beta \operatorname{tr}\rho^2 + \gamma \operatorname{tr}\rho^3 + \dots + \tfrac{1}{2}\left[\delta(\operatorname{tr}\rho)^2 + \dots\right]$$

Por hipótesis a), $W(0) = 0$.

Ahora por hipótesis c), si $F = F_{\partial\omega'} \equiv 0$, $u(x) \equiv 0$ es punto de equilibrio y entonces por hipótesis 1) tenemos que

$$\int_{\omega'} W(\rho)$$

debe ser mínimo para $\rho \equiv 0$ y por lo tanto

$$\int_{\omega'} W(\rho) \geq 0$$

Los conjuntos de funciones admisibles que consideraremos serán tales que si u es admisible, también lo es tu, $t \in \mathbb{R}$, $|t|<1$

$$W(\rho_{tu}) = \alpha\left(t \operatorname{tr} J + t^2/_2 \operatorname{tr} J^t J\right) + O(t^2)$$

$$\therefore \left(\frac{d}{dt}\int_{\omega'} W(\rho_{tu})\right)(0) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha \int_{\omega'} \operatorname{tr} J = 0$$

Como podemos escoger u t.q. $\int_{\omega'} \operatorname{tr} J \neq 0$ tenemos que $\alpha = 0$.

Nosotros supondremos que

$$W(\rho) = \mu \operatorname{tr}\rho^2 + 1/2\,\lambda (\operatorname{tr}\rho)^2$$

Ahora

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}\int_{\omega'} W(\rho_{tu})\right)(0) = 2\mu \int_{\omega'} \operatorname{tr}\left(\frac{J+J^t}{2}\right)^2 + \lambda \int_{\omega'} \left[\operatorname{tr}\left(\frac{J+J^t}{2}\right)\right]^2$$

CONSIDEREMOS $\mathbb{E} = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23})$ DONDE e_{ij} SON LOS COMPONENTES DE LA MATRIZ SIMÉTRICA

$$\frac{J+J^t}{2}$$

ENTONCES PODEMOS ESCRIBIR

$$2\mu \, tr\left(\frac{J+J^T}{2}\right) + \lambda \, tr^2\left(\frac{J+J^t}{2}\right) = \mathbb{E}^T C \, \mathbb{E} = (C\mathbb{E}, \mathbb{E})_{\mathbb{R}^6}$$

DONDE

$$C = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}$$

El polinomio característico DE ESTA MATRIZ ES

$$(2\mu - K)^5 \, (2\mu + 3\lambda - K)$$

$\therefore$ C SERÁ POSITIVA DEFINIDA, lo CUAL implicARA QUE $(C\mathbb{E}, \mathbb{E}) > 0$, si $2\mu + 3\lambda > 0$ y $\mu > 0$. $\therefore$ ESTA ES UNA CONDICIÓN suficiente PARA tener

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} \int_\omega W(\rho_{TU})\right)(0) > 0$$

y $\therefore$ tener un mínimo.

Aquí SUPONDREMOS QUE $\lambda, \mu > 0$.

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

Estamos interesados en estudiar las posibles deformaciones de una placa elástica, homogénea isotrópica y delgada cuando ésta se somete a esfuerzos en sus bordes laterales. Si la fuerza de compresión es suficientemente pequeña no observamos flexión vertical (toda la energía se almacena en las deformaciones en el plano de la placa). Sin embargo al aumentar la compresión hay un valor crítico después del cual la placa se flexiona. Estos valores críticos se llaman cargas de flexión.

Nosotros escogeremos un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$ que medirá la intensidad de los esfuerzos aplicados y determinaremos las soluciones del problema como función de λ.

Para simplificar el análisis supondremos que las deformaciones que sufre la placa cumplen ciertas hipótesis, esto nos permitirá despreciar algunos términos. Aquí cabe mencionar que hasta la fecha no hay ninguna derivación de las ecuaciones de Von-Kármán que sea completamente satisfactoria. La falacia principal que se presenta, según Dr. S.S. Antman sigue la siguiente argumentación: (traduzco de [4] pag. 602).

"Se supone que el sistema físico que estamos modelando tiene soluciones pequeñas y $\therefore$ que podemos despreciar aquellos términos de las ecuaciones que son muy chicos cuando la solución es pequeña. La falacia es que los términos que estamos despreciando -

pueden ser los términos que nos permiten obtener soluciones pequeñas y en su ausencia es probable que las ecuaciones ya no describan lo que queríamos que describieran."

Philippe G. Ciarlet ha aplicado el método de expansiones asintóticas a un modelo tridimensional de elasticidad y obtiene que el 1er término del desarrollo es solución de las ecuaciones de Von-Kármán (ver [3])

Sin embargo cabe aquí una nota de P.M. Naghi (ver [8] pag. 587 vol.) ; (traducción): "las derivaciones hechas usando técnicas de expansiones asintóticas pueden parecer libres de suposiciones ad-hoc, pero de hecho este no es el caso. Los escalamientos de los esfuerzos y de los desplazamientos son equivalentes a las suposiciones a priori concernientes a los esfuerzos y desplazamientos transversales, aunque el desarrollo posterior es hecho sistemáticamente. Además no hay prueba de que las expansiones obtenidas son asintóticas y de validez uniforme sobre toda la región de la concha o placa."

A pesar de esto, el método de expansiones asintóticas es un intento natural de obtener una buena deducción de las ecuaciones; ha probado su eficiencia en muchos problemas (es decir, coincide con los experimentos) y es el primer paso al tratamiento completo. El hecho de que en este trabajo no se utilice el método de expansiones asintóticas de Ciarlet es porque no se pudo generalizar este método para todas las condiciones de frontera que aparecen en la teoría de placas.

Asi pues, teniendo en cuenta que no hay todavía una derivación completamente satisfactoria, procedamos a obtener la ecuaciones de Von-Kármán. En primer lugar denotemos por

$$U_1(x,y,z) \quad , \quad U_2(x,y,z) \quad , \quad U_3(x,y,z)$$

los desplazamientos en las direcciones x, y, z respectivamente de los puntos de la placa. En la situación que queremos describir el desplazamiento vertical es comparable con el ancho h de la placa mientras que los desplazamientos horizontales son mas pequeños y los supondremos de orden h^2. todavía mas pequeños van a ser el engordamiento o enflacamiento que sufra la placa y $\therefore$ lo supondremos de orden h^3, de hecho de la forma $h^2 z w_1(x,y)$ para que el plano medio no engorde. Finalmente cuando la placa está flexionada los cambios de los desplazamientos horizontales en la dirección vertical son debido a la flexión y por consiguiente lo supondremos $O(h)$.

Estas observaciones nos llevan a buscar una solución con un desarrollo de la forma

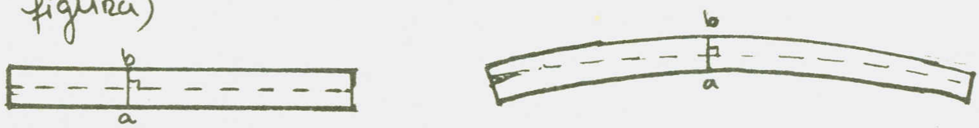
$$\begin{aligned} U_1(x,y,z) &= h^2\, \tilde{u}(x,y,z/h) + O(h^3) \\ U_2(x,y,z) &= h^2\, \tilde{v}(x,y,z/h) + O(h^3) \quad \ldots\ldots (1) \\ U_3(x,y,z) &= h\, w(x,y) + O(h^3)' \end{aligned}$$

DONDE $O(h^3)' = h^2 w_1(x,y)z + O(h^4)$.

Las funciones $\tilde{u}, \tilde{v}, w, w_1$ deben ser determinadas y $O(h^3)$ representa funciones que son despreciables.

La cinemática impone una restricción adicional sobre las funciones $\tilde{u}, \tilde{v}, w$ que conocemos como la hipótesis de Kirchhoff que ahora discutimos:

Hemos supuesto que los estiramientos horizontales son $O(h^2)$. Esto implica que si tomamos una línea recta ab que sea perpendicular al plano medio de la placa, (véase figura)



esta línea en la posición deformada está forzada a formar un ángulo recto con el plano medio deformado, ya que de no ser así esto nos daría un desplazamiento horizontal de a y b que sería $O(h)$ y hemos supuesto que los desplazamientos horizontales son $O(h^2)$. Entonces por consistencia las rectas normales a los planos de la placa se conservan, a primer orden, normales a ellos.

En la posición sin deformar la recta ab está dada por

$$x = x_0$$
$$y = y_0$$
$$z = z_0 + t$$

que es normal al plano $z = z_0$.

La recta deformada es una curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = x_0 + h^2\,\tilde{u}\left(x_0, y_0, \frac{z_0+t}{h}\right) + O(h^3)$$

$$y = y_0 + h^2\,\tilde{v}\left(x_0, y_0, \frac{z_0+t}{h}\right) + O(h^3)$$

$$z = z_0 + t + h\,w(x_0, y_0) + O(h^3).$$

El plano $z = z_0$ se deforma a la superficie

$$(x,\ y,\ z_0 + h\,w(x,y))$$

a primer orden. El punto de intersección de la recta deformada y el plano deformado, (a primer orden) es

$$(x_0,\ y_0,\ z_0 + h\,w(x_0,y_0))$$

En dicho punto los vectores tangentes a la superficie media son a primer orden

$$(1, 0, h\,w_x(x_0,y_0))\ ;\ (0, 1, h\,w_y(x_0,y_0))$$

El vector tangente a la recta está dado a primer orden por

$$(h\,\tilde{u}_{\tilde{z}}(x_0, y_0, z_0/h),\ h\,\tilde{u}_{\tilde{z}}(x_0, y_0, z_0/h),\ 1)$$

donde $\tilde{z} = z/h$, $t = O(h^2)$.

Como queremos que la recta sea ortogonal a la superficie necesitamos que estos vectores sean ortogonales y tenemos ya que el argumento es bueno para todo (x_0, y_0, z_0)

$$h(\tilde{u}_{\tilde{z}}(x,y,\tilde{z}) + w_x(x,y)) = 0$$

$$h(\tilde{u}_{\tilde{z}}(x,y,\tilde{z}) + w_y(x,y)) = 0$$

Integrando estas ecuaciones tenemos:

$$\tilde{u}(x,y,\tilde{z}) = u(x,y) - \tilde{z}\, w_x$$

$$\tilde{v}(x,y,\tilde{z}) = v(x,y) - \tilde{z}\, w_y$$

Finalmente la solución buscada tendrá la forma

$$u_1(x,y,z) = h^2 u - hz\, w_x + O(h^3)$$

$$u_2(x,y,z) = h^2 v - hz\, w_y + O(h^3) \quad \cdots \quad (2)$$

$$u_3(x,y,z) = hw + O(h^3)',$$

donde la forma propuesta del desplazamiento está motivado por la cinemática que se observa en los experimentos.

Hay otra manera no cinemática sino dinámica de motivar las ecuaciones que expresan el desplazamiento. Partiendo de las ecuaciones (1) es de esperarse que si los desplazamientos horizontales son $O(h^2)$ las tracciones horizontales sobre las caras paralelas al plano medio deben ser $O(h^2)$. De otra forma se producirían desplazamientos $O(h)$.

Si $\rho = \frac{1}{2}[J + J^T + J^T J]$ es la matriz de deformaciones sabemos que la matriz de esfuerzos τ está dada en terminos de ρ por la ley de Hooke en la forma: (ver [10] pag 14 y [7] pag. 44-45)

$$\tau = \lambda \operatorname{tr}\rho\, I + 2\mu\rho$$

(λ, μ coeficientes de Lamé)

La tracción sobre las superficies paralelas al plano de la placa está dada por

$$\tau \cdot \eta = \begin{pmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \\ \tau_{33} \end{pmatrix} \qquad \text{donde } \eta = (0,0,1)$$

utilizando las ecuaciones (1) para calcular tenemos que

$$\tau_{13} = 2\mu\left[h\tilde{U}_{\bar{z}} + hW_x + O(h^2)\right]$$

$$\tau_{23} = 2\mu\left[h\tilde{V}_{\bar{z}} + hw_y + O(h^2)\right]$$

Como queremos que las tracciones horizontales no produzcan desplazamientos $O(h)$ debemos tener:

$$\tilde{U}_{\bar{z}} + W_x = 0$$

$$\tilde{V}_{\bar{z}} + W_y = 0 .$$

Estas son las mismas ecuaciones obtenidas usando la versión cinemática de la hipótesis de Kirchhoff.

Esta es pues suficiente motivación para buscar soluciones aproximadas de la forma propuesta en la ecuación (2).

Ahora, sabemos que la placa está en equilibrio en $x+U(x)$ donde $U(x)$ minimiza al funcional

$$I(U) = \int_\omega \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \frac{1}{2}\lambda(\mathrm{tr}\rho)^2 + \mu\,\mathrm{tr}\rho^2 \right\} dx\,dy\,dz + T(U) \quad \dots (3)$$

donde $T(U)$ es el trabajo realizado por fuerzas aplicadas a la placa. El área ω representa el área del plano medio de la placa en la configuración sin deformar. Por razones técnicas supondremos que w cumple todas las condiciones necesarias para aplicar los teoremas de encaje de Sobolev (ver [1] pag. 97) el teorema de compacidad de Rellich (ver [1] pag. 144) y para integrar por partes. La forma específica de $\tau(u)$ la discutiremos mas adelante.

Observemos que:

$$\frac{1}{2}\lambda(tr\rho)^2+\mu\, tr\rho^2 = \frac{1}{2}\, tr\left\{(\lambda\, tr\rho\, I+2\mu\rho)\rho\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\, tr\{\tau\cdot\rho\},$$

explícitamente en términos de las componentes de los dos tensores y usando la simetría de estos, podemos escribir que la expresión anterior es igual a:

$$\frac{1}{2}\left\{\varepsilon_{11}\tau_{11}+\varepsilon_{22}\tau_{22}+\varepsilon_{33}\tau_{33}+2\,\varepsilon_{12}\tau_{12}+2\,\varepsilon_{13}\tau_{13}+2\varepsilon_{23}\tau_{23}\right\}$$

(ε_{ij} componentes de ρ, τ_{ij} componentes de τ).

Sustituyendo las ecuaciones (2) en el tensor de deformaciones ρ y truncando el desarrollo a segundo orden obtenemos

$$\rho = \begin{pmatrix} -hz\,w_{xx} & -hz\,w_{xy} & 0 \\ -hz\,w_{xy} & -hz\,w_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} h^2(u_x+\frac{1}{2}w_x^2) & \frac{h^2}{2}(u_y+v_x+w_xw_y) & 0 \\ \frac{h^2}{2}(u_y+v_x+w_xw_y) & h^2(v_y+\frac{1}{2}w_y^2) & 0 \\ 0 & 0 & h^2\left(w_1+\frac{w_x^2+w_y^2}{2}\right) \end{pmatrix}$$

$$+\,O(h^3).$$

Pondremos $-w_1 = \frac{w_x^2 + w_y^2}{2}$, de esta manera tendremos $\varepsilon_{33} = 0$.

Escribamos

$$\rho = z\rho_F + \rho_E .$$

Notemos que la matriz ρ_F contiene las deformaciones a primer orden, es decir las deformaciones debidas a la flexión mientras que la matriz ρ_E contiene las contribuciones a la extensión o estiramiento. Notemos que el único término no lineal es un estiramiento adicional provocado por la flexión.

Si sustituimos esta expresión en (3) obtenemos:

$$\int_\omega \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2}\lambda \left\{ z^2 \operatorname{tr}^2 \rho_F + 2z \operatorname{tr}\rho_F \operatorname{tr}\rho_E + \operatorname{tr}^2 \rho_E \right\} dx\, dy\, dz$$

$$+ \int_\omega \int_{-h/2}^{h/2} \mu \left\{ z^2 \operatorname{tr}\rho_F^2 + 2z \operatorname{tr} \rho_F \rho_E + \operatorname{tr} \rho_E^2 \right\} dx\, dy\, dz .$$

Integrando respecto a z, las integrales que contienen a los términos cruzados son cero. Queda así en esta aproximación que la energía interna se separa en dos contribuciones independientes una que es la almacenada en la flexión y la otra en el estiramiento.

$$\frac{h^3}{12} \int_\omega \frac{1}{2}\lambda \operatorname{tr}^2 \rho_F + \mu \operatorname{tr}\rho_F^2 + h \int_\omega \frac{1}{2}\lambda \operatorname{tr}^2 \rho_E + \mu \operatorname{tr}\rho_E^2$$

$$= \mathcal{E}_F + \mathcal{E}_E$$

Poniendo $\lambda = \frac{E\,\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$,

$$\sigma = \frac{\nu}{1-\nu} \Rightarrow 1 - \sigma = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}$$

Podemos reescribir

$$\mathcal{E}_F = \frac{h^5}{12}\,\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\omega (\Delta w)^2 + 2(1-\sigma)\left(w_{xy}^2 - w_{xx}w_{yy}\right)$$

$$\mathcal{E}_E = h^5\,\frac{\lambda+2\mu}{2}\int_\omega \left(\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)^2 + 2\sigma\left(u_x+\frac{w_x^2}{2}\right)\left(v_y+\frac{w_y^2}{2}\right) + \left(v_y+\frac{w_y^2}{2}\right)^2\right.$$

$$\left. + (1-\sigma)\left(\frac{v_x+u_y+w_x w_y}{2}\right)^2\right)$$

tomemos la primera variación de $\mathcal{E}_F$ respecto a w

$$\delta\mathcal{E}_F = \frac{h^5}{12}(\lambda+2\mu)\int_\omega \Delta w\left[\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y^2}\right] +$$

$$+ (1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\,\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial^2(\delta w)}{\partial y\partial x}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right)\right]\,dx\,dy$$

Si escribimos a la integral como

$$A(w,\delta w)$$

e integramos por partes (esto se hace con detalle al principio de la siguiente sección) obtenemos:

$$A(w,\delta w) = \int_\omega \delta w\,\Delta^2 w + \int_\Gamma \delta w\,Nw + \int_\Gamma \frac{\partial\delta w}{\partial\eta}\,Mw$$

donde $\quad Nw = -\dfrac{\partial}{\partial\eta}\Delta w - (1-\sigma)\dfrac{\partial}{\partial s}w_{\eta\tau}$

$$Mw = \sigma\,\Delta w + (1-\sigma)\,w_{\eta\eta}$$

[Los subíndices η y τ denotan derivadas normales y tangenciales respectivamente. $\frac{\partial}{\partial s}$ denota derivada con respecto a la longitud de arco. Δ denota al operador laplaciano, $\Delta^2 u = \Delta\Delta u$.]

Ahora para la energía provocada por el estiramiento se tiene:

$$h^5 \frac{\lambda+2\mu}{2} \int_\omega \Big[\left(u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right)^2 + \left(v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right)^2 +$$

$$+ 2\sigma \left(u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right)\left(v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2} (1-\sigma)\left(v_x + u_y + w_x w_y\right)^2 \Big] \, dx \, dy$$

tomando

$$\bar{u} = u + \epsilon \, \delta u$$

$$\bar{v} = v + \epsilon \, \delta v$$

$$\bar{w} = w + \epsilon \, \delta w,$$

sustituyendo en el funcional, derivando con respecto a ϵ y evaluando en $\epsilon = 0$ obtenemos:

$$h^5 \frac{\lambda+2\mu}{2} \int_\omega 2\left(u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} + 2\sigma \left(v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right) \frac{\partial \delta u}{\partial x}$$

$$+ (1-\sigma)\left(v_x + u_y + w_x w_y\right) \frac{\partial \delta u}{\partial y} \qquad +$$

$$h^5 \frac{\lambda+2\mu}{2} \int_\omega 2\left(v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right) \frac{\partial \delta v}{\partial y} + 2\sigma \left(u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right) \frac{\partial \delta v}{\partial y}$$

$$+ (1-\sigma)\left(v_x + u_y + w_x w_y\right) \frac{\partial \delta v}{\partial x} \qquad +$$

$$h^5 \frac{\lambda+2\mu}{2} \int_\omega 2\left(u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right) w_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + 2\left(v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right) w_y \frac{\partial \delta w}{\partial y}$$

$$+ 2\sigma \Big[\left[u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2\right][w_y] \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \left[v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2\right][w_x] \frac{\partial \delta w}{\partial x}$$

$$+ (1-\sigma)\left[v_x + u_y + w_x w_y\right] \left(w_x \frac{\partial \delta w}{\partial y} + w_y \frac{\partial \delta w}{\partial x}\right)$$

Integrando por partes y juntando con lo que se había obtenido para la energía de flexión resulta la siguiente expresión:

$$h^5 \frac{\lambda+2\mu}{12} \int_\omega \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right\} \delta u + \left\{ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \right\} \delta v$$

$$+ \left\{ \Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_y \frac{\partial w}{\partial y}\right) \right\} \delta w$$

$$+ \int_{\partial\omega} N_n \delta u_n \, ds + \int_{\partial\omega} N_{ns} \delta u_s \, ds + \int_{\partial\omega} M_W \frac{\partial \delta w}{\partial \eta}$$

$$+ \int_{\partial\omega} \left\{ N_W + N_n \frac{\partial w}{\partial \eta} + N_{ns} \frac{\partial w}{\partial s} \right\} \delta w$$

donde

$$N_n = N_x \eta_1^2 + 2 N_{xy} \eta_1 \eta_2 + N_y \eta_2^2$$

$$N_{ns} = \eta_1 \eta_2 (N_y - N_x) + (\eta_1^2 - \eta_2^2) N_{xy}$$

$$u_n = \eta_1 u + \eta_2 v \qquad u_\tau = -\eta_2 u + \eta_1 v$$

donde

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} c\, \tau_{xx} = 12 \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] + \sigma \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] \right\}$$

$$N_y = \int_{-h/2}^{h/2} c\, \tau_{yy} = 12 \left\{ \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] + \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \right] \right\}$$

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} c\, \tau_{xy} = 12 \left(\frac{1-\sigma}{2}\right) \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \right]$$

c constante.

CON RESPECTO AL TRABAJO DE LAS FUERZAS TENDREMOS

$$T(U) = \int_\Omega F \cdot U + \int_{\partial\Omega} F_{\partial\Omega} \cdot U \qquad \left(U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} \text{ ES COMO EN (2)} \right)$$

SUPONDREMOS

$$F = \begin{pmatrix} O(h^3) \\ O(h^3) \\ \dfrac{(\lambda + 2\mu)}{12} f(x,y)\, h^3 + O(h^4) \end{pmatrix} = O(h^3)$$

$$\therefore\ F \cdot U = O(h^5) + \frac{(\lambda + 2\mu)}{12} h^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f w \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \int_\Omega F \cdot U = \int_\omega \frac{(\lambda + 2\mu)}{12} h^5 f w + O(h^6)$$

SUPONDREMOS IGUALMENTE

$$F_{\partial\Omega} \Big|_{z = \pm h} = \begin{pmatrix} O(h^4) \\ O(h^4) \\ \dfrac{(\lambda + 2\mu)}{12} g_\pm(x,y)\, h^4 + O(h^5) \end{pmatrix} = O(h^4)$$

$$\therefore\ \int_{\partial\Omega} F_{\partial\Omega} \cdot U = \frac{(\lambda + 2\mu)}{12} h^5 \int_\omega (g_+ - g_-) w + O(h^6)$$

FINALMENTE SUPONDREMOS QUE

$$F_{\partial\Omega} \Big|_{\partial\omega \times [-h/2, h/2]} = \begin{pmatrix} -12 G_n \eta z h + (F_n \eta + F_\tau \tau) h^2 + O(h^3) \\ H(x,y)\, h^3 + O(h^4) \end{pmatrix}$$

Con $F_n = F_n(x,y)$

$F_T = F_T(x,y)$ $\qquad \eta$ y τ en el plano (x,y)

$G_n = G_n(x,y)$

$F_n = -\lambda f(s)$ es la fuerza de compresión

$F_T = -\lambda g(s)$ es la fuerza de tracción

G_n corresponde a una fuerza de flexión.

$$\int_{\partial\omega\times[-h/2,h/2]} F_{\partial\Omega} U = \frac{\lambda+2\mu}{12}\int_{\partial\omega} h^5 (F_n U\cdot\eta + F_T U\cdot T + HW + G_n W_\eta) + O(h^6)$$

$$\therefore \delta T(U) = \left(\frac{\lambda+2\mu}{12}\right) h^5 \left(\int_\omega (f+g_+-g_-)\,\delta W + \int_{\partial\omega}\left[F_n \delta U\cdot\eta + F_T \delta U\cdot T + H\delta W + G_n \frac{\partial}{\partial\eta}(\delta W)\right]\right.$$

$I'(U) = \delta T(U)$ $\forall \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix}$ en un espacio de deformaciones admisibles y supondremos que ese espacio contiene a $C_0^\infty(\omega)$. $\therefore$ las ecuacione que obtenemos son:

$$(N_x)_x + (N_{xy})_y = 0$$

$$(N_y)_y + (N_{xy})_x = 0$$

$$\Delta^2 W - (N_x W_x + N_{xy} W_y)_x + (N_y W_y + N_{xy} W_x)_y = f + g_+ - g_- \quad \ldots (4)$$

Para obtener las condiciones de frontera observemos que:

$$\int_{\partial\omega} N_n \delta U_n + N_{n\Delta}\delta U_T + (N_n W_\eta + N_{n\Delta} W_T)\,\delta W + N(W)\,\delta W + M(W)\frac{\partial}{\partial\eta}(\delta W)$$

$$= \int_{\partial\omega} F_n \delta U_n + F_T \delta U_T + H\delta W + G_n (\delta W)_\eta$$

Supondremos que U_1, U_2 no son prescritas sobre $\partial\omega$
$\therefore$ U_n, U_t son libres y claramente dada $\varphi \in C^\infty(\partial\omega)$
podemos extender φ a un par de funciones

$\begin{pmatrix}\delta u \\ \delta v\end{pmatrix}$ en ω tales que $\delta U_t = 0$, $\delta U_n = 0$
$\delta U_n = \varphi$ $\delta U_t = \varphi$

$$\therefore \; N_n|_{\partial\omega} = F_n = -\lambda f(s)$$
$$N_{n\tau}|_{\partial\omega} = F_\tau = -\lambda g(s).$$

Para w supondremos que

$\left.\begin{matrix} w = g_1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = h_1 \end{matrix}\right.$ en Γ_1, $w = g_2$ en Γ_2, $\dfrac{\partial w}{\partial n} = h_4$ en Γ_4

$\partial\omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$\therefore \int_{\partial\omega} -\lambda(f w_n + g w_\tau)\delta w + N(w)\delta w + M(w)\frac{\partial}{\partial n}(\delta w) =$$
$$= \int_{\partial\omega} H\delta w + G_n \frac{\partial}{\partial n}(\delta w)$$

se tiene

$\left.\begin{matrix} \delta w = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(\delta w) = 0 \end{matrix}\right.$ en Γ_1, $\delta w = 0$ en Γ_2, $\dfrac{\partial}{\partial n}(\delta w) = 0$ en Γ_4

ya que $w + \delta w$ debe satisfacer las condiciones de frontera estables y (4).

Sobre Γ_2 tomando $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_2)$ podemos extender φ a ω tal que: $\delta w = 0$ en Γ_2, $\dfrac{\partial \delta w}{\partial n} = \varphi$ en Γ_2 (esto se hara con detalle en la proxima sección.)

$\therefore\ M(w) = G_n$ en Γ_2.

Sobre Γ_3 podemos extender $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_3)$ tal que

$$\delta w = \varphi \qquad \text{ó} \qquad \delta w = 0$$
$$\frac{\partial \delta w}{\partial \eta} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \eta}\delta w = \varphi$$

$$\therefore \left.\begin{array}{l} M(w) = 0 \\ N(w) - \lambda(f w_\eta + g w_\tau) = H \end{array}\right\} \text{ en } \Gamma_3 .$$

Sobre Γ_4: $N(w) - \lambda(f w_\eta + g w_\tau) = H$.

Como $(N_x)_x + (N_{xy})_y = 0 \Leftrightarrow \text{Div.}\begin{pmatrix} N_x \\ N_{xy} \end{pmatrix} = 0$

y ω es simplemente conexo.

entonces $\exists\, \varphi$ tal que $N_x = \varphi_y$, $N_{xy} = -\varphi_x$

como $(N_{xy})_x + (N_y)_y = 0 \Leftrightarrow \text{Div.}\begin{pmatrix} N_{xy} \\ N_y \end{pmatrix} = 0$

$\exists\, \psi$ tal que $N_{xy} = \psi_y$, $N_y = -\psi_x$.

(VER [5] pag. 616)

lo anterior implica que $\psi_y + \varphi_x = 0 \therefore \exists\, F \ni$.

$$\begin{array}{l} \varphi = F_y \\ \psi = -F_x \end{array} \Rightarrow \begin{cases} N_x = F_{yy} \\ N_{xy} = -F_{xy} \\ N_y = F_{xx} \end{cases}$$

$\therefore$ la formula (4) puede ser escrita como:

$$\Delta^2 w = [F, w] + \tilde{f}$$

donde $[F,w] = F_{yy} w_{xx} - 2 F_{xy} w_{xy} + F_{xx} w_{yy}$

$$\tilde{f} = f + g_+ - g_- .$$

Para poder resolver u, v en función de F observemos que tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_{yy}}{12} - \frac{1}{2}(w_x^2 + \sigma w_y^2) \\ \frac{F_{xx}}{12} - \frac{1}{2}(w_y^2 + \sigma w_x^2) \end{pmatrix}$$

$\therefore$ invirtiendo ya que $\sigma \neq 1$ tenemos:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{1}{1-\sigma^2} \begin{pmatrix} \frac{F_{yy} - \sigma F_{xx}}{12} - \frac{1}{2}(1-\sigma^2) w_x^2 \\ \frac{F_{xx} - \sigma F_{yy}}{12} - \frac{1}{2}(1-\sigma^2) w_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G(x,y) \\ K(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad u = \int^x G\,dx + \tilde{G}(y) \quad , \quad v = \int^y K\,dy + \tilde{K}(x)$$

De la definición de N_{xy} se tiene

$$v_x + u_y = \frac{N_{xy}}{6(1-\sigma)} - w_x w_y = \frac{-F_{xy}}{6(1-\sigma)} - w_x w_y$$

$$\therefore \tilde{K}'(x) + \tilde{G}'(y) = -\frac{F_{xy}}{6(1-\sigma)} - w_x w_y - \int^y K_x\,dy - \int^x G_y\,dx = C(x,y)$$

$$\tilde{K}''(x) = -\frac{F_{xxy}}{6(1-\sigma)} - (w_x w_y)_x - \int^y K_{xx} - G_y = C_x$$

$$\tilde{G}''(y) = \frac{-F_{xyy}}{6(1-\sigma)} - (w_x w_y)_y - K_x - \int^x G_{yy} = C_y$$

$$C_{xy} = 0 \Rightarrow -\frac{F_{xxyy}}{6(1-\sigma)} - (w_x w_y)_{xy} - K_{xx} - G_{yy} = 0$$

$$\therefore \frac{-F_{xxyy}}{6(1-\sigma)} - (w_x w_y)_{xy} - \frac{1}{1-\sigma^2}\frac{1}{12}\left(F_{xxxx} - \sigma F_{xxyy} + F_{yyyy} - \sigma F_{xxyy}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left((w_y^2)_{xx} + (w_x^2)_{yy}\right) = 0$$

ENTONCES

$$2(1+\sigma)F_{xxyy} + F_{xxxx} + F_{yyyy} - 2\sigma F_{xxyy} + (1-\sigma^2)12\left((w_x w_y)_{xy} - \frac{1}{2}\left((w_y^2)_{xx} + (w_x^2)_{yy}\right)\right)$$

$$= 0$$

$$\therefore \Delta^2 F + 12(1-\sigma^2)\left((w_{xx} w_y + w_x w_{xy})_y - (w_y w_{xy})_x - (w_x w_{xy})_y\right) = 0$$

$$\therefore \Delta^2 F + 12(1-\sigma^2)\left(w_{xxy} w_y + w_{xyy} w_x + w_{xx} w_{yy} + w_{xy}^2 - w_y w_{xxy}\right.$$
$$\left. - w_x w_{xyy} - w_{xy}^2 - w_{xy}^2\right) = 0$$

$$\therefore \Delta^2 F + 6(1-\sigma^2)\left(w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2\right) = 0$$

ENTONCES

$$\Delta^2 F = -6(1-\sigma^2)\,[w,w]. \qquad \ldots (5)$$

(4) y (5) SON LAS RELACIONES FUNDAMENTALES EN LAS LLAMADAS ECUACIONES DE VON-KÁRMÁN.

Ahora pondremos las condiciones de frontera $N_n = -\lambda f$, $N_{ns} = -\lambda g$ en terminos de F.

Se tiene

$$F_{yy}\eta_1^2 - 2F_{xy}\eta_1\eta_2 + F_{xx}\eta_2^2 = -\lambda f$$

$$(F_{xx} - F_{yy})\eta_1\eta_2 - F_{xy}(\eta_1^2 - \eta_2^2) = -\lambda g$$

en términos de derivadas normales y tangenciales se tiene

$$\left.\begin{array}{l} F_{\tau\tau} = -\lambda f \\ -F_{\eta\tau} = -\lambda g \end{array}\right. \quad \text{en } \partial\omega .$$

Es posible obtener un problema simplificado para F. Usando las fórmulas del apéndice podemos escribir de la siguiente manera las igualdades anteriores

$$\begin{pmatrix} F_\Delta \\ F_\eta \end{pmatrix}' + k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_\Delta \\ F_\eta \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} .$$

Resolveremos este sistema de ecuaciones de 1er orden para F_Δ y F_η con la condición de que ambas funciones sean periódicas.

Escribiendolo $X' + kAX = \lambda F$

donde $X = \begin{pmatrix} F_\Delta \\ F_\eta \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}$

tenemos

$$\left(e^{\int_0^\Delta kA\,ds} X\right)' = \lambda e^{\int_0^\Delta kA\,ds} F$$

donde formalmente

$$e^{\int_0^\Delta kA\,ds} = \begin{pmatrix} \cos\int_0^\Delta k\,ds & -\operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds \\ \operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds & \cos\int_0^\Delta k\,ds \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left(\begin{pmatrix} \cos\int_0^\Delta k\,ds & -\operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds \\ \operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds & \cos\int_0^\Delta k\,ds \end{pmatrix} X \right)' = \begin{pmatrix} \cos\int_0^\Delta k\,ds \cdot X_1 & -\operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds\, X_2 \\ \operatorname{sen}\int_0^\Delta k\,ds \cdot X_1 & \cos\int_0^\Delta k\,ds\, X_2 \end{pmatrix}'$$

lo cual es igual a

$$\begin{pmatrix} -k\,\mathrm{sen}\int_0^s k\,ds\; x_1 - \cos\int_0^s k\,ds\; x_2 + \cos\int_0^s k\,ds\; x_1' - \mathrm{sen}\int_0^s k\,ds\; x_2' \\ k\cos\int_0^s k\,ds\; x_1 - k\,\mathrm{sen}\int_0^s k\,ds\; x_2 + \mathrm{sen}\int_0^s k\,ds\; x_1' + \cos\int_0^s k\,ds\; x_2' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\int_0^s k\,ds & -\mathrm{sen}\int_0^s k\,ds \\ \mathrm{sen}\int_0^s k\,ds & \cos\int_0^s k\,ds \end{pmatrix}\left(k\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}\right)$$

por lo tanto

$$e^{\int_0^s k\,ds\,A}\,x = \int_0^s \lambda e^{\int_0^s k\,ds\,A}\,F(\xi)\,d\xi) + x_0$$

$$x(s) = e^{-\int_0^s k\,ds\,A}\,x_0 + \int_0^s e^{-\int_\xi^s k\,ds\,A}\,F(\xi)\,d\xi$$

Para la periodicidad necesitamos que $x(1) = x(0)$

$$\therefore \left(I - e^{-\int_0^1 k\,ds\,A}\right)x(0) = \int_0^1 e^{-\int_\xi^1 k\,ds\,A}\,F(\xi)\,d\xi$$

y si $I - e^{-\int_0^1 k\,ds\,A}$ es invertible obtenemos $x(0)$ y por lo tanto $x(s)$.

Ahora $I - e^{-\int_0^1 k\,ds\,A} = \begin{pmatrix} 1-\cos\int_0^1 k\,ds & -\mathrm{sen}\int_0^1 k\,ds \\ \mathrm{sen}\int_0^1 k\,ds & 1-\cos\int_0^1 k\,ds \end{pmatrix}$

tiene determinante $\left(1-\cos\int_0^1 k\,ds\right)^2 + \mathrm{sen}^2\int_0^1 k\,ds$

$$= 2 - 2\cos\int_0^1 k\,ds = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\int_0^1 k\,ds}{2}\right)$$

$\therefore$ la única forma para que la matriz no sea invertible es que $\int_0^1 k\,ds = 2k\pi$. (teo. Gauss Bonnet ver [6] pag 268)

Pero aquí k es la curvatura $k = -\frac{d\theta}{ds}$, θ = ángulo de la tangente a la curva en una dirección fija.

$\therefore$ para una curva simple se tiene

$$\int_0^1 k\,ds = -2\pi .$$

entonces

$$I - e^{-\int_0^1 k\,ds\,A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ para poder tener una solución necesitamos

$$\int_0^1 e^{-\int_\xi^1 k\,ds\,A} F(\xi)\,d\xi = 0$$

$$\therefore \quad \int_0^1 \begin{pmatrix} \cos\int_\xi^1 k\,ds & \operatorname{sen}\int_\xi^1 k\,ds \\ -\operatorname{sen}\int_\xi^1 k\,ds & \cos\int_\xi^1 k\,ds \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} d\xi = 0$$

Como $k = -\Theta'$ podemos suponer que $\Theta(1) = 0$ por la periodicidad $\therefore$

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} \cos\Theta(\xi) & \operatorname{sen}\Theta(\xi) \\ -\operatorname{sen}\Theta(\xi) & \cos\Theta(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} d\xi = 0$$

como $\begin{matrix} \cos\Theta = \dot{x} \\ \operatorname{sen}\Theta = \dot{y} \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\Theta \\ \operatorname{sen}\Theta \end{pmatrix} = T = \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix}$

$$\eta = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\Theta \\ -\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\therefore \int_0^1 (f, -g)\cdot T = 0 = \int_0^1 \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \cdot \eta = 0$$

$$F|_{\partial\omega} = -\lambda(f\eta + g\,t) = -\lambda(F_1\vec{i} + F_2\vec{j})$$

$$\therefore \; f = F_1\eta_1 + F_2\eta_2$$

$$g = -F_1\eta_2 + F_2\eta_1$$

entonces

$$\int_0^1 f\eta_1 - g\eta_2 = \int_0^1 F_1(\eta_1^2+\eta_2^2) = \int_0^1 F_1$$

$$\int_0^1 -f\eta_2 - g\eta_1 = \int_0^1 -F_2(\eta_1^2+\eta_2^2) = -\int_0^1 F_2$$

Las condiciones para que F_s y F_n sean periodicas es que

$$\int_0^1 F_1\,ds = \int_0^1 F_2\,ds = 0$$

es decir las fuerzas en las direcciones x y y seran cero si no tendriamos un movimiento de translación horizontal. En ese caso podemos tomar cualquier x_0

$$\begin{pmatrix} F' \\ F_\eta \end{pmatrix} = e^{-\int_0^s k\,d\xi\, A}\begin{pmatrix} F'(0) \\ F_\eta(0)\end{pmatrix} + \int_0^s e^{-\int_\xi^s k\,ds\, A}\, F(\xi)\,d\xi$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\int_0^s k\,ds & \operatorname{sen}\int_0^s k\,ds \\ -\operatorname{sen}\int_0^s k\,ds & \cos\int_0^s k\,ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'(0) \\ F_\eta(0)\end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^s \begin{pmatrix} \cos\int_\xi^s k\,ds & \operatorname{sen}\int_\xi^s k\,ds \\ -\operatorname{sen}\int_\xi^s k\,ds & \cos\int_\xi^s k\,ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\xi) \\ -g(\xi)\end{pmatrix} d\xi$$

Con $K = -\Theta'$ y $\Theta(0) = \Theta(1) = 0$, $\therefore$

$$\begin{pmatrix} \cos\Theta(s) & -\operatorname{sen}\Theta(s) \\ \operatorname{sen}\Theta(s) & \cos\Theta(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'(0) \\ F_\eta(0)\end{pmatrix} + \int_0^s \begin{pmatrix} \cos(\Theta(s)-\Theta(\xi)) & -\operatorname{sen}(\Theta(s)-\Theta(\xi)) \\ \operatorname{sen}(\Theta(s)-\Theta(\xi)) & \cos(\Theta(s)-\Theta(\xi)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\xi) \\ -g(\xi)\end{pmatrix} d\xi$$

$$= \begin{pmatrix} -\eta_2(s) & -\eta_1(s) \\ \eta_1(s) & -\eta_2(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F'(0) \\ F_\eta(0)\end{pmatrix} - \lambda\int_0^s \begin{pmatrix} -\eta_2(\xi) & \eta_1(\xi) \\ -\eta_1(\xi) & -\eta_2(\xi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\xi) \\ -g(\xi)\end{pmatrix} d\xi$$

usando $e^{-\int_\xi^s k\,ds\,A} = e^{-\int_0^s k\,ds\,A}\, e^{\int_0^\xi k\,d\xi\,A}$

$$\begin{pmatrix} F'(s) \\ F_\eta(s) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \eta_2(s) & \eta_1(s) \\ -\eta_1(s) & \eta_2(s) \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} F'(0) \\ F_\eta(0) \end{pmatrix} + \lambda\int_0^s \begin{pmatrix} \eta_2(\xi) & -\eta_1(\xi) \\ \eta_1(\xi) & \eta_2(\xi) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(\xi) \\ -g(\xi) \end{pmatrix} d\xi\right)$$

$\therefore$

$$F'(s) = -\eta_2(s)F'(0) - \eta_1(s)F_\eta(0) - \lambda\left[\eta_2(s)\int_0^s \eta_2(\xi)f(\xi) + \eta_1(\xi)g(\xi) + \eta_1(s)\int_0^s \eta_1(\xi)f(\xi) - \eta_2(\xi)g(\xi)\right]$$

$\therefore$

$$F(s) = -\int_0^s \left(\eta_2(s)F'(0) + \eta_1(s)F_\eta(0)\right)ds - \lambda\left[\int_0^s \eta_2(s)\int_0^s (\eta_2(\xi)f + \eta_1(\xi)g)\right.$$
$$\left. + \int_0^s \eta_1(s)\int_0^s(\eta_1(\xi)f - \eta_2(\xi)g)\right] + F(0)$$

NECESITAMOS QUE F SEA PERIODICA ENTONCES $F(1) = F(0)$

AHORA $\eta_2(s) = -\cos\theta = -\dot{x}$

$\eta_1(s) = \operatorname{sen}\theta = \dot{y}$,

PONDREMOS EL ORIGEN EN $s=0$, $x(0) = y(0) = 0$.

$$\therefore F(s) = F(0) + x(s)F'(0) - y(s)F_\eta(0) - \lambda\int_0^s\left(-\dot{x}(s)\int_0^s(\eta_2(\xi)f + \eta_1(\xi)g) + \dot{y}(s)\int_0^s(\eta_1(\xi)f - \eta_2(\xi)g)\right)$$

INTEGRANDO POR PARTES TENEMOS.

$$F(s) = F(0) + x(s)F'(0) - y(s)F_\eta(0) - \lambda\left[\int_0^s x(s)(\eta_2(s)f + \eta_1(s)g) - y(s)(\eta_1(s)f - \eta_2(s)g)\right.$$
$$\left. - x(s)\int_0^s(\eta_2(\xi)f + \eta_1(\xi)g)\Big|_0^s + y(s)\int_0^s(\eta_1(\xi)f - \eta_2(\xi)g)\Big|_0^s\right]$$

$\therefore$

$$F(s) = F(0) + x(s)F'(0) - y(s)F_\eta(0) + \lambda\left(x(s)\int_0^s(\eta_2(\xi)f + \eta_1(\xi)g) - y(s)\int_0^s(\eta_1(\xi)f - \eta_2(\xi)g)\right)$$
$$-\lambda\int_0^s (x(s)F_2(s) - y(s)F_1(s))\,ds$$

AHORA $x(1) = y(1) = 0$ $\therefore$ TENEMOS QUE TENER LA CONDICIÓN

$$\int_0^1 (x(s)F_2(s) - y(s)F_1(s))\,ds = 0$$

ES DECIR

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} ds = 0$$

IGUAL AL MOMENTO DE LA FUERZA $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$ CON RESPECTO AL ORIGEN.

(si este momento fuera distinto de cero la placa giraría alrededor del origen.)

$$F(\Delta) = F(0) + x(\Delta)F'(0) - y(\Delta)F_\eta(0) + \lambda\left[x(\Delta)\int_0^\Delta F_2(\xi)d\xi - y(\Delta)\int_0^\Delta F_1(\xi)d\xi\right]$$
$$-\lambda\int_0^\Delta (x(s)F_2(s) - y(s)F_1(s))\,ds$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta}F(\Delta) = \eta_1(\Delta)F'(0) - \eta_2(\Delta)F_\eta(0) + \lambda\left[\eta_1(\Delta)\int_0^\Delta F_2(\xi)d\xi - \eta_2(\Delta)\int_0^\Delta F_1(\xi)d\xi\right].$$

$F(0)$, $F'(0)$, $F_\eta(0)$ son constantes de integración arbitrarias. Las tomaremos iguales a cero, (ya que F satisface una ecuación diferencial de 4to orden con condiciones de frontera de 2do orden) y definimos:

$$\mathfrak{F}_i(\Delta) = \int_0^\Delta F_i(s)\,ds \quad , \quad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix}\mathfrak{F}_1\\ \mathfrak{F}_2\end{pmatrix} \quad , \quad F_\Omega = \begin{pmatrix}F_1\\ F_2\end{pmatrix} = \text{fuerza total}$$

$x = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$F(\Delta) = \lambda\varphi \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial\eta}(\Delta) = \lambda P$$

donde

$$\varphi = \left(x\wedge\mathfrak{F} - \int_0^\Delta x\wedge F_2\right)$$
$$P = (\eta\wedge\mathfrak{F})$$

tendremos que resolver el problema:

$$\Delta^2 F = -6(1-\sigma^2)\,[w,w] \qquad F\big|_{\partial\omega} = \lambda\varphi$$
$$\Delta^2 w = [F,w] + \tilde{f} \qquad \frac{\partial F}{\partial\eta}\Big|_{\partial\omega} = \lambda P$$

$$\left.\begin{matrix} w = g_1 \\ \frac{\partial w}{\partial\eta} = h_1\end{matrix}\right. \text{ en } \Gamma_1 \;,\; \left.\begin{matrix} w = g_2 \\ M(w) = G_n\end{matrix}\right. \text{ en } \Gamma_2 \;,\; \left.\begin{matrix} M(w) = G_n \\ N(w) - \lambda(f w_\eta + g w_t) = H\end{matrix}\right. \text{ en } \Gamma_3$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = h_4$$

$$N(w) - \lambda(f w_n + g w_T) = H \qquad \text{en } \Gamma_4$$

Haremos una última tranformación reduciéndonos al problema de frontera homogéneo.

Sean ψ_0 tal que $\psi_0|_{\partial\omega} = \varphi$, $\frac{\partial \psi_0}{\partial n} = P$

y w_0 tal que w_0 satisfaga todas las condiciones de frontera.

Esto es posible si P, φ y los otros datos de frontera son suficientemente regulares para poder aplicar lo teoremas de trazas y obtener así unas funciones ψ_0, w_0 en $H^4(\omega)$. (Esto implica $\varphi \in H^{7/2}(\partial\omega)$, $P \in H^{5/2}(\partial\omega)$).

Veremos en el siguiente capítulo como encontrar las funciones ψ_0, w_0. (hay una pequeña diferencia en el término $N(w) - \lambda(f w_n + g w_T)$ que aparece aquí y el caso tratado en el siguiente capítulo donde no está presente $\lambda(f w_n + g w_T)$ pero como este término envuelve derivadas de orden mas bajo el razonamiento es el mismo).

Definiendo $F = \psi_1 + \lambda\psi_0$, $w = w_1 + w_0$, tenemos:

$$\Delta^2 \psi_1 = -\lambda \Delta^2 \psi_0 - 6(1-\sigma^2)([w_0, w_0]) - 12(1-\sigma^2)[w_0, w_1] - 6(1-\sigma^2)[w_1, w_1]$$

$$\Delta_2 w_1 = \tilde{f} - \Delta^2 w_0 + \lambda[\psi_0, w_0] + \lambda[\psi_0, w_1] + [w_0, w_1] + [\psi_1, w_1]$$

con datos de frontera homogéneos.

El siguiente paso sería encontrar (ψ_2, w_2) tales que:

$$\Delta^2 \varphi_2 = -\lambda \Delta^2 \varphi_0 - 6(1-\sigma^2)[w_0,w_0] - 12(1-\sigma^2)[w_0,w_2] - 6(1-\sigma^2)[w_2,w_2]$$

$$\Delta^2 w_2 = \tilde{f} - \Delta^2 w_0 + \lambda[\varphi_0,w_0] + \lambda[\varphi_0,w_2] + [w_0,w_2]$$

con datos de frontera homogeneos.

La segunda ecuación de tipo elíptico, depende unicamente de w_2 y de funciones conocidas y se puede escribir:

$$\Delta^2 w_2 - \lambda[\varphi_0, w_2] - [w_0, w_2] = b(\lambda)$$

con las condiciones ya mencionadas.

Este es un problema elíptico que es soluble si y solo si $b(\lambda)$ es ortogonal al kernel del operador $\Delta^2 - \lambda[\varphi_0,\cdot] - [w_0,\cdot]$ con las condiciones de frontera homogeneas. Notemos que este es un problema de valores propios tanto en la ecuación como en las condiciones de frontera (por el término $\lambda(f w_n + g w_T)$), problema de Steklov, el cual es teoricamente soluble pero fuera de nuestro análisis.

Teniendo una solución a la 2da ecuación la 1era ecuación se vuelve

$$\Delta^2 \varphi_2 = \frac{a}{\lambda} \quad . \quad \varphi_2|_{\partial\omega} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\Big|_{\partial\omega} = 0 \qquad (\lambda \neq 0)$$

Veremos en el siguiente capítulo que este problema tiene una única solución φ_2.

Entonces poniendo

$$\varphi_1 = \lambda \varphi_2 + \varphi \quad \Rightarrow \quad \lambda(\varphi_0 + \varphi_2) + \varphi = F$$

$$w_1 = w_2 + w_3 \quad \Rightarrow \quad w = (w_0 + w_2) + w_3$$

tenemos:

$$\Delta^2 \psi = -12(1-\sigma^2)[w_0, w_3] - 12(1-\sigma^2)[w_2, w_3] - 6(1-\sigma^2)[w_3, w_3]$$

$$\Delta^2 w_3 = \lambda[\psi_0, w_3] + [w_0, w_3] + \lambda[\psi_2, w_2] + \lambda[\psi_2, w_3] + [\psi, w_2] + [\psi, w_3]$$

$$\Delta^2 w_3 = \lambda[\psi_2, w_2] + \lambda[\psi_0 + \psi_2, w_3] + [w_0, w_3] + [\psi, w_2] + [\psi, w_3]$$

Esta última versión está otra vez fuera del alcance de nestro análisis. Haremos por lo tanto las siguientes hipótesis:

1) $g_1 = h_1 = g_2 = h_4 = 0$, la placa está fija en Γ_1, soportada en Γ_2, con ángulo fijo en Γ_4.

2) $G_n = H = 0$, la torsión en $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 = 0$, la fuerza vertical sobre $\partial\omega \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ igual a cero en Γ_3 y Γ_4.

3) $\tilde{f} = f + g_+ - g_- = 0$ el total de las fuerzas verticales del cuerpo y de tapas es cero.

$\therefore$ De 1) y 2) podemos tomar $w_0 \equiv 0$, de 3) podemos tomar $w_2 = 0$.

Definimos $w = \sqrt{6(1-\sigma^2)}\, w_3$, $F_0 = \psi_0 + \psi_2$.

$\therefore$ el problema se reduce a:

$$\Delta^2 \psi = -[w, w]$$

$$\Delta^2 w = \lambda[\psi_0 + \psi_2, w] + [\psi, w]$$

$$\psi = \psi_n = 0 \quad \text{en } \partial\omega$$

$$w = w_n = 0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$w = M(w) = 0 \quad \text{en } \Gamma_2$$

$$M(w) = N(w) - \lambda(f w_n + g w_\tau) = 0 \quad \text{en } \Gamma_3$$

$$w_n = N(w) - \lambda(f w_n + g w_\tau) = 0 \quad \text{en } \Gamma_4.$$

Veremos cual es el comportamiento esperado de estas

ECUACIONES:

Notemos primero que $\forall\lambda$, $\varphi = w = 0$ es solución del problema: esto quiere decir que un movimiento plano, $F = \lambda F_0$ siempre es solución. Desde luego ésta será la solución físicamente aceptable si es la única. Pero experimentalmente si $\lambda > \lambda_0$ la solución del problema es con $w \neq 0$. Es decir debemos esperar un valor de λ para el cual las ecuaciones de la página anterior tengan una solución no trivial.

Buscamos los valores de λ para los cuales esto pueda suceder: para ello notamos que la 1era ecuación, para φ, es pasiva: los esfuerzos horizontales adicionales están forzados por w, (esto no sucede para datos de frontera no homogéneos) w es entonces la cantidad importante.

Invirtiendo formalmente φ en función de w (esto se puede hacer rigurosamente y lo haremos en el siguiente capítulo.)

$$\varphi = -G([w,w])$$

donde G es el operador cuyo nucleo es la función de Green del biarmónico con condiciones de frontera $\varphi = \varphi_n = 0$ en Γ, obtenemos:

$$\Delta^2 w = \lambda [F_0, w] + [G([w,w]), w]$$

con las condiciones de frontera usuales.

Esta es una ecuación funcional para w en términos de λ. Como sabemos que $w=0$ es solución para toda λ, podemos plantear el problema de encontrar 1ro una solución con w pequeño. Ahora si el operador

$$\Delta^2 - \lambda[F_0, \cdot]$$

es invertible (con las condiciones de frontera dadas) podemos escribir la ecuación como:

$$w = (\Delta^2 - \lambda[F_0,\cdot])^{-1}[G([w,w]), w]$$

y como el término a la derecha es cúbico, tomando normas tendríamos:

$$\|w\| \leq K\|w\|^3,$$

es decir $\|w\|^2 \geq \frac{1}{K}$ si $\|w\| \neq 0$.

Si $\Delta^2 - \lambda_0[F_0,\cdot]$ es invertible $w=0$ es una solución aislada. En el caso que $\Delta^2 - \lambda_0[F_0,\cdot]$ no sea invertible es de esperarse que la solución $w=0$ no sea la única, es decir que en una vecindad de $(0,\lambda_0)$ tendremos soluciones con w de norma pequeña: Esto dice que $(0,\lambda_0)$ es un punto de bifurcación, y λ_0 es la carga de flexión.

Ahora, para determinar si $\Delta^2 - \lambda[F_0,\cdot]$ es invertible o no necesitamos hacer el análisis espectral de este operador con las condiciones de frontera dadas. Como el problema original es un problema variacional es natural tratar de usar la formulación débil del problema. Para eso se define una "energía" asociada al operador biharmónico y ver si con respecto a esa energía el problema

$$\Delta^2 - \lambda[F_0,\cdot]$$

es autoadjunto.

Ahora bien la forma cuadrática asociada a Δ^2 tiene como condiciones de frontera, como lo vimos al derivar la energía de flexión, las mismas que tenemos aquí excepto por el término $\lambda(f w_\eta + g w_\tau)$ y veremos que como condición suficiente, y casi necesaria, para que $[F_0, \cdot]$ sea autoadjunto con respecto a la energía de flexión es que

$$F_{0\eta\tau} = F_{0\tau\tau} = 0 \quad \text{en } \Gamma_3 \quad , \quad F_{0\eta\tau} = 0 \quad \text{en } \Gamma_4 .$$

es decir que (como $w_\eta = 0$, $\lambda f = -F_{0\tau\tau}$, $\lambda g = F_{0\eta\tau}$ derivando las expresiones que obtuvimos para P y Q y la la definición de F_0)

$$\lambda(f w_\eta + g w_\tau) = 0 \quad \text{en } \Gamma_3 \text{ y } \Gamma_4 .$$

las fuerzas de compresión y de tracción son cero sobre las partes de $\partial\omega$ que son libres.

Evidentemente estas condiciones no son necesarias para el estudio del espectro, pero entonces debíamos estudiar el problema en forma fuerte, lo cual es más complicado. (Se podía también argumentar que f y g son pequeños y que por lo tanto para w pequeño $f w_\eta + g w_\tau$ es de orden más bajo que $N(w)$, lo cual no es satisfactorio al menos que consideráramos únicamente el problema lineal sin energía de estiramiento y el estudio completo debería hacer intervenir ese término.

Estudiaremos pues la famosas ecuaciones de Von-Kármán:

$$\Delta^2 \psi = -[w,w] \qquad \psi = \psi_n = 0$$

$$\Delta^2 w = \lambda [F_0, w] + [\psi, w]$$

$w = w_n = 0$ en Γ_1 $\qquad$ $w = M(w) = 0$ en Γ_2

$M(w) = N(w) = 0$ en Γ_3 $\qquad$ $w_n = N(w) = 0$ en Γ_4

Probaremos que siempre existen soluciones de norma pequeña para (w, λ) cerca de $(0, \lambda_n)$, λ_n punto crítico del operador, (de hecho $\lambda \geq \lambda_n$ si $F_0 = F_{0n} = 0$ en Γ_4 entonces $F_{TT} = F'' - KF' = 0 = -\lambda f$ $F_n' + KF' = 0 = \lambda g$, como ya hemos visto: $f = g = 0 \Rightarrow F_1 = F_2 = 0$ en $\Gamma_4 \Rightarrow$ por las formulas que obtuvimos para F y F_n: $F_0 = F_{0n} = 0$ en Γ_4 tomando el origen en $\Gamma_4 \Rightarrow$ además de la condición $F_{0nT} = 0$ en Γ_4 otra nueva $F_{0TT} = 0$, i.e. $f = g = 0$ en $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Esto debe tomarse con cuidado ya que $\lambda_n \sim O(n^2)$, como para todo operador elíptico, para n grande y como $\lambda \in O(1)$ los puntos de Bifurcación para n grande no tienen mucha relevancia física. Por otra parte ψ y w son también $O(1)$ en las variables escaladas, por lo tanto los resultados globales (no solamente para w muy pequeña) son de gran utilidad.

ESTUDIO DE LOS CASOS MIXTOS EN EL OPERADOR BIHARMONICO

CONSIDEREMOS el problema DE ENCONTRAR UNA función $v(x,y)$ .t.

$$\Delta^2 v = f \quad \text{en } \omega$$

$$1)\ \begin{matrix} v = g_1 \\ v_n = h_1 \end{matrix} \ \text{en } \Gamma_1 \qquad 2)\ \begin{matrix} v = g_2 \\ Mv = h_2 \end{matrix} \ \text{en } \Gamma_2 \qquad \ldots (6)$$

$$3)\ \begin{matrix} Mv = g_3 \\ Nv = h_3 \end{matrix} \ \text{en } \Gamma_3 \qquad 4)\ \begin{matrix} v_n = g_4 \\ Nv = h_4 \end{matrix} \ \text{en } \Gamma_4$$

DONDE $Mv = \sigma \Delta v + (1-\sigma) v_{nn}$

$$Nv = -\frac{\partial}{\partial n} \Delta v + (1-\sigma) \frac{\partial}{\partial s} v_{nT},$$

($v_n = \nabla v \cdot n$ $\qquad n = (n_1, n_2)$

$v_t = \nabla v \cdot t$ $\qquad t = (-n_2, n_1)$

SON LAS DERIVADAS DE v EN LA DIRECCIÓN NORMAL y TANGENCIAL RESPECTIVAMENTE, $\frac{\partial}{\partial s}$ ES LA DERIVADA RESPECTO A LA longitud DE ARCO.)

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\omega = \Gamma,$$

$\partial\omega$ ES C^∞ y ω ES simplemente CONEXO y ACOTADO en $\mathbb{R}^2$. f, g_i, h_i $i=1,2,3,4$ SON funciones DADAS.

Nos interesa estudiar este problema ya que en las ecuaciones de Von-Kármán que se dedujeron en la sección anterior, aparece el operador biharmónico Δ^2. Nos ocuparemos de estudiar el inverso de este operador y después aplicaremos estos resultados al caso no lineal que nos interesa, i.e. a las ecuaciones de Von-Kármán.

El problema lineal (6) lo obtenemos al "extremizar" la energía de flexión y despreciar la energía que llamamos de extensión. Físicamente se interpreta a $v(x,y)$ como el movimiento en la dirección vertical que sufre el plano medio de una placa que ocupa un área $\omega \subset \mathbb{R}^2$ y tiene el desplazamiento prescrito y también el ángulo que forma con el plano xy en Γ_1. En Γ_2 la placa también tiene el desplazamiento prescrito y además le estamos aplicando una fuerza de flexión Mv. En Γ_3 nuestra placa sufre una fuerza de flexión y además una fuerza de cortante Nv. En Γ_4 el ángulo está dado pero la placa tiene libertad para moverse en la dirección vertical en la cual sufre una fuerza $Nv = h_4$. (ver [10] pag. 50, [11] pag. 462, [18] pag. 83 y 87).

Haremos primero una formulación débil del problema multiplicando a ambos lados de la igualdad por una función $v \in V \subset W_2^2(\omega)$, (donde V es un espacio apropiado cuya definición se dará en el curso del argumento) así:

$$(\Delta^2 v, v) = (f, v)$$

Procederemos a integrar dos veces por partes el miembro izquierdo. Tenemos así:

$$\int_\omega v\Delta^2 v = \int_\omega v\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left((1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right]$$

nótese que aquí hemos reescrito el operador bihármonico introduciendo la llamada constante de Poisson σ, $(0 \leq \sigma < 1)$.

Sea,

$$A(v,v) = \int_\omega \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)$$

$$B(v,v) = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\eta_1 - \int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2$$

$$-\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)\eta_2 - \int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1$$

$$C(v,v) = \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)\eta_1 + \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial x_2}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_1$$

$$+ \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \sigma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1}\right)\eta_2 + \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial x_1}(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\eta_2$$

entonces

$$\int_\omega v\Delta^2 v = A(v,v) + \underbrace{B(v,v) + C(v,v)}.$$

Utilizando las formulas

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_1 - \frac{\partial}{\partial s}\eta_2 \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial \eta}\eta_2 + \frac{\partial}{\partial s}\eta_1$$

podemos reescribir a $B(v,v)$ así:

$$B(v,v) = -\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial \eta}\left[\sigma\Delta v + (1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\right]$$

$$-\int_{\partial\omega} \frac{\partial v}{\partial s}\left[(1-\sigma)\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\,\partial T}\right]$$

también para $C(v,v)$ tenemos

$$C(v,v) = \int_{\partial\omega} v\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta v)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\Delta v)\eta_2\right]$$

$$= \int_{\partial\omega} v\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta v.$$

Ahora haciendo la siguiente integración por partes, (donde $\partial\omega$ está parametrizada por longitud de arco $s\in[0,\ell]$)

$$-\int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial s}(1-\sigma)v_{\eta T} = -(1-\sigma)v_{\eta t}\Big|_0^\ell + \int_0^\ell v(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta t}$$

$$= \int_{\partial\omega} v(1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta T}$$

tenemos que

$$\int_\omega v\Delta^2 v = A(v,v) - \int_{\partial\omega} v\underbrace{\left[-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta v - (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}v_{\eta T}\right]}_{Nv} + \int_{\partial\omega}\frac{\partial v}{\partial \eta}\underbrace{\left[\sigma\Delta v + (1-\sigma)v_{\eta\eta}\right]}_{Mv}$$

$= (f, v)$

$\therefore$ tenemos

$$A(v,v)=\int_\omega fv+\int_\Gamma vNv\,ds+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}Mv\,ds \quad \ldots (7)$$

Ahora para hacer la formulación débil de las condiciones de frontera tomamos una función $w \in W_2^2$ .t. $w=g_1$, $w_\eta=h_1$ en Γ_1, $w=g_2$ en Γ_2, $w_\eta=g_4$ en Γ_4, w es cualquier función en Γ_3 y Γ_4 y w_η es cualquier función en Γ_2, Γ_3 en el sentido de trazas.

Pediremos que $v-w \in V \subset W_2^2 = H^2$ donde

$$V=\left\{v\in W_2^2 \;\middle|\; \begin{matrix} v=0 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta}=0 \end{matrix} \text{ en } \Gamma_1,\ v=0 \text{ en } \Gamma_2,\ \frac{\partial v}{\partial \eta}=0 \text{ en } \Gamma_4\right\}$$

Hasta aquí hemos tenido en cuenta solamente las condiciones de frontera llamadas "estables". Se les llama así debido al hecho de que al tomar una sucesión $v_n \in W_2^2$ de forma que todas las funciones de la sucesión satisfagan estas condiciones en el sentido de trazas y tal que $v_n \xrightarrow{W_2^2} v$, entonces sucede que la función límite v también satisface estas condiciones de frontera, así V resulta ser un conjunto cerrado y con el producto punto que hereda de W_2^2, V es un espacio de Hilbert.

En general para un operador elíptico de orden $2k$ las condiciones estables son aquellas que contienen derivadas a lo más de orden $k-1$. (ver [17], pag 356) y ∴ necesitamos que las funciones g_1 y g_2 sean tales que $w \in H^{3/2}(\partial\omega)$ y que h_1 y g_4 sean tales que $\frac{\partial w}{\partial \eta} \in H^{1/2}(\partial\omega)$, lo cual implica cierta regularidad en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_4$ y $\Gamma_1 \cap \Gamma_4$. (Por ejemplo necesitamos que g_1 y g_2 y sus derivadas coincidan en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$).

Ahora para tener en cuenta las condiciones de frontera no estables, no hacemos más que sustituir los valores de M y N en (7) obteniendo

$$A(v,v) = N' + M' + \int_\omega f v \quad \ldots\ldots (8)$$

donde $N'_v = \int_{\Gamma_3} v\, h_3\, ds + \int_{\Gamma_4} v\, h_4\, ds$

$$M'_v = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2\, ds + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3\, ds$$

Así damos la siguiente

<u>Definición</u> 1 Una función $v \in W_2^2$ es solución débil al problema (6) $\Longleftrightarrow$ $v - w \in V$ y además

$$A(v,v) = N' + M' + \int_\omega f v \quad \forall v \in V \subset W_2^2.$$

Para ver que esta definición es razonable tomemos $v \in H^4$ solución débil, con $w \in H^4$ y veamos que v resulta ser solución clásica. El converso es obvio.

Si usamos el teorema de Green inversamente en $A(v,v)$ obtenemos

$$A(v,v)=\int_\omega v\,\Delta^2 v+\int_\Gamma v\,Nv+\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv,$$

como $v\in V$ las integrales de frontera las podemos escribir

$$\int_{\Gamma_3\cup\Gamma_4} v\,Nv+\int_{\Gamma_2\cup\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv.$$

Si sustituimos esto en (8) tenemos la igualdad

$$\int_\omega v\,\Delta^2 v+\int_{\Gamma_3} v\,Nv+\int_{\Gamma_4} v\,Nv+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv=$$

$$\int_\omega f v+\int_{\Gamma_3} v\,h_3+\int_{\Gamma_4} v\,h_4+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,h_2+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,g_3 \qquad \forall v\in V$$

Si tomamos $v=\varphi\in C_0^\infty\subset V$ tendremos

$$\int_\omega \varphi\,\Delta^2 v=\int_\omega f\varphi \implies \int_\omega(\Delta^2 v-f)\,\varphi=0.$$

Como C_0^∞ es denso en L^2 tenemos $\Delta^2 v=f$ en el sentido de L^2. Esto implica que

$$\int_\omega v\,\Delta^2 v=\int_\omega f v \qquad \forall v\in V$$

$\therefore$ tenemos la igualdad

$$\int_{\Gamma_3} v\,Nv+\int_{\Gamma_4} v\,Nv+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,Mv=$$

$$\int_{\Gamma_3} v\,h_3+\int_{\Gamma_4} v\,h_4+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,h_2+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial v}{\partial \eta}\,g_3 \qquad \forall v\in V$$

Ahora demos una función $\varphi:\partial\omega\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$\varphi(s)=\begin{cases}\varphi_1\in C_0^\infty(\Gamma_\ell),\ \varphi_1\neq 0 & \text{en } \Gamma_\ell\\ 0 & \text{en } \partial\omega-\Gamma_\ell\end{cases} \qquad \ell=3 \text{ ó } 4$$

Por el teorema de trazas podemos encontrar una función $\tilde{v} \in W_2^2$ .t. $\gamma(\tilde{v}) = \varphi(s)$, ($\gamma$ es el operador de traza ver [1] pag. 214) y $\gamma\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right) = 0$. (De hecho $\tilde{v} \in V$); sustituyendo esta $\tilde{v}$ en la igualdad obtenemos

$$\int_{\Gamma_\ell} \varphi_1(s)\, N v = \int_{\Gamma_\ell} \varphi_1(s)\, h_\ell$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_\ell)$ es denso en $L^2(\Gamma_\ell)$ tenemos que

$$\int_{\Gamma_\ell} \varphi_1 (Nv - h_\ell) = 0 \Rightarrow Nv = h_\ell$$

en el sentido $L^2(\partial\omega)$. Esto nos implica que

$$\int_{\Gamma_\ell} v N v = \int_{\Gamma_\ell} v\, h_\ell \qquad \forall v \in V \qquad \ell = 3, 4$$

$\therefore$ la igualdad se reduce a

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} M v = \int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2 + \int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3$$

Por un momento y unicamente por comodidad de notación pongamos $g_3 = h_3$.

Análogamente a lo que ya hicimos demos una función $\bar{\varphi} : \partial\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\bar{\varphi}(s) = \begin{cases} \varphi \in C_0^\infty(\Gamma_k), & \varphi \neq 0 \text{ en } \Gamma_k \\ 0 & \text{en } \Gamma \setminus \Gamma_k \end{cases} \qquad k = 2 \text{ ó } 3$$

Por el teorema de trazas podemos dar $\bar{v} \in V$ .t. $\gamma\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta}\right) = \bar{\varphi}(s)$. Sustituyendo en la igualdad obtenemos

$$\int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} M v = \int_{\Gamma_k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \eta} h_k$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_k)$ es denso en $L^2(\Gamma_k)$ tenemos $Mv = h_k$ en Γ_k.

Una vez que ya vimos que nuestra definición de solución débil coincide con la solución clásica para funciones suficientemente regulares procedamos a buscar esta solución débil. Para esto escribamos $v = v - w + w$, $u = v - w \in V$ y $\therefore$ queda

$$A(u,v) = N_v' + M_v' - A(w,v) + \int_\omega f v = l(v) \quad \ldots\ldots (9)$$

Ahora veremos que el lado izquierdo de la igualdad es un producto escalar que genera una norma equivalente a la norma en W_2^2 y que el lado derecho es un funcional lineal continuo con respecto a la norma W_2^2 y $\therefore$ con respecto a la norma generada por $A(u,v)$. $\therefore$ aplicando el teorema de Riez (ver [15], pag. 43 teo. II.4) y teniendo en cuenta que V es un espacio de Hilbert tendremos que $\exists!\ u \in V$.+. la igualdad se cumple. De hecho u es tal que da el mínimo de $\|v\|_A^2 - 2\,l(v)$. (donde $\|v\|_A^2 = A(v,v)$) (ver [17] pag. 403 teo 34.2, [13] cap. I)

Para esto demostraremos primero un lema.

Notación: $\langle \ldots \rangle$ denota espacio generado por...

$m\Gamma_i$: denota medida de Γ_i.

LEMA 2 $\exists\ C > 0$.+. $A(u,u) \geq C\,\|u\|^2_{W_2^2}$ si y solo si tenemos uno de los siguientes casos

1) $m\Gamma_1 \neq 0 \qquad v \in \Omega_1 = V$.

ó 2) $m\Gamma_1 = 0$ y $m\Gamma_2 \neq 0$, Γ_2 no es una recta, $v \in \Omega_2 = V$.

ó 3) $m\Gamma_1 = 0$, $m\Gamma_2 \neq 0$ y $m\Gamma_4 \neq 0$, Γ_2 es una recta y Γ_4 no es una o varias rectas ortogonales a Γ_2, $v \in \Omega_3 = V$.

ó 4) $m\Gamma_1 = 0$, $m\Gamma_2 \neq 0$, Γ_2 es una recta y Γ_4 es una ó varias rectas perpendiculares a Γ_2, $v \in \Omega_4 = V \cap M_4^{\perp L^2}$ $M_4 = \langle v_0 \rangle$, $v_0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ .t. $v_0 = 0$ es la ecuación de Γ_2.

ó 5) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = 0$, Γ_4 no es una o varias rectas paralelas, $v \in \Omega_5 = V \cap M_5^{\perp L^2}$, $M_5 = \langle ctes \rangle$, $m\Gamma_4 \neq 0$

ó 6) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = 0$, $m\Gamma_4 \neq 0$ y $\Gamma_4 \subset \{a_i + \bar{b}x + \bar{c}y = 0\}$ y $v \in \Omega_6 = V \cap M_6^{\perp L^2}$, $M_6 = \langle 1, \bar{c}x - \bar{b}y \rangle$

ó 7) $m\Gamma_1 = m\Gamma_2 = m\Gamma_4 = 0$, $v \in \Omega_7 = V \cap M_7^{\perp L_2}$, $M_7 = \langle 1, x, y \rangle$

<u>Demostración</u> Como podemos escribir

$$A(v,v) = \sigma \int_\omega (\Delta v)^2 + (1-\sigma) \int_\omega \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

se tiene que

$$A(v,v) \geq (1-\sigma) \sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)} \qquad \forall v \in V$$

$\therefore$ debemos demostrar que : (Para notación de D^α ver apéndice)

$$\sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)} \geq K \|v\|^2$$

para tener demostrado el lema. Para esto sumamos a $\sum_{|\alpha|=2} \| D^\alpha v \|^2_{L^2(\omega)}$ términos adecuados de manera que en cada caso particular se anulen, pero que nos permitan demostrar la desigualdad deseada.

Así pues tratemos de probar que

$$\|u\|^2_{W_2^2} \leq C\Big(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u)\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)}\Big) \quad \begin{matrix} i=0,1,2 \\ j=0,1,4 \end{matrix} \quad \ldots (10)$$

Cuando los índices toman el valor cero entenderemos que no aparece el término.

Ahora veremos que el suponer falsa esta desigualdad implica que $u = a + bx + cy$ y que

$$\gamma(u) = 0 \quad \text{en } \Gamma_i$$

$$\gamma\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0 \quad \text{en } \Gamma_j$$

y esto en cada caso particular nos llevará a una contradicción junto con la hipótesis $\|u\| \neq 0$.

Para hacer la negación supongamos que $\exists \{u_n'\}$ t.q.

$$\forall n \quad \|u_n'\|^2_{W_2^2} > n\Big(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u_n'\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u_n')\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u_n'}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)}\Big)$$

Dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\|u_n'\|^2_{W_2^2}$ vemos que podemos considerar una sucesión $\{u_n\}$ con $\|u_n\|_{W_2^2} = 1$ y por lo tanto tenemos que

$$1 > n\Big(\sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha u_n\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(u_n)\|^2_{L^2(\Gamma_i)} + \|\gamma(\tfrac{\partial u_n}{\partial n})\|^2_{L^2(\Gamma_j)}\Big) \ldots (11)$$

Como $\forall n$, $\|u_n\|_{W_2^2} = 1$ por lema 2' apéndice sabemos que $\exists \{u_{n_\ell}\}$ subsucesión t.q. $u_{n_\ell} \longrightarrow u$ en W_2^2.

Observemos que si sustituimos u_{n_ℓ} en (11) y hacemos variar n_ℓ para que (11) siga siendo válida necesitamos que

$$\|D^\alpha u_{n_\ell}\|_{L^2(\omega)} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0 \qquad \text{con } |\alpha| = 2$$

$$\|\gamma(u_{n_\ell})\|_{L^2(\Gamma_i)} \xrightarrow{\ell \to \infty} 0$$

$$\left\|\gamma\left(\frac{\partial U_{n_\ell}}{\partial \eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_j)} \xrightarrow{\ell\to\infty} 0$$

Ahora usaremos la subsucesión $\{U_{n_\ell}\}$ de dos maneras.

Primero notamos que $U_{n_\ell} \to U$ en $W_2^2 \Rightarrow D^\alpha U_{n_\ell} \to D^\alpha U$ en $L^2(\omega)$, $|\alpha| = 2$, y por el lema 3' del Apéndice y el hecho de que $\|D^\alpha U_{n_\ell}\| \to 0$ se sigue que $\|D^\alpha U\| = 0$ y $\therefore$ U es un polinomio de grado ≤ 1.

Segundo, notemos que $U_{n_\ell} \to U$ en $W_2^2 \Rightarrow U_{n_\ell} \to U$ en W_2^1 debido a la compacidad del encaje $W_2^2 \hookrightarrow W_2^1$ (ver [1] pag. 144 y [9] pag. 33). Esto, el teorema de trazas (ver [1] pag 216, teo. 7.53) y el hecho de que $\|\gamma(U_{n_\ell})\| \to 0$, $\|\gamma(\frac{\partial U_{n_\ell}}{\partial \eta})\| \to 0$ implican que

$$\gamma(U) = 0 \quad \text{en } \Gamma_i$$
$$\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right) = 0 \quad \text{en } \Gamma_j.$$

Así si la desigualdad (10) fuera falsa tendríamos $U \in W_2^2$, $\|U\|_{W_2^2} = 1$, U polinomio de grado ≤ 1 y $\gamma(U) = 0$ en Γ_i, $\gamma(\frac{\partial U}{\partial \eta}) = 0$ en Γ_j.

Ahora en el caso 1) pongamos $i=1$, $j=1$. Entonces

$U = a + bx + cy = 0$ en $\Gamma_1 \Rightarrow (b,c) \parallel (\eta_1, \eta_2)$

$\frac{\partial U}{\partial \eta} = U_x\eta_1 + U_y\eta_2 = b\eta_1 + c\eta_2 = 0$ en $\Gamma_1 \Rightarrow (b,c) \perp (\eta_1,\eta_2)$

((η_1,η_2) es la normal a Γ_1), $\therefore$ $b = c = 0$, $\therefore$ $u = a = 0$

$\therefore$ $U \equiv 0$ en ω pero $\|U\|_{W_2^2} = 1$ ♀. Así la desigualdad (10) con $i=j=1$ es cierta en este caso y $\therefore$

$$A(v,v) \geq (1-\sigma)\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|^2_{L^2(\omega)} = (1-\sigma)\left(\sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha v\|^2_{L^2(\omega)} + \|\gamma(v)\|_{L^2(\Gamma_1)} + \left\|\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)\right\|_{L^2(\Gamma_j)}\right)$$

ya que todos los términos que agregamos son nulos lo anterior es mayor o igual que

$$\frac{(1-\delta)}{C}\|u\|^2_{W_2^2}.$$

En el caso 2) tomemos $i=2$, $j=0$ en (10). Si (10) es falsa esto nos implica que $\Gamma_2 \subset \{(x,y) \mid a+bx+cy=0\}$ pero por hipótesis Γ_2 no es recta ↯

En el caso 3) tomemos $i=2$, $j=4$ tendremos análogamente a lo anterior que

$\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$ en $\Gamma_4 \Rightarrow u_x\eta_1+u_y\eta_2=b\eta_1+c\eta_2=0$

$\Rightarrow (b,c)\perp(\eta_1,\eta_2)$, $u=a+bx+cy$, (η_1,η_2) es la normal a Γ_4.

También $\Gamma_2\subset\{(x,y)\mid a+bx+cy=0$, recta de normal $(b,c)\}$ $\therefore$ (b,c) es la normal de Γ_2. Habíamos supuesto que Γ_4 no podía ser perpendicular a Γ_2 $\therefore$ $b=c=0$ $\therefore$ $u=a=0$ ↯ ya que $\|u\|_{W_2^2}=1$

En el caso 4) tomemos $i=2$, $j=0$ en (10). Si (10) fuera falsa tendríamos $u=a+bx+cy$ y $u=0$ en Γ_2 $\therefore$ $u=ku_0$ pero por hipotesis $(u,u_0)=0 \Rightarrow (ku_0,u_0)=0 \Rightarrow k=0$ $\therefore$ $u\equiv 0$ ↯

En el caso 5) dando $i=0$, $j=4$ tenemos $u=a+bx+cy$ y $\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$ en Γ_4, i.e. $\frac{\partial u}{\partial \eta}=b\eta_1+c\eta_2=0$ donde $\eta=(\eta_1,\eta_2)$ es la normal a Γ_4 y como Γ_4 no es una recta el vector η no es constante y $\therefore$ $b=c=0$, $\therefore$ $u=a$ ↯.

En el caso 6) $u = a + bx + cy$ y $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en Γ_4 i.e. $b\bar{b} + c\bar{c} = 0 \Rightarrow b = k\bar{c}$, $c = -k\bar{b}$ para alguna $k \neq 0$ $\therefore u = a + k(\bar{c}x - \bar{b}y)$ ⚡ ya que $u \perp \langle 1, \bar{c}x - \bar{b}y \rangle$ y $\|u\| = 1$

En el caso 7) Demos $i = j = 0$, u es un polinomio de grado ≤ 1 ⚡ ya que $u \perp \langle 1, x, y \rangle$ y $\|u\| = 1$.

Q.E.D.

La simetría de $A(\cdot,\cdot)$ es fácil de probar, al igual que la linealidad. Esto junto con el lema que acabamos de probar implican que $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en los subespacios $\Omega_r \subset V$. (Ω_r corresponde al caso r, $r = 1, \ldots, 7$). Para ver que $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar equivalente al producto en W_2^2 observemos que:

$$A(u,u) = \sigma \int_\omega (\Delta u)^2 + (1-\sigma) \int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

Ahora como

$$(1-\sigma)\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 \leq 2(1-\sigma)\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$$

$$\leq 2(1-\sigma)\|u\|^2_{W_2^2}.$$

Además como

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \leq \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2$$

tenemos que:

$$\sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 = \sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

$$\leq 2\sigma\int_\omega \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2 \leq 2\sigma\,\|u\|^2_{W_2^2}.$$

$\therefore$

$$A(u,u) \leq 2(1-\sigma)\,\|u\|_{W_2^2} + 2\sigma\,\|u\|_{W_2^2} = 2\,\|u\|^2_{W_2^2}$$

Esto junto con el lema nos dan que

$$C\,\|u\|_{W_2^2} \leq A(u,u)^{1/2} \leq 2\,\|u\|_{W_2^2} \qquad \forall u\in\Omega_r$$

y $\therefore$ $A(\cdot,\cdot)$ es un producto escalar en Ω_r equivalente al producto escalar en W_2^2.

Para aplicar el teorema de Riez probaremos que Ω_r es cerrado, (en los casos $r=1,2,3$ es inmediato porque V es cerrado) y que $\ell(\cdot)$ (ver (9)) es continuo.

Restringiremos $\ell(\cdot)$ a Ω_r, después daremos una interpretación física de esto.

Para ver que Ω_r es cerrado $(r=4,\dots,7)$, consideremos $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega_r$ que converge a $u\in V$, esta sucesión también converge a u en la norma de L^2. Para $v_r\in M_r$ $r=4,\dots,7$ (ver el lema 2) se tiene

$$0=\int_\omega v_r u_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_\omega v_r u.$$

$\therefore$ $u\in M_r^\perp$ y como $u\in V$, $u\in V\cap M_r^\perp=\Omega_r$

$\therefore$ Ω_r es cerrado en W_2^2.

Ahora demostremos que

$$\ell : V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto N'v + M'v - A(w,v) + \int_\omega f v$$

es continuo. Supondremos $f \in L^1(\omega)$, $h_3, h_4 \in L^1(\Gamma_3, \Gamma_4)$ $h_2, g_3 \in L^2(\omega)$.

1) $$|A(w,v)| \leq K \int_\omega |D^\alpha w| \, |D^\beta v|$$
$$\leq K \left(\int_\omega |D^\alpha w|^2\right)^{1/2} \left(\int_\omega |D^\beta v|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq K \|w\|_{W_2^2} \|v\|_{W_2^2}$$

2) $$\left|\int_\omega f v\right| \leq \|f\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^1} |v|_0 \leq K' \|f\|_{L^1} \|v\|_{W_2^2}$$
$$= K \|v\|_{W_2^2} \qquad \text{DONDE } K = K' \|f\|_{L^1}$$

Aquí hemos usado el teorema de encaje de Sobolev que nos dice que si ω tiene la propiedad del cono, ω es de dimensión 2, entonces $W_2^2(\omega) \subset C_*^0(\omega)$ y que

$$|U_0| = \sup_{x \in \omega} |U(x)| \leq K \|U\|_{W_2^2}$$

(ver [1] pag. 97, [9] pag. 28).

3) $$\left|\int_{\Gamma_k} v h_k \, ds\right| \leq \|h_k\|_{L^1(\Gamma_k)} \|v\|_{L^\infty(\Gamma_k)} \qquad k = 3 \text{ ó } 4$$

Ahora por el teorema de traza $v \in H^{3/2}(\Gamma) \subset H^1(\Gamma)$. (ver [1] teo. 7.48). Esto también es inmediato de la definición de espacios H^s, s fraccionario que damos en el Apéndice.

Probemos que

$$H^1(\Gamma) \subset C^{0,1/2}(\Gamma)$$

(PARA definición DE $C^{0,1/2}$ VER [1] pag. 10, [15] pág. 56)

$$|v(s)-v(s')| = \left|\int_0^{s'-s} v' dt\right| \leq \left(\int_0^{s-s'} dt\right)^{1/2} \left(\int_0^{s'-s} v'^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leq |s'-s|^{1/2} \|v'\|_{L^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{|v(s)-v(s')|}{|s'-s|^{1/2}} \leq \|v''\|_{L^2}$$

$\therefore$

$$\|h_k\|_{L^1} \|v\|_{L^\infty} \leq C' \|h_k\|_{L^1} \|v\|_{H^{3/2}(\Gamma)}$$

$$\leq \|h_k\|_{L^1} \|v\|_{H^2}$$

4) Como $H^{1/2} \subset L^2$ (VER [1] teo. 7.48) tenemos que:

$$\left|\int_{\Gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \eta} h_2 ds\right| \leq \left\|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\|_{L^2} \|h_2\|_{L^2} \leq K' \left\|\frac{\partial v}{\partial \eta}\right\|_{H^{1/2}} \|h_2\|_{L^2}$$

$$\leq K \|v\|_{H^2} \|h_2\|_{L^2} \qquad \text{(VER [1], teo. 7.53)}$$

Se hace lo análogo para $\int_{\Gamma_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} g_3 ds$ y $\therefore$ de 1, 2, 3 y 4 tenemos que $l: V \subset H^2 \to \mathbb{R}$ es continuo.

Así con todo lo anterior hemos demostrado el siguiente

<u>TEOREMA 3</u> Si g_i $i=1,2,4$, h_1 son lo suficientemente regulares para que exista $w \in W_2^2$ t.q. $w/\Gamma_i = g_i$ $i=1,2$, $w \in H^{3/2}(\partial\omega)$; $\frac{\partial w}{\partial \eta}/\Gamma_1 = h_1$, $\frac{\partial w}{\partial \eta}/\Gamma_4 = g_4$, $\frac{\partial w}{\partial \eta} \in H^{1/2}(\partial\omega)$ y además $f \in L^1(\partial\omega)$, $h_3, h_4 \in L^1(\Gamma_3, \Gamma_4)$ y $h_2, g_3 \in L^2(\Gamma)$

entonces $\exists!\ u \in \Omega_r$ t.q. $A(u,v) = l(v)\quad \forall v \in \Omega_r$.

Ahora, para tener una solución débil necesitamos una $u \in V$ t.q. $A(u,v) = l(v)\quad \forall v \in V$. Veremos que esto es posible $\Leftrightarrow l(\bar{v}) = 0\quad \forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$.

Como Ω_r es cerrado en V entonces $V = \Omega_r \oplus \Omega_r^{\perp}$ y $v \in V \Rightarrow v = v_1 + \bar{v}$ con $\bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$ es una función lineal o constante según el caso y $v_1 \in \Omega_r$.

$$\therefore\quad A(u,v) = A(u,v_1) + A(u,\bar{v}).$$

$A(u,\bar{v}) = 0$ ya que $\bar{v}$ es lineal y A tiene solo segundas derivadas.

$$\therefore\quad A(u,v_1) = l(v_1) + l(\bar{v}).$$

Si u es solución débil, tomando $v_1 = 0$ se tiene $(v = \bar{v})$

$$l(\bar{v}) = 0 \quad \text{y} \quad A(u,v_1) = l(v_1)\quad \forall v_1 \in \Omega_r.$$

Como $u = u_1 + u_2$ con $u_2 \in \Omega_r^{\perp}$ tenemos

$$A(u_1,v_1) = l(v_1)\qquad \forall v_1 \in \Omega_r$$

i.e. $u_1 \in \Omega_r$ es la única solución que ya hemos encontrado.

Inversamente tomando la solución que ya hemos encontrado

$$A(u_1,v_1) = l(v_1),$$

entonces u_1 (y $u_1 + u_2$) será solución débil si $l(\bar{v}) = 0$ $\forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$.

Estudiemos ahora el significado físico de la condición

$$0=\ell(\bar{v})=\int_{\Gamma_3}\bar{v}h_3+\int_{\Gamma_4}\bar{v}h_4+\int_{\Gamma_2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\nu}h_2+\int_{\Gamma_3}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\nu}y_3-A(w,\bar{v})+\int_\omega f\bar{v}$$

para $\bar{v}\in\Omega_r^{\perp}$ $r=1,\dots,7$.

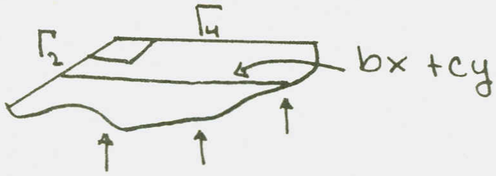
El término $A(w,\bar{v})$ siempre se va a anular porque $\bar{v}$ es lineal.

Para los casos $r=1,2,3$ sucede que $\Omega_r^{\perp}=\{0\}$.

<u>Caso 4</u>.- Haciendo un cambio de coordenadas adecuado podemos escribir la ecuación de Γ_2 como $bx+cy=0$ donde $b^2+c^2=1$. Para interpretar

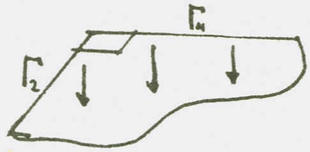
$$\int_{\Gamma_k} v_0 h_k \qquad k=3,4$$

pensemos en $v_0=bx+cy=(b,c)\cdot(x,y)$ como la norma de la proyección del vector (x,y) sobre el vector normal a Γ_2 y a h_k como fuerzas normales a la placa.



$\therefore \int_{\Gamma_k} v_0 h_k$ puede ser interpretado como el momento que producen las fuerzas h_k en Γ_k respecto a Γ_2.

Análogamente $\int_\omega f v_0$ es el momento que produce la fuerza f (f normal a la placa) con respecto a Γ_2.



Ahora consideremos h_2 y g_3 como fuerzas de flexión.

tenemos que $\int_{\Gamma_2} \frac{\partial u_0}{\partial n} h_2 = \int_{\Gamma_2} h_2$ es el promedio de la fuerza de flexión h_2 aplicada a Γ_2

(Como Γ_2 es una recta $\Rightarrow$ $u_{TT} = (u/_{\Gamma_2})'' \Rightarrow$

$$M u = u_{nn} + \sigma u_{TT} = u_{nn} + \sigma g_2'' \Rightarrow$$

u_{nn} es dado, o sea la curvatura sobre las líneas perpendiculares a Γ_2.)

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\partial u_0}{\partial n} g_3 = \int_{\Gamma_3} (b.c) \cdot n \, g_3$$

Si pensamos $g_3 n$ como la componente normal a Γ_3 esta integral se puede interpretar como la contribución de g_3 en la dirección $\perp$ a Γ_2.

Así la condición $l(u_0) = 0$ quiere decir físicamente que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas en ω, Γ_3 y Γ_4 respecto a Γ_2, más las contribuciones en la dirección $\perp$ a Γ_2 de las fuerzas aplicadas en Γ_3 mas el promedio de la fuerza aplicada en Γ_2 son cero.

Por lo tanto si los momentos con respecto a Γ_2 no son cero obtendremos un desplazamiento rígido alrededor del eje Γ_2 sin llegar a una posicion de equilibrio.

Si Γ_4 no es una recta $\perp \Gamma_2$ (caso 3)) el tener el ángulo de la placa sobre Γ_4 impide esos movimientos.

Notamos que si $f = h_i = g_j = 0 \quad \forall i, j$ entonces $u = 0$ y u_0 son soluciones.

<u>Caso 5.-</u> Aquí $\bar{v} = \text{cte}$. $\therefore \frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = 0 \quad \therefore l(\bar{v}) = 0$
$\Rightarrow$ el promedio de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω es cero.

<u>Caso 6.-</u> Aquí tenemos

α) $l(1) = 0 \Rightarrow$ el promedio de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω es cero.

β) $l(cx - by) = 0$, análogamente a lo que hicimos en el caso 4: se tiene que la suma de los momentos respecto a las rectas perpendiculares a Γ_4 de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω mas las contribuciones en la dirección de Γ_4 de las fuerzas aplicadas en Γ_3 y Γ_2 es cero. Si $f = g_i = h_j = 0$ entonces ademas de $u = 0$ tenemos la solución $u = cx - by + a$.

<u>Caso 7.-</u> Aquí la condición $l(\bar{v}) = 0$, $\bar{v} \in \Omega_7^{\perp}$ nos dice que los promedios de las fuerzas aplicadas en Γ_3, Γ_4 y ω mas los momentos de estas fuerzas respecto a los ejes mas las contribuciones en las direcciones de los ejes de la fuerzas aplicadas en Γ_3 y Γ_2 se anulan.

El significado físico que tiene el restringir $A(\cdot,\cdot)$ a los espacios Ω_r, $r=1,\ldots,7$ es el de considerar esencialmente las <u>deformaciones intrínsecas</u> que sufre la placa independientemente de su posición en el espacio, i.e. si las condiciones impuestas en el borde de la placa nos permiten moverla sin forzar nuevas deformaciones en ésta, consideraremos todas estas soluciones iguales. Al hacer esta identificación también tendremos un estado <u>único</u> no deformado.

Por ejemplo, en el caso 1.- la placa está fija en Γ_1 y $\therefore$ al moverla tenemos que deformarla, $\therefore$ $\Omega_1 = V$.

En el caso 2.- la placa está soportada sobre Γ_2. Si Γ_2 no es una recta no podemos hacerle un movimiento a la placa sin provocarle nuevas deformaciones, sin embargo si Γ_2 es recta podemos girar alrededor de Γ_2 sin forzar esencialmente nuevas deformaciones y así para identificar todas estas soluciones en el caso 4.- consideramos $\Omega_4 = \langle v_0 \rangle^{\perp L^2(\omega)} \wedge V$.

En el caso 7.- el borde de la placa está libre y $\therefore$ es posible mover ésta sin forzarle nuevas deformaciones. Con "mover ésta" entendemos sumarle un polinomio de grado ≤ 1, es decir sumarle uno de los estados no deformados.

En el caso 5.- es posible mover la placa paralelamente al plano $z=0$ sin ocasionarle nuevas deformaciones y por esto no consideramos V sino $\Omega_5 = \langle cte\rangle^{\perp L^2} \cap V$

En el caso 6. es posible "girar" la placa respecto a las rectas ortogonales a Γ_4 sin forzar deformaciones y $\therefore$ para tener unicidad nos restringimos a Ω_6.

Ahora tratemos de reducirnos al caso homogéneo. Para esto encontremos una función U_1 t.q. satisface las condiciones de frontera del problema (6). Esto lo haremos en el lema que va despues de la siguiente

DEFINICIÓN 2. Si P_i tiene como dominio $D(P_i)=\Gamma_i$ y codominio $C(P_i)$ $(i=a,b)$ definimos

$$P_a \cup P_b : D(P_a)\cup D(P_b) \longrightarrow C(P_a)\cup C(P_b)$$

de manera que $P_a \cup P_b|_{\Gamma_i} = P_i$

LEMA 4. Si -) $g_1 \cup g_2 \in H^{7/2}(\partial\omega)$ (es decir $\exists$ una extensión a $\partial\omega$ que pertenece a $H^{7/2}(\partial\omega)$).

-) $h_1 \cup g_4 \in H^{5/2}(\partial\omega)$

-) $h_2 \cup g_3 \in H^{3/2}(\partial\omega)$

-) $h_3 \cup h_4 \in H^{1/2}(\partial\omega)$

$\Rightarrow \exists\, U_1 \in H^4(\omega)$ t.q.

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = g_1 \\ U_{1n} = h_1 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_1, \quad \left.\begin{array}{l} U_1 = g_2 \\ MU_1 = h_2 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_2, \quad \left.\begin{array}{l} MU_1 = g_3 \\ NU_1 = h_3 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_3, \quad \left.\begin{array}{l} U_{1n} = g_4 \\ NU_1 = h_4 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_4$$

DEMOSTRACIÓN Para empezar recordemos las expresiones para Mu y Nu que se dan en el apéndice

$$Mu = u_{nn} - \sigma K u_n + \sigma u''$$

$$Nu = u_{nnn} - K u_{nn} + (2-\sigma) u_n'' - K^2 u_n' + (3-\sigma) K u'' + (2-\sigma) K' u'.$$

Ahora, por el teorema de traza sabemos que si $(f_0, f_1, f_2, f_3) \in H^{7/2}(\partial\omega) \times H^{5/2}(\partial\omega) \times H^{3/2}(\partial\omega) \times H^{1/2}(\partial\omega)$ entonces existe $u \in H^4(\omega)$ tal que

$$u/\partial\omega = f_0, \quad u_n|_{\partial\omega} = f_1, \quad u_{nn}/\partial\omega = f_2, \quad u_{nnn}|_{\partial\omega} = f_3$$

Aquí definamos

$$f_0 = \begin{cases} g_1 \text{ en } \Gamma_1 \\ g_2 \text{ en } \Gamma_2 \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ de tal forma que } f_0 \in H^{7/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

Por ejemplo podemos tomar $f_0 \equiv 0$ en $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ menos una vecindad de $(\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \cap (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Notese que esto implica compatibilidad de g_1 y g_2 en $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$. Esto es cierto si g_1 y g_2 y sus derivadas hasta orden 4 coinciden en esos puntos.

$$f_1 = \begin{cases} h_1 \text{ en } \Gamma_1 \\ g_4 \text{ en } \Gamma_4 \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_2 \cup \Gamma_4 \text{ tal que } f_1 \in H^{5/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} h_2 + \sigma K f_1 - \sigma g_2'' \text{ en } \Gamma_2 \quad (f_1 \in H^{5/2},\ g_2'' \in H^{3/2}) \\ g_3 + \sigma K f_1 - \sigma f_0'' \text{ en } \Gamma_3 \quad (f_1 \in H^{5/2},\ f_0'' \in H^{3/2}) \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_1 \cup \Gamma_4 \text{ t.q. } f_2 \in H^{3/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} h_3 + K(g_3 + \sigma K f_1 - \sigma f_0'') - (2-\sigma) f_1'' + K^2 f_1' \\ \quad - (3-\sigma) K f_0'' - (2-\sigma) K' f_0' \quad \text{en } \Gamma_3 \quad (f_1'' \in H^{1/2}) \\ h_4 + K f_2 - (2-\sigma) g_4'' + K^2 g_4' - (3-\sigma) K f_0'' \\ \quad - (2-\sigma) K' f_0' \quad \text{en } \Gamma_4 \quad (g_4'' \in H^{1/2}) \\ \text{cualquier extensión a } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \text{ t.q. } f_3 \in H^{1/2}(\partial\omega) \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists\, u_1 \in H^4$ con esas trazas.

Claramente $u_1 = g_1$ sobre Γ_1 y $u_1 = g_2$ en Γ_2.

$u_{1n} = h_1$ en Γ_1, $u_{1n} = g_4$ en Γ_4.

$M u_1 = h_2 + \sigma K f_1 - \sigma g_2'' - \sigma K f_1 + \sigma g_2'' = h_2$ en Γ_2

$M u_1 = g_3$ en Γ_3

$N u_1 = h_3$ en Γ_3

$N u_1 = h_4$ en Γ_4

ya que así construimos f_2, f_3.

Q.E.D.

Ahora que tenemos $u_1 \in H^4(\omega)$ t.q. satisface las condiciones de frontera del problema original (6). Escribamos a la solución de (6) como $u = \bar{u} + u_1$. Sustituyendo vemos que $\bar{u}$ debe ser solución del problema

$$\Delta^2 \bar{u} = -\Delta^2 u_1 + f = g \in L^1(\omega)$$

mas condiciones homogeneas. Y viceversa, si $\bar{u}$ es solución de este problema y u_1 satisface las condiciones de frontera del problema (6) entonces $u = \bar{u} + u_1$ es solución de (6).

Ahora dando una formulación débil al problema homogeneo para $\bar{u}$, tenemos que $\bar{u}$ satisface

$$A(\bar{u},v)=\int_\omega gv \qquad \forall v\in V$$

donde V es el espacio que satisface las condiciones estables homogeneas y $g=f-\Delta^2 u_1$.
(Notamos que la condición $\int gu=0 \ \forall u\in\Omega_r^\perp$ se escribe

$$\int fu-\int\Delta^2 u_1 u=0=\int fu-A(u_1,u)+\int_{\partial\omega} u N u_1+\int_{\partial\omega}\frac{\partial u}{\partial \eta}Mu_1$$

como u es lineal entonces $A(u_1,u)=0 \Rightarrow$
$\int_\omega gu=l(u)$ para $u\in\Omega_r^\perp\cap V$.)

Por lo que hemos hecho anteriormente sabemos que $\exists!\,\bar{u}\in\Omega_r\subset V$ que satisface la igualdad $\therefore$ podemos definir el operador

$$G_r':L_1\longrightarrow\Omega_r$$
$$g\longmapsto\bar{u}$$

Ahora estudiamos las propiedades de este operador

<u>Proposición 5</u> G_r' tiene las siguientes propiedades:
a) G_r' es lineal
b) G_r' es compacto
c) G_r' es autoadjunto.

<u>Demostración</u> "a)" $A(G_r'(\alpha f+\beta g),v)=\int_\omega(\alpha f+\beta g)v \quad \forall v\in V$
(por def. de G_r'), ahora

$$A(\alpha G_r'f+\beta G_r'g,v)=\alpha A(G_r'f,v)+\beta A(G_r'g,v)=\int_\omega(\alpha f+\beta g)$$

$\therefore \quad A(G_r'(\alpha f+\beta g),v)=A(\alpha G_r'f+\beta G_r'g,v) \quad \forall v\in V$

$\therefore$ por la unicidad tenemos que

$$G_r'(\alpha f+\beta g)=\alpha G_r' f+\beta G_r' g$$

$\therefore G_r'$ es lineal

"b)" tenemos que

$$\|u\|^2_{\Omega_r}=A(u,u)=\int_\omega fu\leq \|f\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty}$$

Recordemos que por el teorema de encaje de Sobolev tenemos que $W_2^2(\omega)\subset C_*^0(\omega)$ y que

$$|u|_0=\sup_{x\in\omega}|u(x)|\leq K\|u\|_{W_2^2}$$

$$\therefore \quad \|f\|_{L^1}\|u\|_{L^\infty}\leq\|f\|_{L^1}K\|u\|_{W_2^2}$$

$$\therefore \quad \|u\|^2_{W_2^2}\leq K\|f\|_{L^1}\|u\|_{W_2^2}$$

$$y \ \therefore \quad \|u\|_{W_2^2}\leq K\|f\|_{L^1},$$

como $u=G_r' f$ tenemos que

$$\|G_r' f\|_{W_2^2}\leq K\|f\|_{L^1}$$

Sea $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset L^1(\omega)$ .t. $\|f_n\|_{L^1}<M'$ $\forall n$.

Sucede que

$$\|u_n\|_{W_2^2}=\|G_r' f_n\|_{W_2^2}<KM'=M$$

y por lema 2' apendice tenemos que $\exists\{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ subsucesión de $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ .t. $u_{n_k}\xrightarrow{n\to\infty}u$

Ahora:

$$\|u_{n_k}-u\|^2_{W_2^2}=(u_{n_k},u_{n_k})+(u,u)-2(u_{n_k},u)$$
$$\leq|(u_{n_k},u_{n_k})-(u,u)|+2|(u,u)-(u_{n_k},u)|$$

Basta demostrar que $|(u_{n_k},u_{n_k})-(u,u)|$ tiende a cero ya que el otro termino tiende a cero por la convergencia débil. Para demostrar que $|(u_{n_k},u_{n_k})-(u,u)|$ tiende a cero, tenemos que:

$$(u_{n_k}, v) = \int f v \quad \forall v \in \Omega_r$$

$$\Rightarrow |(u_{n_k}, u_{n_k}) - (u_{n_k}, u)| = \left|\int f (u_{n_k} - u)\right| \leq M' \|u_{n_k} - u\|_{L^\infty}$$

$$\leq C M' \|u_{n_k} - u\|_{H^1} \longrightarrow 0$$

Como por la convergencia débil

$$(u_{n_k}, u) \longrightarrow \|u\|^2$$

entonces se sigue que $\|u_{n_k}\|^2 \longrightarrow \|u\|^2$.

"c)" observemos que

$$(G_r f, v) = \int f v \quad \forall v \in \Omega_r$$

$$= (G_r v, f) \quad \text{si } f \in \Omega_r$$

y $\therefore$ G_r es autoadjunto.

PARTE NO-LINEAL

LAS ECUACIONES QUE NOS INTERESAN ESTUDIAR SON DEL TIPO

$$\Delta^2 \varphi = -[u,u]$$
$$\Delta^2 u = [F,u] \quad \text{en } \omega$$

CON CONDICIONES

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \partial\omega$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{en } \partial\omega$$

y

$$\left.\begin{array}{l} u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_1 \qquad \left.\begin{array}{l} u = 0 \\ M(u) = 0 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_2$$

$$\left.\begin{array}{l} M(u) = 0 \\ N(u) = 0 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_3 \qquad \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \\ N(u) = 0 \end{array}\right. \text{en } \Gamma_4$$

$$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \partial\omega$$

AHORA ESTUDIEMOS LA NO-LINEARIDAD QUE APARECE EN LAS ECUACIONES DE VON-KÁRMÁN CON EL CORCHETE:

(NOTEMOS QUE CUANDO $h=g$ OBTENEMOS LA EXPRESIÓN PARA LA CURVATURA GAUSSIANA (VER [6] pag. 146 y 163))

$$[\cdot,\cdot]: W_2^2 \times W_2^2 \longrightarrow L^1(\omega)$$
$$(h,g) \longmapsto h_{xx}g_{yy} + h_{yy}g_{xx} - 2h_{xy}g_{xy}$$

<u>TEOREMA 6</u>

$$\|[h,g]\|_{L^1} \leq K \|h\|_{W_2^2} \|g\|_{W_2^2} .$$

<u>Dem.</u>

$$\|[h,g]\|_{L^1} = \int_\omega |h_{xx}g_{yy} + h_{yy}g_{xx} - 2h_{xy}g_{xy}|$$
$$\leq \int_\omega |h_{xx}||g_{yy}| + |h_{yy}||g_{xx}| + 2|h_{xy}||g_{xy}|$$
$$\leq \left(\int_\omega |h_{xx}|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |g_{yy}|^2\right)^{1/2} + \left(\int_\omega |h_{yy}|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |g_{xx}|^2\right)^{1/2}$$
$$+ 2\left(\int_\omega |h_{xy}|^2\right)^{1/2}\left(\int_\omega |g_{xy}|^2\right)^{1/2}$$

ahora utilizando Schwarz tenemos que

$$\|[h,g]\|_{L^1} \leq \left(\int_\omega |h_{xx}|^2 + |h_{yy}|^2 + 2|h_{xy}|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\int_\omega |g_{yy}|^2 + |g_{xx}|^2 + 2|g_{xy}|^2\right)^{1/2}$$
$$\leq K \|h\|_{W_2^2} \|g\|_{W_2^2}$$

∎

Llamemos G_r a la composición $G_r' \circ [\cdot,\cdot]: W_2^2 \times W_2^2 \longrightarrow \Omega_r$, como $[\cdot,\cdot]$ es continuo y G_r' es compacto, G_r resulta ser compacto. En particular si damos F_0 fija en W_2^2 tenemos que

$$G_r(\cdot, F_0): W_2^2 \longrightarrow \Omega_r$$
$$h \longmapsto G_r(h, F_0)$$

es un operador compacto, en particular $L_r = G_r(\cdot, F_0)/_{\Omega_r}$ lo es.

Ahora supongamos que $\forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$, $(F = \Psi + \lambda F_0)$

$$l_1(\bar{v}) = \int_\omega [u,u]\,\bar{v}$$

$$l_2(\bar{v}) = \int_\omega [F,u]\,\bar{v} = \int_\omega [\Psi,u]\,\bar{v} + \lambda \int_\omega [F_0,u]\,\bar{v}$$

se anulan. Por lo que se ha visto antes tenemos que si (u,Ψ) es solución de las ecuaciones de Von-Kármán entonces

$$\begin{aligned} \Psi &= -\hat{G}_1(u,u) \\ u &= G_r(F,u) \end{aligned} \qquad \ldots (12)$$

donde $\hat{\Omega}_1 = \Omega_1$ con $\Gamma_1 = \partial\omega$, $\hat{G}_1 = G_1 : L_1 \to \hat{\Omega}_1$, e inversamente si (u,Ψ) es solución de (12) entonces es solución débil de las ecuaciones de Von-Kármán y solución fuerte si u y Ψ son suficientemente regulares.

Poniendo $F = \Psi + \lambda F_0$ en la 2da ecuación de (12) queda

$$u = G_r(\Psi,u) + \lambda L_r u$$

$(L_r = G_r(\cdot, F_0)|_{\Omega_r})$. Sustituyendo en esta ecuación $\Psi = -\hat{G}_r(u,u)$ obtenemos

$$\boxed{u + G_r u = \lambda L_r u}$$

donde $G_r u = G_r(\hat{G}_1(u,u), u)$. Como Ψ viene dado en términos de u basta estudiar esta última ecuación.

Para ver que $l_1(\bar{v})$ y $l_2(\bar{v})$ se anulan $\forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$ demostremos la siguiente:

Proposición 7. La igualdad

$$\int_\omega [v,w]\bar{v} = \int_\omega [\bar{v},w]\,v \quad \text{es cierta } \forall v, w, \bar{v} \in H^2$$

si $\exists u \in H^2$ t. sobre Γ_1 $u = u_n = 0$ y $v = u$ ó $w = u$ ó $\bar{v} = u$,

sobre Γ_2 $v = \bar{v} = 0$

sobre Γ_3 $w_{nT} = w_{TT} = 0$

sobre Γ_4 $w_{nT} = 0$, $v_n = \bar{v}_n = 0$

Demostración. Consideremos $v, w, \bar{v} \in C^\infty(\omega)$; integrando por partes tenemos que

$$\int_\omega [v,w]\bar{v} = \int_\omega [(w_{yy}v_x - w_{xy}v_y)_x + (w_{xx}v_y - w_{xy}v_x)_y]\,\bar{v}\,d\omega$$

$$= \int_\omega (w_{xy}v_y - w_{yy}v_x)\bar{v}_x + (w_{xy}v_x - w_{xx}v_y)\bar{v}_y\,d\omega$$

$$+ \int_{\partial\omega} (w_{yy}v_x - w_{xy}v_y)\bar{v}\,n_1 + (w_{xx}v_y - w_{xy}v_x)\bar{v}\,n_2\,ds.$$

Por otro lado observemos que

$$\frac{\partial}{\partial s} w_y = -w_{yx}n_2 + w_{yy}n_1$$

$$\frac{\partial}{\partial s} w_x = -w_{xx}n_2 + w_{xy}n_1$$

entonces podemos escribir la igualdad:

$$\int_\omega [v,w]\bar{v} = \int_\omega [\bar{v},w]\,v + \int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial s} w_y (v_x\bar{v} - v\bar{v}_x) - \frac{\partial}{\partial s} w_x (v_y\bar{v} - v\bar{v}_y) \quad \ldots (13)$$

para $v, w, \bar{v} \in C^\infty(\omega)$.

Ahora veremos que estas integrales tienen sentido $\forall v, w, \bar{v} \in H^2 = W_2^2$. Por el teorema de trazas $v_x, w_y \in H^{1/2}$, $\bar{v} \in H^{3/2}$. Tenemos que $\frac{\partial}{\partial s} w_y \in H^{-1/2}$(*). Si $\bar{v} \in H^{3/2}$, recordando que $H^{3/2} \subset C^{0,1/2}$ tenemos que:

(*) Ver apéndice.

$$\left| \int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial s}(w_y)\, v_x \bar{v} \right| \leq \sup_{\text{en } \partial\omega} |\bar{v}| \left| \int_{\partial\omega} \frac{\partial}{\partial s}(w_y)\, v_x \right| < \infty$$

haciendo lo análogo para los demás términos que aparecen en (13), vemos que las integrales tienen sentido $\forall\, v, w, \bar{v} \in H^2$.

Ahora separemos la integral de frontera que aparece en (13) en 4 partes así:

$$\int_{\omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

y veamos que si se cumplen las condiciones de la proposición cada una de estas cuatro integrales se anula. Con esto quedará concluida la demostración.

Para la 1era integral observemos que $u = u_\eta = 0$ en Γ_1 $\Rightarrow u = u_x = u_y = 0$ en Γ_1. Esto se sigue de inmediato si expresamos u_x y u_y en función de u_η y $\frac{\partial u}{\partial s}$. Si alguna de las tres funciones es igual a u en Γ_1, simplemente sustituyendo en la integral sobre Γ_1 vemos que ésta se anula.

Para la 2da integral el resultado se sigue de inmediato haciendo la sustitución.

Para la 3era y 4ta integral necesitaremos reformular el integrando. Tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial s}\begin{pmatrix} w_y \\ -w_x \end{pmatrix} \cdot \nabla v = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} w_y \\ -w_x \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot \eta + \frac{\partial v}{\partial T}\cdot T \right)$$

$$= \begin{pmatrix} -w_{yx}\eta_2 + w_{yy}\eta_1 \\ w_{xx}\eta_2 - w_{xy}\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \begin{pmatrix} -w_{yx}\eta_2 + w_{yy}\eta_1 \\ w_{xx}\eta_2 - w_{xy}\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial T}$$

$$= w_{TT} v_\eta - w_{\eta T} v_T \qquad \text{(ver apéndice)}$$

Multiplicando por $\bar{v}$ obtenemos $w_{\tau\tau} v_n \bar{v} - w_{n\tau} v_\tau \bar{v}$.

Análogamente

$$v \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} w_y \\ -w_x \end{pmatrix} \nabla \bar{v} = w_{\tau\tau} \bar{v}_n v - w_{n\tau} \bar{v}_\tau v$$

sumando obtenemos que

$$\frac{d}{ds}(w_y)(v_x \bar{v} - v\bar{v}_x) - \frac{d}{ds}(w_x)(v_y \bar{v} - v\bar{v}_y)$$

$$= w_{\tau\tau}(v_n \bar{v} - v\bar{v}_n) - w_{n\tau}(v_\tau \bar{v} - v\bar{v}_\tau).$$

Una vez que tenemos el integrando en esta forma es obvio que la 3^era^ integral se anula.

Para la 4^ta^ integral, si hacemos $v_n = \bar{v}_n = 0$ el integrando queda

$$w_{n\tau}(v_\tau \bar{v} - v\bar{v}_\tau) = 0 \qquad \text{por hipótesis}.$$

Así concluimos la prueba de la proposición.

Q.E.D.

Con la ayuda de la Proposición veamos que

$$l_i(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \Omega_i^+ \quad , \quad i = 1, 2.$$

Para el caso de l_1, resulta que $\bar{v} \in \hat{\Omega}_1^+ = \{0\}$, ya que las condiciones de frontera sobre φ son $\varphi = \varphi_n = 0$ en $\partial\omega$

Para el caso de l_2 observemos que

$$\int_\omega [\varphi, v]\bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, v]\varphi + \int_{\partial\omega} \frac{d}{ds}(v_y)(\varphi_x \bar{v} - \varphi\bar{v}_x) - \frac{d}{ds}(v_x)(\varphi_y \bar{v} - \varphi\bar{v}_y)$$

$$= \int_\omega [\bar{v}, v]\varphi$$ debido a las condiciones de frontera $0 = \varphi = \varphi_n \Rightarrow \varphi = \varphi_x = \varphi_y = 0$.

Ahora como $\bar{v}$ es una función lineal y en el corchete aparecen derivadas de 2do orden tenemos

$$\int_\omega [\varphi\, u]\, \bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, u]\, \varphi = 0 .$$

Solo falta estudiar

$$\int_\omega [F_0, u]\, \bar{v}$$

Para esto impondremos las siguientes condiciones sobre F_0

$$F_{0_{\eta\tau}} = F_{0_{\tau\tau}} = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma_3$$

$$F_{0_{\eta\tau}} = 0 \qquad \text{sobre } \Gamma_4$$

Esto junto con el hecho de que $u \in V$ nos da, aplicando la proposición, que

$$\int_\omega [F_0, u]\, \bar{v} = \int_\omega [\bar{v}, u]\, F_0 = 0$$

Así hemos visto que $l_i(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$ si damos ciertas hipótesis sobre F_0.

Excepto en el caso 4 estas hipótesis sobre F_0 son las más débiles. Para ver esto supongamos que

$$\int_{\partial\omega} \frac{d}{ds} F_{0y} (u_x \bar{v} - u \bar{v}_x) - \frac{d}{ds} F_{0x} (u_y \bar{v} - u \bar{v}_y) = 0 \qquad \forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$$

y veamos que condiciones debe satisfacer F_0.

Separemos la integral así:

$$\int_{\partial\omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} + \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4}$$

Se tiene que $\int_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_2} = 0$, esto debido a que $u \in V$ y para la integral sobre Γ_2 también porque en los casos 1, 2, 3 $\bar{v} \equiv 0$, en el caso 4 $\bar{v} = 0$ en Γ_2 y en los casos 5, 6, 7, $m\Gamma_2 = 0$.

Si $\bar{v} = 1$ en los casos 5, 6, 7 tenemos

$$0 = \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} F_{0TT}(v_n) - \int_{\Gamma_3 \cup \Gamma_4} F_{0nT}(v_T) \qquad \forall v \in V$$

Demos una función $\varphi : \partial\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

$$\varphi(s) = \begin{cases} \varphi_1 \in C_0^\infty(\Gamma_3), \ \frac{d\varphi_1}{ds} \neq 0 & \text{en } \Gamma_3 \\ 0 & \text{en } \partial\omega - \Gamma_3 \end{cases}$$

Usando el teorema de trazas podemos encontrar $v \in V$ t.q.

$$\gamma(v) = \varphi$$
$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_3)$ es denso en $L^2(\Gamma_3)$ se sigue que

$$\int_{\Gamma_3} F_{0nT} v_T = 0 \Rightarrow F_{0nT} = 0 \text{ en } \Gamma_3.$$

Análogamente tomando una función

$$\xi(s) = \begin{cases} \xi^* \in C_0^\infty(\Gamma_3), \ \xi^* \neq 0 & \text{en } \Gamma_3 \\ 0 & \text{en } \partial\omega - \Gamma_3 \end{cases}$$

por el teorema de trazas tenemos que $\exists\, v \in V$ t.q.

$$\gamma(v) = 0$$
$$\gamma\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right) = \xi$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_3)$ es denso en $L^2(\Gamma_3)$ se tiene que

$$\int_{\Gamma_3} F_{0TT} v_n = 0 \Rightarrow F_{0TT} = 0 \text{ en } \Gamma_3.$$

Ahora se tiene que

$$0 = \int_{\Gamma_4} = -\int_{\Gamma_4} F_{0nT}(v_T \bar{v} - \bar{v}_T v) + F_{0TT}\, \bar{v}_n v$$

YA QUE $u \in V \Rightarrow u_n = 0$ en Γ_4.

TOMANDO $\bar{v} = 1$ RESULTA

$$\int_{\Gamma_4} F_{0nT} u_T = 0$$

y haciendo lo análogo a lo anterior, usando el teorema de traza podemos concluir que

$$F_{0nT} = 0 \text{ en } \Gamma_4 \quad \text{en los casos } 5, 6, 7.$$

OBSERVEMOS QUE

$$F_{0nT} = F_{0TT} = 0 \Leftarrow \frac{d}{ds} F_{0x} = \frac{d}{ds} F_{0y} = 0.$$

(VER APÉNDICE).

En el CASO 4 tenemos $\bar{v}_4 = a + bx + cy$, $\bar{v} = 0$ sobre Γ_2 y $\bar{v}_n = 0$ en Γ_4, $\Gamma_4 = \{c_i + cx - by = 0\}$, $(\Gamma_4 \perp \Gamma_2)$, $n = \binom{c}{-b} \frac{1}{\sqrt{c^2+b^2}}$,

$\bar{v}_T|_{\Gamma_4} = \binom{b}{c} \cdot \binom{b}{c} \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} = \sqrt{b^2+c^2} = 1$ TOMANDO $b^2 + c^2 = 1$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_4} F_{0TT}(u_n \bar{v} - u \bar{v}_n) - F_{0nT}(u_T \bar{v} - u \bar{v}_T) = \int_{\Gamma_4} F_{0nT}(\varphi' \bar{v} - \varphi \bar{v}_T) = 0$$

YA QUE COMO $u, \bar{v} \in V$, SE tiene $u_n = \bar{v}_n = 0$. TOMANDO $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma_4)$ y u t.q. $u|_{\partial\omega} = \begin{cases} \varphi & \text{en } \Gamma_4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$, $u_n|_{\partial\omega} = 0$.

REESCRIBIENDO LA ULTIMA integral tenemos

$$-\int_{\Gamma_4} \left((F_{0nT} \bar{v})' + \bar{v}' F_{0nT} \right) \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Gamma_4).$$

Como $C_0^\infty(\Gamma_4)$ es denso en $L^2(\Gamma_4)$ se obtiene

$$\underline{F'_{0nT}(a + bx + cy) + 2 F_{0nT} = 0} \quad \text{sobre } \Gamma_4$$

con $y = \dfrac{c_i + cx}{b}$

Sobre Γ_3, en el caso 4 tenemos

$$\int_{\Gamma_3} F_{0\tau\tau}(u_n\bar{v}-u\bar{v}_n)-F_{0n\tau}(u_\tau\bar{v}-u\bar{v}_\tau)=0 \qquad \forall u\in V$$

tomando $\varphi\in C_0^\infty(\Gamma_3)$ y u t.q. $u|_{\partial\omega}=\begin{cases}\varphi & \text{en } \Gamma_3\\ 0 & \text{en } \partial\omega\setminus\Gamma_3\end{cases}$
$\varphi\neq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\partial\omega}=0.$$

Se tiene

$$\int_{\Gamma_3}\left(-F_{0\tau\tau}\bar{v}_n+F_{0n\tau}\bar{v}_\tau+(F_{0n\tau}\bar{v})'\right)\varphi=0$$

entonces $F_{0\tau\tau}\bar{v}_n=2F_{0n\tau}\bar{v}'+F_{0n\tau}'\bar{v}$

tomando u t.q. $u|_{\partial\omega}=0$ $\frac{\partial u}{\partial\eta}\Big|_{\partial\omega}=\begin{cases}\varphi & \text{en } \Gamma_3\\ 0 & \text{en } \partial\omega-\Gamma_3\end{cases}$

tenemos $\int_{\Gamma_3}F_{0\tau\tau}\bar{v}\varphi=0 \quad \therefore F_{0\tau\tau}\bar{v}=0$

Ahora como $\bar{v}\neq 0$ entonces $F_{0\tau\tau}=0$ (si $\Gamma_3\neq\emptyset$).

$$\therefore F_{0n\tau}'\bar{v}+2F_{0n\tau}\bar{v}'=0 \quad \text{en } \Gamma_3.$$

Nosotros supondremos

$$F_{0n\tau}=F_{0\tau\tau} \quad \text{en } \Gamma_3$$
$$F_{0n\tau}=0 \quad \text{en } \Gamma_4.$$

Como $F_{\tau\tau}=-\lambda f$, $-F_{n\tau}=-\lambda g$ en $\partial\omega$, (véase deducción de las ecuaciones) y además $F=\lambda F_0+\psi$ donde ψ satisface las condiciones homogéneas ($\psi=\psi_n=0$, lo cual implica $\psi_{n\tau}=(\psi_n)'+\kappa\psi'=0$, $\psi_{\tau\tau}=\psi''-\kappa\psi_n=0$) y entonces $-\lambda F_{0\tau\tau}=\lambda f$, $\lambda F_{0n\tau}=\lambda g$, la condición

$$F_{o\tau\tau} = F_{on\tau} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_3$$

implica que no hay fuerzas externas f y g aplicadas en el borde libre.

Análogamente la condición $F_{on\tau} = 0$ en Γ_4 implica que $\lambda g = 0$ en Γ_4.

Así pues ya hemos justificado la reformulación (12), puesto que hemos visto que dados las hipótesis

$$F_{on\tau} = F_{o\tau\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_3$$

$$F_{on\tau} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_4$$

sucede que $l_i(\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \Omega_r^{\perp}$. $i = 1, 2$.

Ahora procedamos a estudiar la ecuación

$$U + G_r U = \lambda L_r U \qquad (\text{ver pag. } 71) \quad \ldots (14)$$

Para esto hagamos 2 cosas

i) Un estudio del problema espectral para

$$U = \lambda L_r U$$

ii) Veremos que $G_r U$ es "chico" comparado con U si U es chico y daremos hipótesis para que $(G_r U, U)$ sea positivo.

Esto nos servirá para probar que si λ no es valor propio de L_r la única solución a la ecuación (14) es $U \equiv 0$, (para norma de U pequeña) y para ver que existe bifurcación cuando λ es valor propio y que las ramas se abren a la derecha. (Para definición de bifurcación ver [2] pag. 151)

Para el estudio de "i)" demostremos el siguiente

TEOREMA 8 Sea $F_0 \in H^2$ t.q. $F_{0nT} = F_{0TT} = 0$ en Γ_3, $F_{0nT} = 0$ en Γ_4, entonces

$$L_r = G_r(\cdot, F_0)\big|_{\Omega_r} : \Omega_r \longrightarrow \Omega_r$$

es compacto y autoadjunto.

DEMOSTRACIÓN La compacidad de L_r se sigue de la compacidad de G_r (ya probada).

Ahora como L_r es continuo para demostrar que es autoadjunto sólo necesitamos demostrar que es simétrico. Demos $h, g \in \Omega_r$, entonces

$$(L_r h, g)_{\Omega_r} = A(L_r h, g) = \int_\omega [h, F_0]\, g \, d\omega$$

$$= \int_\omega [g, F_0]\, h \, d\omega = A(L_r g, h) = (L_r g, h)_{\Omega_r}$$

gracias a la proposición 7 .

Q.E.D.

Ahora el espectro de operadores compactos y autoadjuntos tiene propiedades bien conocidas (ver [17] pag. 455 y [15] pag. 203), a saber es un conjunto discreto cuyo único posible punto de acumulación es el cero. Para cada eigenvalor no cero solo existe un número finito de eigenvectores linealmente independientes y además el sistema ortogonal de los eigenvectores del operador es completo.

Esta es la información que necesitabamos saber sobre el espectro de L_r.

Ahora para el estudio de "ii)" definamos

$$G_r(u,v,w) = G_r(u, \hat{G}_1(v,w))$$

(en particular $G_r u = G_r(u,u,u)$)

LEMA 9

a) $G_r(\cdot,\cdot,\cdot)$ es trilineal, es decir, es lineal en cada una de las variables

b) $\|G_r(u,v,w)\|_{H^2} \leq K \|u\|_{H^2} \|v\|_{H^2} \|w\|_{H^2}$

lo cual implica que G_r es continua en cada una de las variables.

DEMOSTRACIÓN

"a)" $G_r(\cdot,\cdot,\cdot)$ es obviamente trilineal ya que $G_r(\cdot,\cdot)$ es bilineal

"b)" ya vimos que $G_r(\cdot,\cdot)$ es bilineal y compacto, $\therefore$ bilineal y continuo.

$\therefore \|G_r(u,v)\|_{\Omega_r} \leq K \|u\|_{\Omega_r} \|v\|_{\Omega_r}$ (ver [2] pag 70)

$$\therefore \|G_r(u,v,w)\|_{\Omega_r} = \|G_r(u,\hat{G}_1(v,w))\|_{\Omega_r} \leq K' \|u\|_{\Omega_r} \|\hat{G}_1(v,w)\|_{\Omega_r}$$

$$\leq K \|u\|_V \|v\|_V \|w\|_V .$$

Para ver que G_r es continuo tenemos que

$$\|G_r(u_1,u_2,u_3) - G_r(\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3)\| =$$

$$\|G_r(u_1-\bar{u}_1, u_2, u_3) + G_r(\bar{u}_1, u_2-\bar{u}_2, u_3) + G_r(\bar{u}_1,\bar{u}_2, u_3-\bar{u}_3)\|$$

$$\leq C \|u_1-\bar{u}_1\| \|u_2\| \|u_3\| + \|\bar{u}_1\| \|u_2-\bar{u}_2\| \|u_3\| + \|\bar{u}_1\| \|\bar{u}_2\| \|u_3-\bar{u}_3\|$$

Q.E.D.

En particular tenemos que:

$$\|G_r w\|_{\Omega_r} \leq K \|w\|^3_{\Omega_r} . \qquad \ldots (15)$$

Notemos que de la proposición 7 es inmediato que si $g \in \hat{\Omega}_1$ y $h, \phi \in \Omega_r$ $(r = 1, \ldots, 7)$ entonces

$$(G_r(h,g), \phi)_{\Omega_r} = (\hat{G}_1(h,\phi), g)_{\hat{\Omega}_1} \quad \text{y}$$

$$|(G_r(u), u)|_{\Omega_r} = \|\hat{G}_1(u,u\|^2 \geq 0 \qquad \ldots (16)$$

Ahora demostremos el siguiente

<u>Lema 10</u> Sea $F_0 \in H^2(\omega)$ t.q. $F_0|_{\Gamma_4} = F_{0\eta}|_{\Gamma_4} = 0$. Sea u eigenvector de $L_r = G_r(\cdot, F_0)|_{\Omega_r}$ con eigenvalor $\lambda_0 \neq 0$. Afirmamos que $(G_r u, u) = 0$

$$\Rightarrow u \equiv 0$$

<u>Demostración</u> Supondremos que u es suficientemente regular para satisfacer las condiciones de frontera.

Primero observemos que

$$(G_r u, u) = 0 \Rightarrow \|\hat{G}_1(u,u)\|^2 = 0 \Rightarrow (\hat{G}_1(u,u), v)_{\hat{\Omega}_1} = 0 \quad \forall v \in \hat{\Omega}_1$$

$$\Rightarrow \int_\omega [u,u] v = 0 \quad \forall v \in \hat{\Omega}_1 \Rightarrow [u,u] = 0$$

$\therefore \; u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$. Ahora como

$$\underset{P^{-1}}{\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}} \underset{A}{\begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{xy} & u_{yy} \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} u_{\eta\eta} & u_{\eta\tau} \\ u_{\eta\tau} & u_{\tau\tau} \end{pmatrix}$$

y como $\det P^{-1}AP = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$, porque P es matriz unitaria $\det P = 1 = \det P^{-1}$ $\therefore$ tenemos que

$$U_{nn} U_{TT} - U_{nT}^2 = 0 . \quad \dots (17)$$

Ahora usando la proposición 7 veremos que se tiene

$$\int_\omega [u,u] F_0 = \int_\omega [F_0, u] u .$$

Como $u \in V$ entonces $u = u_n = 0$ sobre Γ_1 y $u = 0$ en Γ_2. $\therefore$ Se cumplen las dos primeras hipótesis de la proposición.

Sobre Γ_3 queremos ver que $U_{nT} = U_{TT} = 0$. Para esto observemos que $Mu = \sigma U_{TT} + U_{nn} = 0$ en Γ_3 [Si $\Omega = \hat{\Omega}$, no se necesita regularidad ya que

$$\int_\omega [u,u] \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \int_\omega \left[u, \frac{x^2+y^2}{2}\right] u = \int_\omega (u_{xx} + u_{yy}) u = \int_\omega \Delta u \cdot u$$

$$= -\int_\omega |\nabla u|^2 + 0$$

$\Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = cte. = 0$. $\therefore$ si $u \in H_0^2$ y $[u,u] = 0$ tenemos $u \equiv 0$. (ver [3]. pag. 85. cor. 2.2-1)]

$\therefore$ $-\sigma U_{TT} = U_{nn}$. Usando (17) tenemos que

$$-\sigma U_{TT}^2 - U_{nT}^2 = 0 \Rightarrow U_{TT} = U_{nT} = 0 \quad \text{en } \Gamma_3 .$$

Las condiciones $F_0|_{\Gamma_4} = F_{0n}|_{\Gamma_4} = 0$ nos anulan la $\int_{\Gamma_4}$ de la proposición 7 y $\therefore$ la igualdad es cierta.

Ahora como $[u,u] = 0$ tenemos que

$$0 = \left|\int_\omega [u,u] F_0\right| = \left|\int_\omega [F_0,u] u\right| = \left|(G_r(F_0,u),u)\right| = \left|(L_r u, u)\right| = |\lambda_0| \|u\|^2$$

$$\therefore \quad u \equiv 0$$

Q.E.D.

ESTUDIO DE LAS BIFURCACIONES

LEMA 11. Sea $\{u_j\}_{j=1}^{p}$ un conjunto ortonormal de funciones en H un espacio de Hilbert. Dada $u \in H$, u se puede escribir como $u = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ donde $(y, u_j) = 0 \ \forall j$.

Dem. Sea $\varepsilon_j = (u, u_j)$ y definamos $y = u - \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$, obviamente $u = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ y $(y, u_j) = 0 \ \forall j$ ∎

LEMA 12. Sea μ_0 un eigenvalor de L_r con eigenvectores $u_1, \dots, u_p$. Sea $P: \Omega_r \to \Omega_r$ la proyección sobre $\langle u_1, \dots, u_p \rangle^{\perp \Omega_i}$. Sea $L_r' = L_r|_{P(\Omega_r)}$. Entonces $L_r'(P(\Omega_i)) \subset P(\Omega_r)$. Además, $\exists \ \varepsilon' > 0$ t. $\forall \mu \in (\mu_0 - \varepsilon', \mu_0 + \varepsilon')$, el operador $(L_r - \mu)|_{P(\Omega_i)} = (L_r' - \mu)$ tiene inverso continuo $(L_r' - \mu)^{-1} : P(\Omega_i) \to P(\Omega_r)$ $(i = 1, 2, \dots, 6)$

Dem. Recordemos que $\sigma(L_r)$ está formado por un conjunto discreto de eigenvalores de multiplicidad finita con cero como único posible punto de acumulación. (ver [15], pág. 203). $\therefore$ podemos dar $\varepsilon' > 0$ de manera que en el intervalo $I = (\mu_0 - \varepsilon', \mu_0 + \varepsilon')$ no se encuentre ningún eigenvalor $\mu_n \neq \mu_0$. Ahora si $\mu \in I$ y $\mu \neq \mu_0$ tenemos que $(L_r - \mu)^{-1}$ existe.

Para estudiar el caso $\mu \in I$, $\mu = \mu_0$ primero demostremos que L_r' es compacto en $P(\Omega_r)$ y que $L_r(P(\Omega_r)) \subset P(\Omega_r)$.
Así, sea $y \in P(\Omega_r)$, $\forall j = 1, \dots, p$ $(L_r(y), u_j) = (y, L_r u_j) = (y, \mu_0 u_j) = 0$
$\therefore L_r y \in P(\Omega_r)$.

Sea $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $P(\Omega_r)$. Como L_r es compacto $\exists \ \{L_r u_{n_t}\}_{t=1}^{\infty} = \{L_r' u_{n_t}\}_{t=1}^{\infty}$ t. $L_r' u_{n_t} \xrightarrow{t \to \infty} v \in \Omega_r$.
Como

$$|(v, u_j)| \leq |(v - L_r' u_{n_t}, u_j)| + |(L_r' u_{n_t}, u_j)|$$
$$\leq \|v - L_r' u_{n_t}\| \longrightarrow 0,$$

resulta que, $v \in P(\Omega_r)$. $\therefore$ L'_r es compacto. Como por definición de μ_0 $(L'_r - \mu_0)u = 0$ solo cuando $u \equiv 0$, la Alternativa de Fredholm nos dice que $(L'_r - \mu_0)^{-1}$ existe y es continua. ■

El numero λ que aparece en la ecuación

$$u + G_r u - \lambda L_r u = 0,$$

mide, de alguna manera, la fuerza que estamos aplicando al borde de la placa. Veremos que si la norma de λ es menor que la norma del eigenvalor más chico de L_r, entonces la placa no se deforma, i.e. la única solución es la trivial, y también estudiaremos que sucede cuando λ es un eigenvalor, (carga de flexión). Los dos lemas anteriores nos servirán para este propósito.

TEOREMA 13. Si $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ no es eigenvalor del operador L_r entonces existen constantes $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ de manera que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $|\lambda - \lambda_0| \leq C_1$ y $u \in \Omega_r$ es tal que $\|u\|_{\Omega_r} \leq C_2$, la única solución del problema $u + G_r(u) - \lambda L_r(u) = 0$ es $u \equiv 0$. $(r = 1,2,3,4,5,6,7)$

Dem.

$$\|u + G_r(u) - \lambda L_r(u)\| = \|u - \lambda_0 L_r(u) + G_r(u) - \lambda L_r(u) + \lambda_0 L_r(u)\|$$

$$\geq \|u - \lambda_0 L_r(u)\| - \|G_r(u)\| - |\lambda - \lambda_0| \, \|L_r(u)\|$$

Como λ_0 no es eigenvalor de L_r y como L_r es auto-adjunto y compacto, λ_0 está en la resolvente de L_r y $\therefore$ el operador $(I-\lambda_0 L_r)^{-1}$ existe y es acotado, es decir, $\exists\ K_1>0$ .t.

$$\|(I-\lambda_0 L_r)^{-1}u\| \leq \frac{1}{K_1}\|u\|$$

y $\therefore$

$$a)\quad \|(I-\lambda_0 L_r)\omega\| \geq K_1\|u\|$$

también por desigualdad (15) se tiene que

$$b)\quad \|G_r(u)\| \leq K_2\|u\|^3$$

y como L_r es acotado se tiene que

$$c)\quad \|L_r(u)\| \leq K_3\|u\|$$

$\therefore$ por a), b) y c) tenemos que

$$\|u+G_r(u)-\lambda L_r(u)\| \geq K_1\|u\| + K_2\|u\|^3 + K_3\|u\|\,|\lambda-\lambda_0|$$

Ahora sea $C_1 = \frac{K_1}{4K_3}$ y $C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{1/2}$, tenemos que si $|\lambda-\lambda_0| \leq C_1$ y $\|u\| \leq C_2$ entonces

$$K_3|\lambda-\lambda_0|\,\|u\| \leq \frac{K_1}{4}\|u\|$$

y

$$K_2\|u\|^3 \leq \frac{K_1}{4}\|u\|$$

usando estas dos desigualdades tenemos que

$$K_1\|u\| - K_2\|u\|^3 - K_3|\lambda-\lambda_0|\,\|u\| \geq K_1\|u\| - \frac{K_1}{4}\|u\| - \frac{K_1}{4}\|u\| = \frac{K_1}{2}\|u\|$$

y $\therefore$ $\|u+G_r(u)-\lambda L_r(u)\| \geq K_1/2\,\|u\|$

De aquí, si u es solución del problema

$u + G_r(u) - \lambda L_r(u) = 0$ entonces $u=0$ ∎

TEOREMA 14 Sea $|M_1|$ como en el lema 1' del apéndice $\lambda_1 = 1/M_1$ entonces

$$|\lambda| \leq |\lambda_1| \Rightarrow [u + G_r(u) - \lambda L_r(u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv 0] \quad (r = 1, \ldots, 7)$$

DEMOSTRACIÓN Supongamos que u satisface $u + G_r(u) = \lambda L_r(u)$ multiplicando por u tenemos

$$(u - \lambda L_r(u), u) + (G_r(u), u) = 0$$

por el lema 1' del apéndice tenemos que

$$|\lambda_1| \leq \frac{\|u\|^2}{|(L_r(u), u)|}.$$

Si $|\lambda| < |\lambda_1|$ podemos concluir que

$$(u,u) - (\lambda L_r(u), u) \geq \|u\|^2 - |\lambda| \, |(L_r u, u)| > 0$$

Ademas $(G_r(u), u) = \| G_1(u,u) \|^2 \geq 0$ (ver (16))

$\therefore$ necesitamos que $u = 0$ para que

$$(u - \lambda L_r(u), u) + (G_r(u), u) = 0.$$

Si $\lambda = \lambda_1$ y $|\lambda_1| < \frac{\|u\|^2}{|(L_r u, u)|}$ hacemos exactamente lo que acabamos de hacer.

Si $|\lambda_1| = \frac{\|u\|^2}{|(L_r u, u)|}$ entonces sabemos que u es eigenvector de L_r, aplicamos el lema 10 y tenemos $(G_r u, u) > 0$!, $\therefore$ $u \equiv 0$.

Q.E.D.

Ahora reformulemos la ecuación $u + G_r u - \lambda L_r u = 0$ poniendo $\lambda = 1/M$, $u = 1/\sqrt{|M|} \cdot w$. tenemos: (donde sgn = signo de λ)

$$\sqrt{|M|}\, w + G_r(\sqrt{|\lambda|}\, w) = 1/M \, L_r(\sqrt{|\lambda|}\, w)$$

$$\sqrt{|\lambda|}\, w + |\lambda|^{3/2} G_r(w) = |\lambda|^{3/2} L_r(w)\, \mathrm{sgn}$$

$$\frac{|\lambda|^{1/2}}{|\lambda|^{3/2}} w = L_r(w)\, \mathrm{sgn} - G_r(w)$$

$$|\mu|\, w = L_r(w)\, \mathrm{sgn} - G_r(w)$$

$\therefore$ LA ECUACIÓN QUEDA

$$\mu w = L_r(w) - \mathrm{sgn}\, G_r(w)$$

Supondremos que:

$$F_{0_{\eta\tau}} = F_{0_{\tau\tau}} = 0 \quad \text{en } \Gamma_3$$

$$F_0 = F_{0_\eta} = 0 \quad \text{en } \Gamma_4$$

Sea $D = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists\, w_\lambda \neq 0 \text{ .t. } \lambda L_r(w_\lambda) = w_\lambda\}$

<u>TEOREMA 15</u> $\lambda_0 \in D \Rightarrow \exists\, \varepsilon, \rho > 0$ .t. $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]$ si $\lambda_0 > 0$ y $\forall \lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon]$ si $\lambda_0 < 0$
SE tiene que:

$$\left[\, \|w\| \le \rho \ \text{ y } \ \tfrac{1}{\lambda} w = L_r(w) - \mathrm{sgn}\, G_r(w) \right] \Longleftrightarrow w \equiv 0.$$

<u>DEMOSTRACIÓN</u> Sean $u_1, u_2, \ldots, u_p$ LAS eigenfunciones normalizadas correspondientes a λ.

Si $P : \Omega_r \longrightarrow \langle u_1, \ldots, u_p \rangle^{\perp \Omega_r}$ es la proyección de Ω_r en el ortogonal del espacio generado por los vectores $u_1, \ldots, u_p$ tenemos que

$$1/\lambda\, w = L_r(w) - \mathrm{sgn}\, G_r(w)$$

$$\Longleftrightarrow P(\mu w - L_r(w) + \mathrm{sgn}\, G_r(w)) = 0 \ \text{ y } \ (\mu w - L_r w + \mathrm{sgn}\, G_r w, u_j) = 0$$

$$j = 1, \ldots, p.$$

Si escribimos $w = y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j$ (ver lema 11) y sustituimos en las dos en las dos igualdades anteriores, observando que $P(L_r(y)) = L_r(y)$ y que $P(L_r(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)) = 0$, obtenemos:

$$(L_r - \mu)(y) = \operatorname{sgn} P\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)\right)$$

y también p ecuaciones

$$(\mu - \mu_0)\varepsilon_j = -\operatorname{sgn}\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), u_j\right), \quad j = 1, \dots, p$$

Sea $e^2 = \|\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\|^2$.

La aplicación $T_e y = \operatorname{sgn}(L_r - \mu)^{-1} P G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)$ está bien definida para $\mu \in (\mu_0 - \varepsilon', \mu_0 + \varepsilon')$ por el lema 12. Ahora hagamos la demostración en dos etapas

1era etapa. Demostremos la existencia de un punto fijo para T_e. Esto lo haremos de dos formas, primero usando el teorema de contracción de Banach (ver [2] pag. 112) y después usando el teorema de la función implícita.

Para aplicar el teorema de contracción de Banach demostremos que $\exists\, r_0, e_0 \in \mathbb{R}^+$ t.q. si $\|y\| \le r_0$ entonces $\|T_e y\| \le r_0$ siempre y cuando e cumpla con la condición $e \le e_0$. Para esto observemos que:

$$\|T_e y\| = \|(L_r - \mu)^{-1} \operatorname{sgn} P G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j)\| \le$$

$$\|(L_r - \mu)^{-1} P\| \, \|G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\| \le$$

$$K\|y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\|^3 \le K(\|y\| + e)^3.$$

Si $\|y\| \le r$ entonces $\|T_\epsilon y\| \le k(r+\epsilon)^3$.
Queremos ver cuando podemos tener $k(r+\epsilon)^3 \le r$.
Para esto consideremos la función $f_\epsilon(r) = k(r+\epsilon)^3 - r$
y estudiemos que condiciones hay que dar sobre ϵ
y sobre r para tener $f_\epsilon(r) \le 0$.
Ahora

$$f_\epsilon(0) = k\epsilon^3 > 0 \quad , \quad f_\epsilon(r) \xrightarrow{r\to\infty} \infty,$$

$$f_\epsilon'(0) = 3k\epsilon^2 - 1 \quad , \quad f_\epsilon'(r) = 3k(r+\epsilon)^2 - 1,$$

$$f_\epsilon'(r) = 0 \quad \text{si} \quad r+\epsilon = \pm \frac{1}{(3k)^{1/2}}$$

entonces hay un punto crítico para $r \geq 0$ solo si $\epsilon \le (3k)^{-1/2}$ (el otro es negativo). Si $\epsilon > (3k)^{-1/2}$ se tiene que $f_\epsilon' > 0$ y $\therefore$ $f_\epsilon > 0$. Así pues hay que restringir ϵ. Para tener r .t. $f_\epsilon \le 0$ necesitamos que

$$f((3k)^{-1/2} - \epsilon) \le 0.$$

Ahora ya que

$$\begin{aligned} f((3k)^{-1/2} - \epsilon) &= k((3k)^{-1/2})^3 - (3k)^{-1/2} + \epsilon \\ &= \epsilon - (1 - 1/3)(3k)^{-1/2} \\ &= \epsilon - \frac{2}{3}(3k)^{-1/2} \end{aligned}$$

entonces $\epsilon \le 2/3\,(3k)^{-1/2}$.

Sean $\epsilon_0 = 2/3\,(3k)^{-1/2}$, $r_0 = 1/3\,(3k)^{-1/2}$.

Se tiene que $k(r_0+\epsilon_0)^3 = r_0$. $\therefore$ si $\|y\| \le r_0$
$\epsilon \le \epsilon_0$ se tiene que

$$\|T_\epsilon y\| \le k(\|y\|+\epsilon)^3 \le k(r_0+\epsilon_0)^3 = r_0.$$

Ahora demostremos que T_e es una contracción

$$\|T_e y - T_e z\| = \|(L_r - \mu)^{-1} \operatorname{sgn} P(G_r(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j) - G_r(z + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j)\|$$

$$\leq K\Big(\|y-z\| \, \|y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\|^2 + \|y-z\| \, \|z + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\|^2$$

$$+ \|y-z\| \, \|y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\| \, \|z + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\|\Big)$$

$$\leq K \|y-z\| \Big(\|y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\| + \|z + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\|\Big)^2 \quad \text{(ver pag. 81)}$$

$$\leq K \left(\|y\| + \|z\| + 2e\right)^2 \|y-z\|$$

$$\leq K \left(\tfrac{2}{3}(3K)^{-1/2} + 2e\right)^2 \|y-z\| = \tilde{K} \|y-z\|$$

si $\|y\|, \|z\| \leq r_0 = \frac{1}{3}(3K)^{-1/2}$.

Ahora para tener $\tilde{K} < 1$ observemos que si $\frac{2}{3}(3K)^{-1/2} + 2e < K^{-1/2}$ entonces

$$2e < K^{-1/2}\left(1 - \tfrac{2}{3\sqrt{3}}\right).$$

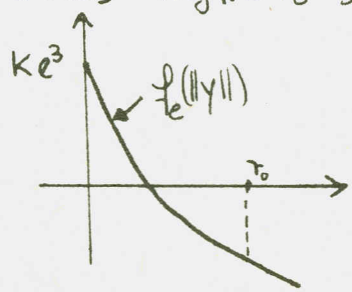
Por ejemplo si damos $e \leq e_1 = \frac{1}{3}(3K)^{-1/2} < e_0$, $\tilde{K} = \frac{16}{27} < 1$.

Así aplicando el teorema de la contracción hemos demostrado que para cada $e \leq e_1$ <u>$\exists!$ punto fijo de T_e en la bola $\|y\| \leq r_0$</u>.

Ahora el punto fijo es .+.

$$\|y\| = \|T_e y\| \leq K(\|y\| + e)^3 \implies f_e(\|y\|) > 0$$

y como además $\|y\| \leq r_0$ se tiene en la gráfica de f_e



Calculando se tiene que $f_a(2Ka^3)<0$, $\therefore$ el punto fijo es tal que

$$\underline{\|y\| \leq 2Ka^3}.$$

Ahora usaremos el teorema de la función implícita (ver [2] pag. 115 y 134) para demostrar la existencia y unicidad del punto fijo.

Para esto consideremos el mapeo

$$F(\cdot,\cdot,\cdot): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \text{Dominio}(L_r - M) \longrightarrow W_2^2$$
$$(\mu, x, y) \longmapsto (L_r - \mu)y - \operatorname{sgn} P\, G_r(x+y)$$

(Aqui $x = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j$).

Ya está probado que F es continuo. tambien se tiene que $F(\mu,0,0)=0$. (μ en una vecindad de μ_0).

Ahora calculemos las derivadas parciales de F

$$F(\mu, x+h, y+l) - F(\mu,x,y) = (L_r - \mu)l - \operatorname{sgn} P(G_r(x_1+y_1) - G_r(x+y))$$

donde $x_1 = x+h$, $y_1 = y+l$. Hagamos $x_1+y_1 = z+K$, $x+y=z$ entonces lo anterior es igual a:

$$(L_r-\mu)l - \operatorname{sgn} P[G_r(z+K, z+K, z+K) - G_r(z,z,z)]$$

$$= (L_r-\mu)l - \operatorname{sgn} P[G_r(K,z,z) + G_r(z,K,z) + G_r(z,z,K)$$
$$+ G_r(z,K,K) + G_r(K,K,z) + G_r(K,z,K) + G_r(K,K,K)]$$

(ya que G_r es trilineal).

Los últimos 4 sumandos son cuadráticos en K, mientras que los 4 primeros son lineales en K de esta observación podemos concluir que:

$$F_x(\mu,x,y)h = -\operatorname{sgn} P\left[G_r(h,z,z)+G_r(z,h,z)+G_r(z,z,h)\right]$$

$$F_y(\mu,x,y)l = (L_r-\mu)l - \operatorname{sgn} P\left[G_r(l,z,z)+G_r(z,l,z)+G_r(z,z,l)\right]$$

$$F_\mu(\mu,x,y)\nu = \nu y$$

$\therefore$ se tiene que F_x es continua y también F_μ.
Además $F_y(\mu_0,0,0)l = (L_r-\mu_0)l$ es un homeomorfismo
$\therefore$ por el teorema de la función implícita
$\exists!\; y=y(\mu,x)\in C'$ t.q. $F(\mu,x,y(\mu,x))=0$
$y(\mu,0)=0$, μ cerca de μ_0 $\quad F(\mu,0,0)=0$
en una vecindad de $(\mu_0,0)$ y y en una vecindad de cero.

Además tenemos las siguientes expresiones:

$$y_\mu(\mu,x)\nu = -\left[F_y(\mu,x,y(\mu,x))\right]^{-1}F_\mu(\mu,x,y(\mu,x))\nu \Rightarrow y_\mu(\mu,0)=0$$

$$y_x(\mu,x)\tilde{x} = -\left[F_y(\mu,x,y(\mu,x))\right]^{-1}F_x(\mu,x,y(\mu,x))\tilde{x} \Rightarrow y_x(\mu,0)=0.$$

Podemos calcular $F_{x\mu}(\mu,x,y)(\nu,h)=0$.

$$F_{y\mu}(\mu,x,y)(\nu,l) = -\nu l \Rightarrow F_{yyx}=F_{yy\mu}=F_{y\mu\mu}=0$$

$$F_{xx}(x,y,\mu)(h_1,h_2) = -\operatorname{sgn} P\big(G_r(h_1,h_2,z)+G_r(h_1,z,h_2)+G_r(h_2,h_1,z) + G_r(z,h_1,h_2)+G_r(h_2,z,h_1)+G_r(z,h_2,h_1)\big)$$

F_{yy} es similar con l_1 y l_2.

$F_{xxx}(x,y,\mu)(h_1,h_2,h_3) = F_{xx}(h_3,0,\mu)(h_1,h_2)$ ya que F_{xx} es lineal
$\therefore$ Derivadas de orden 4 son cero y F es analítica. El teorema de la función implícita nos asegura que $y(x,\mu)$ es analítica en x y μ. (ver [2] pag. 134).
Ahora daremos una expresión para $y(x,\mu)$. Para esto

consideremos el desarrollo

$y(x,\mu) = y(0,\mu) + y_x(0,\mu)x + \frac{1}{2} y_{xx}(0,\mu)x^2 + \dots$

Los dos 1eros terminos se anulan. Como

$$F_x(x,\mu,y(x,\mu))x + F_y(x,\mu,y(x,\mu))\, y_x(x,\mu)x = 0$$

(ya que $F(x,\mu,y(x,\mu)) = 0$), derivando con respecto a x tenemos

$$F_{xx}(x,\mu,y(x,\mu))(x,x) + F_{xy}(x,\mu,y(x,\mu))(x, y_x(x,\mu)x)$$
$$+ F_{xy}(x,\mu,y(x,\mu))(y_x(x,\mu)x, x) + F_{yy}(x,\mu,y(x,\mu))(y_x x, y_x(x,\mu)x)$$
$$+ F_y(x,\mu,y(x,\mu))\, y_{xx}(x,\mu)(x,x) = 0.$$

En $x=0$, $y(0,\mu)=0$ $\therefore$ $x+y=z=0$ y $F_{xx}(0,\mu,0)=0$.

también $0 = F_{xy}(0,0,\mu) = F_{yy}(0,0,\mu)$, y

$F_y(0,0,\mu)\, y_{xx}(0,\mu)(x,x) = 0 \Rightarrow y_{xx}(0,\mu) = 0$.

Derivando otra vez con respecto a x y evaluando en cero tenemos:

$F_{xxx}(0,0,\mu)(x,x,x) + F_y(0,0,\mu)\, y_{xxx}(x,x,x) = 0$ con $y_x = y_{xx} = 0$.

$\therefore$ $y_{xxx}x^3 = -(L_r-\mu)^{-1} F_{xxx}(0,0,\mu)x^3 = 6(L-\mu)^{-1} \operatorname{sgn} PG_r(x,x,x)$

$\therefore$ la expresión buscada es

$$y(x,\mu) = (L_r-\mu)^{-1} \operatorname{sgn} PG_r(x,x,x) + O(x^4). \quad \dots \quad (18)$$

Esta expresión la usaremos en el siguiente teorema

<u>2da etapa</u> Ahora demostremos que si $\mu > \mu_0$, $\mu_0 > 0$ o si $\mu < \mu_0$, $\mu_0 < 0$ y $y \in B_{r_0} = \{y \mid \|y\| \le r_0\}$ es el punto fijo de T_e, entonces $\exists\, \delta > 0$ t.q. $e < \delta \Rightarrow$

$$\left\{ \left[(\mu-\mu_0)\varepsilon_j = -\operatorname{sgn}\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j\right), v_j\right),\ j = 1,\dots,p \right] \right.$$
$$\left. \Rightarrow e = 0 \right\}$$

Multiplicando por ε_j y sumando sobre j de 1 a p obtenemos:

$$\frac{(\mu-\mu_0)\alpha^2}{\operatorname{sgn}} = -\left(G_r\left(y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right)$$

Desarrollando el lado derecho tenemos

$$\left(G_r\left(y+\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right) = R + \left(G_r \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right)$$

donde

$$R = \Big(G_r(y,y,y) + G_r\big(y,y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\big) + G_r\big(y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, y\big) + G_r\big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, y, y\big)$$
$$+ G_r\big(y,\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\big) + G_r\big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, y, \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\big) + G_r\big(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j, y\big),$$
$$\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\Big)$$

Debido a que G_r es trilineal y continua y gracias a la estimación que tenemos para la y resulta que

$$|R| \leq K'\left[\alpha^{10} + 3\alpha^8 + 3\alpha^6\right]$$

Tomando $\alpha<1$ se tiene $|R| \leq C\alpha^6$.

Ahora tomemos $v \in \mathbb{R}^p$ t.q. $\|v\|=1$. Por el lema 10 sabemos que $(G_r v, v) > 0$, por continuidad se tiene que $\exists\, K>0$ t.q.

$$(G_r v, v) \geq K > 0 \qquad \forall v \in \mathbb{R}^p,\ \|v\|=1$$

Pongamos $\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j = v\alpha$. Entonces se sigue que

$$\left(G_r\left(\sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right), \sum_{j=1}^{p}\varepsilon_j v_j\right) = (G_r(v\alpha), v\alpha)$$
$$= \alpha^4 (G_r v, v) \geq \alpha^4 K.$$

Sabemos que $|R| < C\alpha^6$, $\therefore$ $|R| < \frac{K\alpha^4}{2}$ si $\alpha^2 < \frac{K}{2C}$

De aquí se sigue que

$$-\left(G_r \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j, \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right) - R < 0$$

$$\therefore \quad -\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right) < 0$$

Ahora como siempre $\frac{(\mu-\mu_0)}{sgn} \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j^2 \geq 0$ resulta que la igualdad

$$\frac{\mu-\mu_0}{sgn} \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j^2 = -\left(G_r\left(y + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)$$

$$= -R - \left(G_r\left(\sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right), \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j u_j\right)$$

es imposible a menos que $\varepsilon_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$, lo que a su vez implica que $\|y\| = 0$ y $\therefore$ la única solución que existe es la trivial.

Como $\mu_0 > 0$, $\mu > \mu_0 \Rightarrow \lambda \leq \lambda_0$ y si $\mu_0 < 0$, $\mu \leq \mu_0 \Rightarrow \lambda \geq \lambda_0$

Q.E.D.

<u>TEOREMA 16</u> Si la multiplicidad de μ_0 es 1 ($x = \varepsilon u$, $\|u\| = 1$) entonces hay bifurcación a la derecha si $\mu_0 > 0$, a la izquierda si $\mu_0 < 0$; las soluciones bifurcadas forman una curva analítica en ε es decir:

$$sgn(\mu - \mu_0) = -\alpha_2 \varepsilon^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \varepsilon^{2n} \quad \text{con } \alpha_2 > 0$$

$$x + y = \varepsilon u + \sum_{n \geq 1} \varepsilon^{2n+1} v_n \quad \text{con } v_n \perp u.$$

y las series son convergentes para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

<u>Demostración</u>: La ecuación de bifurcación es

$$sgn(\mu - \mu_0)\varepsilon = -\alpha \varepsilon^3 - R(\varepsilon, \mu)$$

con $\alpha = (G_r(u), u) > 0$ por el lema 10

$$R = \left(G_r(y(\varepsilon u, \mu)) + \varepsilon^2 G_r(y, u, u) + 2\varepsilon G_r(y, y, u) + \varepsilon G_r(u, y, y) + 2\varepsilon^2 G_r(u, y, u), u\right)$$

Sabemos que $y(\varepsilon u, \mu)$ es analítica en ε y μ y
$y(\varepsilon u, \mu) = \varepsilon^3 (L_r - \mu)^{-1} \operatorname{sgn} P\, G_r(u,u,u) + O(\varepsilon^4)$
Si definimos $z(\varepsilon u, \mu) = \dfrac{y(\varepsilon u, \mu)}{\varepsilon^3}$

entonces $z(\varepsilon u, \mu)$ es analítica (es decir la serie es absolutamente convergente, todas las derivadas con respecto a μ y ε existen) y $z(-\varepsilon, \mu) = z(\varepsilon, \mu)$.

$$R(\varepsilon, \mu) = \varepsilon^5 (\varepsilon^4 G_r(z) + G_r(z,u,u) + 2\varepsilon^2 G_r(z,z,u) + \varepsilon^2 G_r(u,z,z) + 2 G_r(u,z,u), u)$$
$$= \varepsilon^5 H(\varepsilon, \mu)$$ con $H(\varepsilon, \mu)$ analítico con respecto a ε y μ. $R(-\varepsilon, \mu) = -R(\varepsilon, \mu)$ y $H(-\varepsilon, \mu) = H(\varepsilon, \mu)$

La ecuación de bifurcación tiene una solución $\varepsilon = 0$ (solución $x+y=0$ trivial) y si $\varepsilon \neq 0$ se escribe como

$$\operatorname{sgn}(\mu - \mu_0) + \alpha \varepsilon^2 + \varepsilon^4 H(\varepsilon, \mu) = g(\mu, \varepsilon) = 0.$$

Ahora $g(\mu_0, 0) = 0$,

$g_\mu(\mu_0, 0) = \operatorname{sgn} = \pm 1$

g es analítica en ε y μ.

$\Rightarrow$ (por el teorema de la función implícita) $\exists!\ \mu(\varepsilon)$ t.q.

$g(\mu(\varepsilon), \varepsilon) = 0$ para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Además $\mu(\varepsilon)$ es analítica en ε.

Como $g(\mu, -\varepsilon) = g(\mu, \varepsilon)$ y $\mu(\varepsilon)$ es única entonces

$\mu(\varepsilon) = \mu(-\varepsilon)$ $\therefore$ μ es par.

La serie para μ solo tiene potencias pares, además a partir de $g(\mu, \varepsilon) = 0$ el primer término de la serie es $-\alpha$.

Finalmente $y(\varepsilon v, \mu)$ es analítica en ε y μ entonces $y(\varepsilon v, \mu(\varepsilon))$ es analítica en ε con la primera potencia ε^3,

$$y(-\varepsilon v, \mu(-\varepsilon)) = -y(\varepsilon v, \mu(\varepsilon)).$$

Las potencias son impares

Esto justifica los calculos formados de esas series

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_0 + \mu - \mu_0} = \frac{1}{\mu_0\left(1 + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0}\right)} = \frac{1}{\mu_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right)^n$$

Para $\left|\frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0}\right| < 1$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\mu_0 - \mu}{\mu_0^2} + \cdots\cdots$$

$$= \lambda_0 - \frac{\mu - \mu_0}{|\mu_0|^2} + \cdots\cdots$$

$$= \lambda_0 + \frac{\alpha_2 \varepsilon^2}{|\mu_0|\,\mu_0} + \sum_{n\geq 2}^{\infty} \beta\, \varepsilon^{2n}$$

Q.E.D.

<u>TEOREMA: 17</u> $\forall \lambda_n \in \sigma(L_i)$ resulta que $(0, \lambda_n)$ es un punto de bifurcación. La bifurcacion es a la derecha si $\lambda_n > 0$ y a la izquierda si $\lambda_n < 0$. (Suponemos $\mu_0 = 1/\lambda_n > 0$. Lo mismo se hace par $\mu_0 < 0$).

<u>Demostración</u>. Demos las ecuaciones

(19) $(L_r - \mu)\, y = P G_r(y + v) \qquad v = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j v_j$

(20) $(\mu - \mu_0)\, \varepsilon_k = -(G_r(y+v), v_k) \qquad k = 1, \cdots, p$

Supongamos que ya tenemos el punto fijo y que satisface (19)

a) Demostremos primero que

$$(G_r(x),\cdot)$$

es la derivada de $(G_r(x),x)/4$. Para esto consideremos la diferencia.

$$(G_r(x+h),x+h)-(G_r(x),x)=(G_r(x+h)-G_r(x),x)+(G_r(x+h),h)$$

$$=(G_r(x+h,\hat{G}_1(x+h,x+h))-G_r(x,\hat{G}_1(x,x)),x)$$
$$+(G_r(x+h,\hat{G}_1(x+h,x+h)),h)$$

$$=\Big(G_r(x,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h))+G_r(h,\hat{G}_1(x,x)+2\hat{G}_1(x,h)$$
$$+\hat{G}_1(h,h)),x\Big)$$
$$+(G_r(x,\hat{G}_1(x,x)+2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),h)$$
$$+(G_r(h,\hat{G}_1(x+h,x+h)),h)$$

Ahora reagrupando tenemos:

$$(G_r(x,2\hat{G}_1(x,h)),x)+(G_r(h,\hat{G}_1(x,x)),x)+(G_r(x,\hat{G}_1(x,x)),h)$$

$$+\boxed{\begin{array}{l}(G_r(x,\hat{G}_1(h,h))+G_r(h,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),x)\\ +(G_r((x,2\hat{G}_1(x,h)+\hat{G}_1(h,h)),h)\\ +(G_r(h,\hat{G}_1(x+h,x+h)),h)\end{array}}$$

Usando la trilinealidad y el hecho de que G_r es acotado se tiene que los terminos encerrados en el rectangulo son menores o iguales que Kh^2.

Ahora aplicando la proposición a los 3 sumandos que no están en el rectangulo podemos escribir que la expresión de arriba es igual a

$$4(\hat{G}_1(x,h),\hat{G}_1(x,x))+O(h^2)$$

$$=4\left(Gr(x,x,x),h\right)+O(h^2)$$

Así terminamos la demostracion de a)

b) Ahora consideremos

$$g(\mu,v)=\frac{(\mu_0-\mu)\|v\|^2}{2}+\frac{((L_r\cdot\mu)y(v,\mu),y(v,\mu))}{2}$$
$$+\frac{(Gr(v+y(v,\mu),v+y(v,\mu))}{4}:\mathbb{R}^p\longrightarrow\mathbb{R}$$

μ fijo, entoces

$$g(v+h)-g(v)=(\mu_0-\mu)\left((v,h)+\frac{\|h\|^2}{2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left((L_r-\mu)y(v+h),y(v+h)\right)-\frac{1}{2}\left((L_r-\mu)y(v),y(v)\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(Gr(v+h+y(v+h)),v+h+y(v+h)\right)$$
$$+\frac{1}{4}\left(Gr(v+y(v)),y(v)+v\right). \quad\ldots(21)$$

Ahora usando el teorema de la función implícita ya se demostró que $y\in C'$. $\therefore$ podemos escribir $y(v+h)=y(v)+y'(v)h+O(h^2)$. Sustituyendo esto se obtiene que

$$g(v+h)-g(v)$$

es igual a:

$$(M-M_0)(v,h)+O(h^2)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[((L_r-M)y'(v)h,\,y(v))+((L_r-M)y(v),\,y'(v)h)\right]+O(h^2)$$
$$-\tfrac{1}{4}\left(G_r(v+h+y(v)+y'(v)h,\; v+h+y(v)+y'(v)h\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\left(G_r(v+y(v)),\,y(v)+v\right)+O(h^2).$$

Ahora usando el hecho de que L_r-M es auto-adjunto y también que a primer orden se tiene que:

$$\tfrac{1}{4}\left[(G_r(x+k,x+k)-(G_r(x),x)\right]=(G_r(x),k)$$

poniendo $x=v+y(v)$ y $k=h+y'(v)h$ podemos escribir que la expresión anterior es igual a

$$(M-M_0)(v,h)+((L_r-M)y(v),y'(v)h)-(G_r(y(v)+v),h+y'(v)h)+O(h^2)\quad\ldots(22)$$

Ahora considerando la ecuación (19) se tiene que

$$((L_r-M)y(v),y'(v)h)=(PG_r(y(v)+v),y'(v)h).$$

$y(v)\in\mathcal{R}(L_r-M)$, por definición de derivada se tiene que $y'(v)h\in\mathcal{R}(L_r-M)$ (Rango de L_r-M)

$$\therefore\quad (PG_r(y(v)+v),y'(v)h)=(G_r(y(v)+v),y'(v)h)$$

$\therefore$ de la ecuación (21) queda

$$g(v+h)-g(v)$$
$$=(M_0-M)(v,h)-(G_r(y(v)+v),h)+O(h^2)$$

Ahora tomando $h=tu_k$ donde $v=\sum_{k=1}^{p}\varepsilon_j u_j$, u_k son los eigenvectores de L_r en M_0 ortogonalizados.

$$\therefore\ g(v+\tau U_k)-g(v)$$
$$=\tau(M_0-M)\varepsilon_k-\tau(Gr(v+y(v)),U_k)+O(\tau^2)$$

$$\therefore\ \left.\frac{\partial g}{\partial \tau}\right|_{\tau=0}=(M_0-M)\varepsilon_k-(Gr(v+y(v)),U_k)$$

$\therefore$ los puntos críticos de g son soluciones de las ecuaciones (19) y (20). El inverso es obvio.

Ahora veamos que <u>g tiene en realidad puntos críticos</u>.

Para esto pongamo $\|v\|=r$. Recordando que $\|y\|\le K\|v\|$ y usando el hecho de que Gr es trilineal y acotado podemos escribir

$$g(v,M)=(M_0-M)\frac{r^2}{2}-\frac{1}{4}(Gr(v),v)+O_M(r^6).$$

Por la positividad y la homogeneidad, haciendo lo que hicimos en la 2da etapa del teorema 15 se tiene que $(Gr(v),v)>\alpha r^4$. Por trilinealidad y continuidad también se sabe que

$$|(Gr(v),v)|\le K r^4.$$

Ahora es claro que $\exists r_0$ t.q. si $r\le r_0$ entonces.

$$g(v,M_0)<-\frac{\alpha}{4}r^4+O_{M_0}(r^6)<-\frac{\alpha}{8}r^4$$

Ahora, $O_M(r^6)$ depende de M continuamente

$\therefore\ \exists\varepsilon$ t.q. $|M_0-M|<\varepsilon \Rightarrow -\frac{\alpha}{4}r^4\,O_M(r^6)<-\frac{\alpha}{8}r^4$ (si $r<r_0$)

$\therefore$ si $\|v\| = r_0$, $-1/4\,(G_r(v), v) + O(r^6) < -\frac{r}{8} r_0^4$

Si ADEMAS PEDIMOS QUE μ ESTE suficientemente cer-
CANO a μ_0 para satisfacer LA DESIGUALDAD
$\mu_0 - \mu < \frac{r_0^2 \alpha}{8}$ tendremos que si $\|v\| = r_0$,

$$g(v,\mu) = (\mu_0 - \mu)\frac{r_0^2}{2} - \frac{1}{4}(G_r(v), v) + O_\mu(r_0^6)$$

$$\leq \frac{\alpha r_0^4}{16} - \frac{\alpha}{8} r_0^4 = -\frac{\alpha r_0^4}{16}$$

$\therefore$ para μ .t. $|\mu_0 - \mu|$ ES suficientemente pequeño,
$\exists\, r_0$ .t. si $\|v\| = r_0$ tenemos que

$$g(v,\mu) \leq -\frac{\alpha r_0^4}{16} < 0$$

Por otro lado para r suficientemente pequeño
sucede que $g(v,\mu) > 0$ si $\mu_0 - \mu > 0$ ya que el
termino de orden r^2 domina.

DE Aqui Concluimos que en la bola $\|v\| \leq r_0$,
$g(v,\mu)$ tiene un máximo estrictamente positivo. (el
punto cero corresponde a un minimo local).

Notemos que si $r < r_0$ se tiene que

$$g(v,\mu) \leq (\mu - \mu_0)\frac{r^2}{2} - \frac{\alpha r^4}{2}$$

y esto es menor que cero si $r^2 > \frac{\mu - \mu_0}{2}$

$\therefore$ para el máximo se tiene que

$$r^2 = \|v\|^2 < \frac{\mu - \mu_0}{2} \longrightarrow 0 \quad \text{si } \mu \to \mu_0$$

$\therefore$ hay efectivamente un punto de bifurcación y para cada μ t.q. $\mu - \varepsilon < \mu < \mu_0$ hay un par de soluciones $\pm u$, con $\|u\| \to 0$ si $\mu \to \mu_0$.

Nota. Usando el "género" se puede probar que hay p pares de soluciones $(u, -u)$.

CONCLUSIÓN

Después de haber deducido las ecuaciones y comentado que hasta el momento no hay una deducción completamente satisfactoria estudiamos la parte lineal de éstas. Formulamos débilmente el problema y usamos el lema de Riesz para definir el operador de Green. Después se estudió la parte no lineal y se reformularon las ecuaciones de manera adecuada. Se estudió el problema espectral para el operador lineal y se demostró que los eigenvalores de L_r son puntos críticos de las fuerzas (llamadas cargas de flexión) a partir de las cuales la placa se flexiona.

APÉNDICE.

ESPACIOS DE SOBOLEV y TRAZAS.

Denotemos por α al vector cuyas coordenadas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ son enteros no negativos, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$. Denotemos también

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N} u}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_N^{\alpha_N}},$$

usando la notación $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$ tenemos

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Si $|\alpha| = 0$, $D^\alpha u = u$.

Ahora definamos el funcional $\| \ \|_{m,p}$, donde m es un entero no negativo y $1 \le p \le \infty$, así

$$\|u\|_{m,p} = \Big\{ \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p^p \Big\}^{1/p} \quad \text{si } 1 \le p < \infty$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_\infty$$

(donde $\| \ \|_p$ es la norma L^p, $1 \le p \le \infty$).

Ahora definamos

$$H^{m,p}(\Omega) = \overline{\{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{m,p}}$$

(la barra denota cerradura respecto a la norma indicada)

$$W_p^m(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \le |\alpha| \le m\}$$

aquí $D^\alpha u$ es la derivada débil de u definida como la función $v \in L^2(\Omega)$. t.

$$\int_\Omega v\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\, D^\alpha\varphi\, dx \qquad \forall \varphi\in C_0^\infty(\Omega)$$

Se tiene un teorema de Meyers y Serrin que afirma que
$H^{m,p}(\Omega) \equiv W_p^m(\Omega)$ para todo dominio Ω.
(ver [1], pag. 52). Los espacios $W_p^m(\Omega)$ son espacios de Banach (ver [1], pag. 45) en particular $W_2^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ un dominio cerrado. Para toda función continua en Ω y especialmente para toda función $u\in C^\infty(\Omega)$, los valores $u(s)$ en la frontera están dados de manera única. La función $u(s)$ la llamaremos la traza de la función $u(x)\in C^\infty(\Omega)$ en $\partial\Omega$.

La traza de la función $u(x)\in C^\infty(\Omega)$ es obviamente continua en $\partial\Omega$ y $\therefore$ es de cuadrado integrable en $\partial\Omega$ $\therefore$

$$u(x)\in C^\infty(\Omega) \Rightarrow u(s)\in L_2(\partial\Omega).$$

Ahora para extender el concepto de traza a funciones de $W_2^m(\Omega)$, $m\geq 1$, se tiene el siguiente

<u>TEOREMA</u> (VER [15] pag. 15 y [17] pag 337)
Sea Ω un dominio con una frontera de Lipschitz. Entonces existe exactamente un operador lineal acotado γ que mapea el espacio $W_2^1(\Omega)$ en el espacio $L_2(\partial\Omega)$. Para $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ se tiene $\gamma u(x) = u(s)$.
(para la definición de frontera de Lipschitz véase [17] pag. 324)

De hecho hay un teorema mas general que afirma:
Si $\Omega \in \mathcal{N}^{(m),1}$, $p>1$ (para definición de $\mathcal{N}^{(m),1}$ ver [15], pag. 55. Esto generaliza la condición de que $\partial\Omega$ sea de Lipchitz), entonces el mapeo

$$U \longmapsto \gamma(U) = (\gamma_0 U, \ldots, \gamma_{m-1} U)$$

donde $\gamma_j U = \dfrac{\partial^j U}{\partial \eta^j}$.
se extiende por continuidad a un isomorfismo y homeomorfismo de

$$W_p^m(\Omega)/_{\ker\gamma} \quad \text{sobre} \quad \prod_{k=0}^{m-1} W_p^{m-k-1/p}(\partial\Omega)$$

(ver [1] pag. 216, [15] pag. 104).
A este resultado nos referiremos continuamente llamandolo "el teorema de traza"

Los lemas que siguen se pueden encontrar en cual quier libro de Análisis Funcional.

LEMA 1' Sea A un operador autoadjunto y compacto definido en un Espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Afirmo que $\exists\ \mu_1$ eigenvalor de A t.q.

$$|\mu_1| = \sup_{u \neq 0} \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2}$$

y si μ es otro eigenvalor de A se tiene $|\mu| \leq |\mu_1|$.

Dem. Supongamos cierta la primera igualdad, entonces si μ es otro eigenvalor con eigenvector v se tiene

$$\frac{|(Av,v)|}{(v,v)} = |\mu| \leq \sup_{u \neq 0} \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2} = |\mu_1| .$$

Para demostrar la igualdad usemos el hecho de que $\exists\ \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión t.q. $\|u_n\| = 1$ y t.q.

$$|(Au_n, u_n)| \xrightarrow{n \to \infty} \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)|$$

ya que el supremo es un punto de acumulación.

Como $\|u_n\| = 1$, $\exists$ una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ t.q. $u_{n_j} \xrightarrow{j \to \infty} u$ (Lema 2'). Como A es compacto manda convergencia débil en fuerte (ver [16], pag. 144),

$$\therefore\ Au_{n_j} \longrightarrow Au.$$

Ahora

$$|(Au_{n_j}, u_{n_j})| = |(Au_{n_j} - Au, u_{n_j}) + (Au, u_{n_j})|$$

$$\therefore\ |(Au_{n_j}, u_{n_j})| \longrightarrow |(Au,u)|$$

Como $|(Au_{n_j}, u_{n_j})| \longrightarrow \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)|$

se tiene que

$$|(Au,u)| = \sup_{\|v\|=1} |(Av,v)| = \|A\|$$

De aquí si aplicamos Schwarz tenemos que
$$\|A\| = |(Au,u)| \leq \|A\| \, \|u\|^2$$
$\therefore \quad \|u\| \geq 1$

también $u_{n_j} \to u$, $\|u_{n_j}\| = 1$ entonces por el Lema 3'
$\|u\| \leq 1$ $\quad \therefore \|u\| = 1$

Ahora por Schwarz se tiene que
$$\|A\| = |(Au,u)| \leq \|Au\| \, \|u\| \leq \|A\|$$
$\therefore$ tenemos que
$$|(Au,u)| = \|Au\| \, \|u\|$$
$\therefore \exists \mu_1$ .t. $Au = \mu_1 u$ y además
$$\sup_{\|v\|=1} |(Av,v)| = |(Au,u)| = |\mu_1| \, \|u\|^2$$
$$\therefore |\mu_1| = \frac{|(Au,u)|}{\|u\|^2}$$
$\blacksquare$

<u>Lema 2'</u> Sea H un espacio de Hilbert, $\{u_n\} \subset H$ una sucesión .t. $\|u_n\| < M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\exists$ una subsucesión $\{u_{n_i}\}$ .t. $u_{n_i} \xrightarrow{i \to \infty} u$ para alguna u.

<u>Dem.</u> Por la desigualdad de Schwarz tenemos que
$$|(u_n, u_1)| \leq M^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
como $\{(u_n,u_1)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales acotada sabemos que $\exists \{u_{n_1(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesión tal que $\{(u_{n_1(i)}, u_1)\}_{i=1}^{\infty}$ converge. Ahora consideremos la sucesión $\{(u_{n_1(i)}, u_2)\}_{i=1}^{\infty}$ como $|(u_{n_1(i)}, u_2)| \leq M^2$ resulta que $\exists \{u_{n_2(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{u_{n_1(i)}\}$ .t. $\{(u_{n_2(i)}, u_2)\}$ converge. Siguiendo

así encontramos subsucesiones $\{u_{n_k(i)}\}$ de manera que $\{u_{n_{k+1}(i)}\}$ es subsucesión de $\{u_{n_k(i)}\}$ y además $\{(u_{n_k(i)}, u_k)\}$ converge cuando $i \to \infty$. En particular $\{(u_{n_k(i)}, u_j)\}$ converge para $j = 1, 2, \ldots, k$.

Ahora usaremos el conocido truco de diagonalización y consideraremos la sucesión $\{u_{\hat{n}_k(i)}\}$ donde $\hat{n}(k) = n_k(k)$.

Entonces $u_{\hat{n}(k)}, u_{\hat{n}(k+1)} \ldots\ldots$ es una subsucesión de $\{u_{n_k(i)}\}$ de manera que $\{(u_{\hat{n}(i)}, u_k)\}$ converge cuando $i \to \infty$ $\forall k$.

Ahora $\{(u_{\hat{n}(i)}, w)\}$ converge para $w = \sum_{i=1}^{N} c_i u_i$.

Sea $W = \langle u_1, u_2, \ldots \rangle$, como W es cerrado por definición y por lo tanto completo, dada $w \in W$ existe una sucesión $\{w_i\}$ de combinaciones lineales finitas de u_j tal que $w_i \to w$ en $\mathcal{H}$.

Observemos que

$$(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w) = (u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w - w_i) + (u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w_i),$$

sea $\varepsilon > 0$ y sea i t.q. $\|w - w_i\| \leq \frac{\varepsilon}{4M}$, entonces

$$|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w - w_i)| \leq \|u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}\| \, \|w - w_i\| \leq 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea N t.q. $|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w_i)| \leq \varepsilon/2$ para $j, l > N$ entonces

$|(u_{\hat{n}(j)} - u_{\hat{n}(l)}, w)| < \varepsilon$ si $j, l > N$ y $\therefore$ es de Cauchy y por completez

$(u_{\hat{n}(j)}, w)$ converge cuando $j \to \infty$ $\forall w \in W$.

Para $v \in W^\perp$, $(u_{\hat{n}(j)}, v) = 0$ por definición de W.

Para $v \in W_2^2$ tenemos que $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in W$, $v_2 \in W^\perp$

$\therefore$ $(u_{\hat{n}(j)}, v) = (u_{\hat{n}(j)}, v_1)$ que converge cuando $j \to \infty$.

Ahora sea $L_{\hat{n}(j)} v = (u_{\hat{n}(j)}, v)$ funcional lineal acotado con $\|L_{\hat{n}(j)}\| = \|u_{\hat{n}(j)}\| \leq M^2$.

Sea $Lv = \lim_{i\to\infty} (u_{\hat{n}(i)}, v)$. Es fácil ver que L es lineal y acotado. Ahora usando el lema de Riesz se tiene que $\exists\, u \in W_2^2$ t.q. $Lv = (u,v)$ y

$$\therefore \quad (u_{\hat{n}(i)}, v) \xrightarrow[i\to\infty]{} (u,v) \quad \forall v \in W_2^2$$

i.e. $$u_{\hat{n}(i)} \xrightarrow[i\to\infty]{} u.$$

■

<u>Lema 3'</u> Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, $\{u_n\} \subset \mathcal{H}$.

$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \implies \|u\| \leq \underline{\lim}\, \|u_n\|$$

<u>Dem.</u> Sea $\|u\| \neq 0$, como $u_n \to u$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ t. $|(u,u) - (u_n,u)| \leq \varepsilon'$ si $n > N$ donde $\varepsilon' = \|u\|\varepsilon$

$$\therefore \quad |(u,u)| - |(u_n,u)| \leq \varepsilon' \quad \text{si } n > N$$

$$\therefore \quad \|u\|^2 \leq \|u\|\varepsilon + |(u_n,u)| \leq \|u\|\varepsilon + \|u_n\|\,\|u\|$$

Dividiendo entre $\|u\|$ obtenemos:

$$\|u\| \leq \varepsilon + \|u_n\| \quad \forall n > N$$

$$\therefore \quad \|u\| \leq \varepsilon + \operatorname{Inf}_{k>N} \|u_k\|$$

$$\leq \varepsilon + \sup_N \operatorname{Inf}_{k>N} \|u_k\|$$

$$= \varepsilon + \underline{\lim}\, \|u_n\|.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitraria concluimos que

$$\|u\| \leq \underline{\lim}\, \|u_n\|.$$

Cuando $\|u\| = 0$, el resultado es trivial.

■

<u>LEMA DE RIESZ</u>. Para cada T funcional lineal continuo ($T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert), $\exists !\ y_T \in \mathcal{H}$ t.q. $T(x) = (y_T, x)$ $\forall x \in \mathcal{H}$. Además $\|y_T\|_{\mathcal{H}} = \|T\|$. (ver [15], pag. 43).

Otro resultado útil para probar existencia de soluciones en ecuaciones diferenciales es:

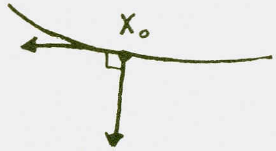
<u>TEOREMA 4'</u> Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con $\partial\Omega$ en C^1 entonces:

Si $m > k \geq 0$ entonces $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^k(\Omega)$ y la inclusión es compacta. (ver [9]. pag. 33) y (ver [1], pag. 144)

Ahora procedamos a calcular formulas para las derivadas normales y tangenciales que aparecen en el texto.

Supongamos que $\partial\omega$ es C^∞ y tomemos una vecindad de $\partial\omega$ constituida por los puntos (x,y) t.q. la distancia de (x,y) a $\partial\omega$ es menor o igual que ε_0. Si ε_0 es pequeño cada punto de esa vecindad está dado por

$$(x,y) = \bar{x} = x_0 - \varepsilon \eta_0 \ , \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$$



y para cada punto se pueden calcular las derivadas direccionales $U_T(x_0-\varepsilon\eta_0)$ y $U_\eta(x_0-\varepsilon\eta_0)$

$$U_T(x) = \lim_{h\to 0} \frac{U(x+hT)-U(x)}{h}$$

$$= \nabla U \cdot T$$

$$= -U_x(x)\eta_2 + U_y(x)\eta_1$$

$$U_\eta(x) = \nabla U(x)\cdot\eta$$

$$= U_x(x)\eta_1 + U_y(x)\eta_2$$

también para cada punto en la vecindad se puede calcular

$$U_{\eta\eta} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U_\eta(x+\varepsilon\eta)-U_\eta(x)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U_n(x+\varepsilon\eta)-U_x(x)}{\varepsilon}\eta_1 + \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U_\eta(x+\varepsilon\eta)-U_y(x)}{\varepsilon}\cdot\eta_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}(U_x)\eta_1 + \frac{\partial}{\partial\eta}(U_y)\eta_2$$

$$= (U_{xx}\eta_1 + U_{xy}\eta_2)\eta_1 + (U_{yx}\eta_1 + U_{yy}\eta_2)\eta_2$$

$$\therefore\ U_{\eta\eta} = U_{xx}\eta_1^2 + 2U_{xy}\eta_1\eta_2 + U_{yy}\eta_2^2$$

$$U_{\eta T} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{U_T(x+\varepsilon\eta)-U_T(x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\left(\frac{U_x(x+\varepsilon\eta)-U_x(x)}{\varepsilon}\right)\eta_2\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{U_y(x+\varepsilon\eta)-U_y(x)}{\varepsilon}\right)\eta_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta}(-U_x)\eta_2 + \frac{\partial}{\partial\eta}(U_y)\eta_1$$

$$= -(U_{xx}\eta_1 + U_{xy}\eta_2)\eta_2 + (U_{yx}\eta_1 + U_{yy}\eta_2)\eta_1$$

$$\therefore\ U_{\eta T} = U_{xy}(\eta_1^2 - \eta_2^2) - \eta_1\eta_2(U_{xx} - U_{yy})$$

$$U_{TT} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_T(x+\varepsilon T) - U_T(x)}{\varepsilon}$$

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_x(x+\varepsilon T) - U_x(x)}{\varepsilon} \eta_2 + \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{U_y(x+\varepsilon T) - U_y(x)}{\varepsilon} \eta_1$$

$$= -\frac{\partial}{\partial T}(U_x)\eta_2 + \frac{\partial}{\partial T}(U_y)\eta_1$$

$$= -(-U_{xx}\eta_2 + U_{xy}\eta_1)\eta_2 + (-U_{yx}\eta_2 + U_{yy}\eta_1)\eta_1$$

$$\therefore U_{TT} = U_{xx}\eta_2^2 + U_{yy}\eta_1^2 - 2U_{xy}\eta_1\eta_2$$

Ahora calcularemos U_{xx}, U_{yy}, U_{xy} en función de $U_{\eta\eta}, U_{TT}, U_{\eta T}$.
Observemos que $U_{\eta\eta} + U_{TT} = U_{xx} + U_{yy}$ y $\eta_1^2 + \eta_2^2 = 1$.

$$U_{\eta\eta} - U_{TT} = (U_{\eta\eta} - U_{yy})(\eta_1^2 - \eta_2^2) + 4\eta_1\eta_2 U_{xy}$$

$$= (U_{xx} - U_{yy})\frac{1}{(\eta_1^2 - \eta_2^2)} + \frac{4\eta_1\eta_2}{\eta_1^2 - \eta_2^2} U_{\eta T}$$

$$\Rightarrow U_{xx} - U_{yy} = (\eta_1^2 - \eta_2^2)(U_{\eta\eta} - U_{TT}) - 4\eta_1\eta_2 U_{\eta T}$$

$$\Rightarrow U_{\eta\eta} = \frac{1}{2}\left(U_{\eta\eta}(1+\eta_1^2 - \eta_2^2) + U_{TT}(1-\eta_1^2+\eta_2^2) - 4\eta_1\eta_2 U_{\eta T}\right)$$

$$\therefore \underline{U_{xx} = U_{\eta\eta}\eta_1^2 + U_{TT}\eta_2^2 - 2U_{\eta T}\eta_1\eta_2}$$

$$U_{yy} = \tfrac{1}{2}\left(U_{\eta\eta}(1-\eta_1^2+\eta_2^2) + U_{TT}(1+\eta_1^2-\eta_2^2) + 4\eta_1\eta_2 U_{\eta T}\right.$$

$$\therefore \underline{U_{yy} = U_{\eta\eta}\eta_2^2 + U_{TT}\eta_1^2 + 2U_{\eta T}\eta_1\eta_2}$$

$$U_{xy} = \frac{1}{\eta_1^2 - \eta_2^2}\left(U_{\eta T} + (U_{xx} - U_{yy})\eta_1\eta_2\right)$$

$$= \eta_1\eta_2(U_{\eta\eta} - U_{TT}) + \frac{1}{\eta_1^2 - \eta_2^2} U_{\eta T}(1 - 4\eta_1^2\eta_2^2)$$

$$\therefore U_{xy} = \eta_1\eta_2(U_{\eta\eta} - U_{TT}) + (\eta_1^2 - \eta_2^2)U_{\eta T}$$

Estas relaciones se pueden expresar en forma matricial así:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 \\ -\eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{xx} & U_{xy} \\ U_{xy} & U_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\eta\eta} & U_{\eta T} \\ U_{\eta T} & U_{TT} \end{pmatrix}.$$

también tenemos que:

$$\frac{d}{ds}(w_\eta) = \frac{d}{ds}(w_x\eta_1 + w_y\eta_2)$$

$$= (w_{xx}(-\eta_2) + w_{xy}\eta_1)\eta_1 + (w_{xy}(-\eta_2) + w_{yy}\eta_1)\eta_2 + w_x\dot{\eta}_1 + w_y\dot{\eta}_2$$

$$= (w_{yy} - w_{xx})\eta_1\eta_2 + w_{xy}(\eta_1^2 - \eta_2^2) + (\nabla w)\cdot\dot{\eta}$$

$$= w_{\eta T} - K w_T$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(w_\eta) = w_{\eta T} - K w_T \qquad K = \text{curvatura de } \partial\omega$$

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds}(s')\right) = \frac{d}{ds}\left(\nabla(w(s))\cdot T(s)\right)$$

$$= \frac{d}{ds}(\nabla w)\cdot T + \nabla w \cdot \frac{dT}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 w}{ds^2} = \frac{d}{ds}\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}\cdot T + K w_\eta = \begin{pmatrix} w_{xx}\dot{x} + w_{yx}\dot{y} \\ w_{xy}\dot{x} + w_{yy}\dot{y} \end{pmatrix}\cdot T + K w_\eta$$

$$= \begin{pmatrix} w_{xx}(-\eta_2) + w_{yx}\eta_1 \\ w_{xy}(-\eta_2) + w_{yy}\eta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \end{pmatrix} + K w_\eta$$

$$= w_{TT} + K w_\eta$$

(es decir $\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial T}\right) \neq \frac{\partial^2 w}{\partial T^2}$)

Ahora calcularemos las expresiones MU, NU en función de derivadas normales y derivadas respecto a la longitud de arco. Para esto consideremos lo siguiente:

$$U_{\eta TT} = (\nabla U_{xx})\cdot\eta\,\eta_2^2 + (\nabla U_{yy})\cdot\eta\,\eta_1^2 - 2(\nabla U_{xy})\cdot\eta\,\eta_1\eta_2$$

ya que η_1, η_2 son fijos aquí.

$$U_{\eta TT}(x) = U_{xxx}\,\eta_1\eta_2^2 + U_{yyy}\,\eta_2\eta_1^2 + U_{xxy}(\eta_2^3 - 2\eta_1^2\eta_2) + U_{xyy}(\eta_1^3 - 2\eta_1\eta_2^2)$$

$\forall x = x_0 - \varepsilon\eta.$

Ahora calculemos

$$\frac{d}{ds}(U_{\eta T}(x_0)) = \frac{d}{ds}\left(U_{xy}(\eta_1^2 - \eta_2^2) - \eta_1\eta_2\left(U_{xx} - U_{yy}\right)\right)$$

con $U_{xy}(x(s), y(s))$ tenemos

$$\frac{d}{ds}U_{xy} = U_{xxy}\,\dot{x} + U_{xyy}\,\dot{y} \quad \text{donde} \quad \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\eta_2\\ \eta_1\end{pmatrix} = T$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(U_{\eta T}(x_0)) &= U_{xxy}\,\eta_2(\eta_2^2 - \eta_1^2) + U_{xyy}\,\eta_1(\eta_1^2 - \eta_2^2) \\ &\quad - U_{xxx}(-\eta_2)(\eta_1\eta_2) - U_{xxy}\,\eta_1^2\eta_2 - U_{yyx}\,\eta_2^2\eta_1 + U_{yyy}\,\eta_1^2\eta_2 \\ &\quad + 2U_{xy}(\eta_1\dot{\eta}_1 - \eta_2\dot{\eta}_2) - (\eta_1\dot{\eta}_2 + \eta_2\dot{\eta}_1)(U_{xx} - U_{yy}) \\ &= U_{xxx}\,\eta_1\eta_2^2 + U_{yyy}\,\eta_1^2\eta_2 + U_{xxy}(\eta_2^3 - 2\eta_2\eta_1^2) \\ &\quad + U_{xyy}(\eta_1^3 - 2\eta_1\eta_2^2) + 2U_{xy}(2k\eta_1\eta_2) \\ &\quad - (-\eta_1 k\eta_1 + \eta_2 k\eta_2)(U_{xx} - U_{yy})\end{aligned}$$

usando $\dfrac{dt}{ds} = k\eta$ entonces $\begin{cases}\dfrac{d(-\eta_2)}{ds} = k\eta_1\\[2mm] \dfrac{d\eta_1}{ds} = k\eta_2\end{cases}$ entonces $\begin{cases}\dfrac{d\eta_2}{ds} = -k\eta_1\\[2mm] \dot{\eta}_1 = k\eta_2\end{cases}$

con lo cual:

$$\frac{d}{ds} U_{\eta\tau}(x_0) = U_{\eta\tau\tau}(x_0) + 4K\eta_1\eta_2 U_{xy} + K(\eta_1^2-\eta_2^2)(U_{xx}-U_{yy}).$$

Se tiene que

$$
\begin{aligned}
&4U_{xy}\eta_1\eta_2 + (\eta_1^2-\eta_2^2)(U_{xx}-U_{yy}) = \\
&= 4\eta_1\eta_2\left(\eta_1\eta_2(U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau}) + (\eta_1^2-\eta_2^2)U_{\eta\tau}\right) \\
&\quad + (\eta_1^2-\eta_2^2)\left(U_{\eta\eta}(\eta_1^2-\eta_2^2) + U_{\tau\tau}(\eta_2^2-\eta_1^2) - 4U_{\eta\tau}\eta_1\eta_2\right) \\
&= 4\eta_1^2\eta_2^2(U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau}) + (\eta_1^2-\eta_2^2)^2(U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau}) \\
&= (U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau})(\eta_1^2+\eta_2^2)^2 \\
&= U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{\eta\tau\tau} &= \frac{d}{ds}(U_{\eta\tau}) - K(U_{\eta\eta}-U_{\tau\tau}) \\
&= \frac{d}{ds}(U_n' + KU') - K(U_{\eta\eta} - U'' + KU_n') \\
&= U_n'' + K'U' + KU'' - KU_{\eta\eta} + KU'' - K^2U_n'.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ U_{\eta\tau\tau} = U_n'' + 2KU'' + K'U' - KU_{\eta\eta} - K^2U_n'$$

Así pues podemos escribir

$$
\begin{aligned}
NU &= U_{\eta\eta\eta} + U_{\eta\tau\tau} + (1-\sigma)(U_{\eta\tau})' \\
&= U_{\eta\eta\eta} - KU_{\eta\eta} + U_\eta'' + K^2U_n' + 2KU'' + K'U' + \\
&\quad (1-\sigma)(U_n'' + K'U' + KU')
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \underline{NU = U_{\eta\eta\eta} - KU_{\eta\eta} + (2-\sigma)U_\eta'' - K^2U_n' + (3-\sigma)KU'' + (2-\sigma)K'U'}. \quad \text{---a)}$$

$$\underline{MU = U_{\eta\eta} - \sigma KU_\eta + \sigma U''} \quad \text{---b)}$$

Ahora estudiemos un poco los espacios H^s con s fraccionario. Si h está en W_2^2 por el teorema de traza sucede que $h|_{\partial\omega} \in H^{3/2}(\partial\omega)$, $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \in H^{1/2}(\partial\omega)$, donde en este caso podemos definir estos espacios motivados en lo que sigue:

$\partial\omega$ es una curva simple cerrada $\therefore$ si $f \in L^2(\partial\omega)$ podemos escribir $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ t.q. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

Podemos usar series de Fourier gracias a la periodicidad. Estamos suponiendo que la longitud total de $\partial\omega$ es 2π.

Si $f \in H^1$ integrando por partes se tiene que

$$(f', (e^{in\theta})') = -(f, (e^{in\theta})'') + 0$$

ya que $f(0) = f(2\pi)$ y $H^1 \subset C^{0,1/2}(0, 2\pi)$

$$\therefore \; (f', (e^{in\theta})') = n^2 (f, e^{in\theta})$$

$$(f, e^{in\theta}) = (f, e^{in\theta}) + (f', (e^{in\theta})') = (1+n^2)(f, e^{in\theta})$$

De aquí notemos que $f \perp_1 e^{in\theta} \iff f \perp_0 e^{in\theta} \iff f = 0$

$\therefore$ $e^{in\theta}$ es base de H^1.

Ahora

$$\left(f, \sum_{-N}^{N} b_n e^{in\theta}\right)_1 = \sum_{-N}^{N} (1+n^2)(f, e^{in\theta})\overline{b_n},$$

$$f \in H^1 \subset L^2 \Rightarrow f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

$$\therefore \left(f, \sum_{-N}^{N} b_n e^{in\theta}\right) = \sum_{-N}^{N} (1+n^2) \frac{a_n \overline{b_n}}{2}$$

$$\therefore f, g \in H^1 \Rightarrow (f, g)_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (1+n^2) a_n \overline{b_n}$$

$$\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (1+n^2) |a_n|^2$$

En general definamos para $\Delta > 0$

$$H^{\pm\Delta}(\partial\omega) = \left\{ f \in L^2(\partial\omega) \mid \frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}(1+n^2)^{\pm\Delta}|a_n|^2 < \infty \right\}$$

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}.$$

y producto escalar equivalente. En particular quedan definidos los espacios $H^{3/2}(\partial\omega)$, $H^{1/2}(\partial\omega)$.

Veamos que si $f \in H^{-1/2}(\partial\omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\omega)$ se tiene

$$\left|\int_{\partial\omega} fg\right| < \infty$$

Si tomamos $f_N = \sum_{-N}^{N} a_n e^{in\theta}$, $g_N = \sum_{-N}^{N} b_n e^{in\theta}$ tenemos que

$$\left|\int_{\omega} f_N g_N\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{-N}^{N} a_n \bar{b}_n\right| = \left|\sum_{-N}^{N} a_n (1+n^2)^{-1/4}\, \bar{b}_n (1+n^2)^{1/4}\right|$$

$$\leq \left(\sum_{-N}^{N} |a_n|^2 (1+n^2)^{-1/2}\right)^{1/2} \left(\sum_{-N}^{N} |b_n|^2 (1+n^2)^{1/2}\right)^{1/2}$$

(Desigualdad de Schwarz)

Ahora tomando el límite obtenemos

$$\left|\int_{\partial\omega} fg\right| \leq \|f\|_{-1/2}\,\|g\|_{1/2} < \infty$$

también convenzámonos que podemos definir

$\frac{df}{d\theta} \in H^{-1/2}$ para $f \in H^{1/2}$. $f = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$

tomemos $f_N = \sum_{-N}^{N} a_n e^{in\theta}$, $\frac{df_N}{d\theta} = \sum_{-N}^{N} in a_n e^{in\theta}$, ahora demostremos que la sucesión $\left\{\frac{df_N}{d\theta}\right\}_{N=1}^{\infty}$ converge en $H^{-1/2}$.

Pongamos $N = M+K$ y calculemos:

$$\left\| \frac{df_N}{d\theta} - \frac{df_M}{d\theta} \right\|^2_{H^{-1/2}} = \left\| \sum_{M+1}^{M+K} i n a_n e^{in\theta} + \sum_{-M-K}^{-M-1} i n a_n e^{in\theta} \right\|^2_{H^{-1/2}}$$

$$= \sum_{M+1}^{M+K} (1+n^2)^{-1/2} n^2 |a_n|^2 + \sum_{-M-K}^{-M-1} (1+n^2)^{-1/2} n^2 |a_n|^2$$

$$\leq \sum_{M+1}^{M+K} (1+n^2)^{1/2} |a_n|^2 + \sum_{-M-K}^{-M-1} (1+n^2)^{1/2} |a_n|^2$$

$$= \| f_N - f_M \|^2_{H^{1/2}} \xrightarrow{N \to \infty} 0 \quad \text{EN } H^{1/2}$$

$\therefore \left\{ \frac{df_N}{d\theta} \right\}$ ES DE Cauchy y $\therefore$ convergente en $H^{-1/2}$.

AL límite lo llamamos $\frac{df}{d\theta}$.

[EN lugar DE θ PONDREMOS s para QUE QUEDE claro QUE TOMAMOS DERIVADAS RESPECTO A LA longitud DE ARCO]

BIBLIOGRAFIA

[1] ADAMS, Robert A.
Sobolev Spaces
Academic Press, 1975

[2] Berger, Melvin S.
Nonlinearity and Functional Analysis
Academic Press

[3] Ciarlet Philippe G. and Rabier Patrick
Les equations de Von-Kármán
Lecture Notes in Math. #826, Springer-Verlag

[4] Contemporary Developments in Continuum Mechanics and Partial Differential Equations.
North-Holland Publishing Company 30
Editors: G.M. de la Penha y L.A.J. Madeiros

[5] Courant R. y John F.
Introduction to Calculus and Analysis. Vol II
Wiley-Interscience

[6] Do Carmo, Manfredo
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice-Hall, Inc.

[7] DYM CLIVE L. y SHAMES I. H.
SOLID MECHANICS, A VARIATIONAL APPROACH
Mc GRAW-Hill BOOK COMPANY

[8] HAND Buch DER Physik

[9] IZE JORGE
TEORÍA DE EXISTENCIA PARA ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES.
COMUNICACIONES TÉCNICAS, IIMAS.

[10] LANDAU L. D. AND LIFSHITZ E. M.
theory of elasticity
PERGAMON PRESS

[11] LANGHAAR HENRY L.
Energy Methods in Applied Mechanics
John Wiley AND SONS, INC.

[12] LOVE A. E. H.
A treatise on the mathematical theory of elasticity
DOVER

[13] MIKHLIN S. G.
Mathematical Physics AN ADVANCED COURSE
North - Holland Publishing Company

[14] MIKHLIN S.G.
the Problem of the minimum of a quadratic functional.
Holden-Day Series in Math. Phisics.

[15] Nečas, Jindřich
Les methodes directes en théorie des equations elliptiques
Academie, Editeurs Prague.

[16] Reed Michael and Simon Barry
Methods of Modern Mathematical Physics
vol. I. Functional Analysis.
Academic Press.

[17] Rektorys Karel
Variational Methods in Mathematics Science and Engineering.
D. Reidel Publishing, Company

[18] Timoshenko Stephen P. and Woinowsky-Krieger S.
theory of plates and Shells
Mc Graw-Hill, Kogakusha.

ARTÍCULOS.

[1'] Berger Melvyn S.
Communications on Pure and Applied Math.
vol. XX, (1967) pag. 687-719

[2'] Berger Melvyn and Fife Paul C.
Communications on Pure and Applied Math.
vol. XXI (1968) pag. 227-241

[3'] Föppl, A.
Vorlesungen ü technische Mechanik,
Bd. 5, Leipzig, 1907

[4'] Friedrichs K.O. & Dressler
A Boundary-layer theory for elastic plates.
Communications on Pure and Applied Math.
vol. XIV. (1961) pag. 1-33

[5'] Friedrichs K.O. & Stoker J.J
The non-linear boundary value problem of the Buckled Plate.
American Journal Math. vol. 63. (1941) pag. 839-888

[6'] Friedrichs, K.O.
Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates.
Proc. Symp. Appl. Math. vol. 3 elasticity (1950)

[7'] John Fritz
Estimates for the Derivatives of the Stresses in a thin Shell and Interior Shell equations
Communications on Pure and Applied Math.
Vol. XVIII (1965) pag. 235-267

[8'] Kárman th. v.
Ency. d. Math. Wiss.,
Bd. IV, 2, II Leipzig 1910