Estabilidad de tipos espectrales bajo perturbaciones locales

Carmen Alicia Martínez Trigo

IIMAS, UNAM, Ciudad Universitaria, Mexico

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo trata sobre sistemas cuánticos en dimensión 1. Estos sistemas están descritos por operadores de Sturm-Liouville en el caso en que se esté en espacios de Hilbert como $L^2(\mathbb{R})$ o $L^2(\mathbb{R}^+)$, o por sus equivalentes en los espacios $l_2(\mathbb{Z})$ o $l_2(\mathbb{N})$, las matrices de Jacobi. Se sabe que si los operadores definidos en un intervalo finito, están definidos en los extremos, el espectro es solamente puntual, pero si los operadores presentan discontinuidades, o están definidos en la semirecta, es posible tener todos los tipos espectrales presentes. Sin embargo, estos tipos espectrales no son siempre estables, ya que bajo algunos tipos de perturbaciones, como por ejemplo locales, o de rango uno, puede haber inestabilidad, en especial del espectro singular [dR1, dR2].

Por otro lado, sí es posible obtener un tipo de estabilidad si uno se concentra en familias de operadores, y en propiedades espectrales que sean válidas para muchos elementos de estas familias, en el sentido de la teoría de la medida. En particular, es posible demostrar esto si las familias están obtenidas por perturbaciones locales. Para dar un ejemplo concreto, pensemos en una familia de matrices de Jacobi semiinfinitas de la forma $H_j(\lambda) = H + \lambda W_j$, $j = 1, 2$, donde H está en el caso de punto límite y W_j es un potencial estrictamente positivo en las primeras N entradas, un teorema que se prueba en este trabajo (véase el Teorema 16) dice:

Teorema *Si existe un conjunto B_1 de medida positiva de Lebesgue tal que para toda $\lambda \in B_1$ el operador $H_1(\lambda)$ tiene espectro singular, entonces existe un conjunto B_2 de medida positiva de Lebesgue para el cual el operador $H_2(\lambda)$ con $\lambda \in B_2$ tiene también espectro singular.*

Las técnicas utilizadas en este trabajo tienen que ver con la medida promedio de una medida espectral ρ_λ que está definida como

$$\rho = \int d\lambda \, \rho_\lambda \, .$$

Este tipo de técnicas con medidas promedio, se han utilizado por largo tiempo, como por ejemplo, en [CL, Sim1], y es muy conocido el resultado sobre la continuidad absoluta de la medida promedio con respecto a la medida de Lebesgue. Lo relevante en este trabajo es que se logran dar condiciones bajo las cuales se puede probar la equivalencia de la medida promedio y la medida de Lebesgue.

En primera instancia se prueba para el caso de las matrices de Jacobi, la equivalencia de las medidas considerando el promedio sobre un parámetro. Esto puede ser aplicado, por ejemplo, a operadores de Birman-Schwinger. Sin embargo, no siempre es suficiente el promedio en un parámetro para obtener la equivalencia de medidas, y en algunos casos existen varios parámetros sobre los cuales se puede promediar. Este caso es también analizado, y se logran establecer las condiciones bajo las cuales se da la equivalencia entre la medida de Lebesgue y la medida promedio. Análogamente para el caso continuo se prueba un teorema de equivalencia entre la medida de Lebesgue y la medida promedio en un parámetro para operadores de Schrödinger de un tipo muy particular, que son los operadores de corrimiento. Aquí el parámetro en el cual se promedia es el corrimiento.

Ya teniendo los teoremas de equivalencia entre la medida espectral y la de Lebesgue, la forma como se aplican éstos para probar la estabilidad de la parte singular es haciendo una conexión con las soluciones subordinadas. Esto es posible ya que el conjunto S de soluciones subordinadas es un soporte de la parte singular de la medida espectral y no depende de λ sino del comportamiento de las soluciones en infinito.

El trabajo está organizado de la siguiente forma, el primer capítulo es una introducción al trabajo en la que se da un bosquejo de los temas que se tratarán y se explica la organización del mismo. El segundo capítulo comprende el caso de las matrices de Jacobi, en el cual se define el operador, conceptos importantes que se aplican en su análisis, como son el concepto de matrices de transferencia, la función de Green y las variables de Prüfer. Se prueban propiedades, enunciadas en proposiciones, que serán herramientas importantes en la demostración de los teoremas centrales. A continuación, se prueban los teoremas principales tanto para la medida promedio en un parámetro como para la medida promedio en varios parámetros, y como sección final en este capítulo se dan tres aplicaciones de estos teoremas a la teoría espectral en donde se pueden establecer varios criterios para tener estabilidad del espectro singular en conjuntos de parámetros con medida de Lebesgue positiva. El tercer capítulo comprende el caso del operador de Schrödinger, para el cual primeramente se define el operador con el que se trabajará, y conceptos asociados a él y las herramientas que se utilizarán en la demostración del teorema principal, y posteriormente se prueba el teorema principal y se da una aplicación a la teoría espectral. Los capítulos posteriores son Apéndices sobre la notación de Dirac, utilizada en el capítulo 2, transformaciones de Möbius, medidas espectrales y soluciones subordinadas. En cada uno se enuncian resultados conocidos de la teoría que fueron utilizados en algún momento para las pruebas de las proposiciones y teoremas de este trabajo.

Con los resultados de este trabajo se escribieron dos artculos, uno tratando el caso de las matrices de Jacobi y otro el caso de Operador de Schrödinger que ya fueron publicados y se encuentran citados en la bibliografía.

Capítulo 2

Matrices de Jacobi

2.1. Fórmulas preliminares

2.1.1. Definición del Operador

Sean $\{t_n\}_{1\leq n\leq N}$ una sucesión de valores positivos y $\{v_n\}_{1\leq n\leq N}$ una sucesión de reales y definamos un operador H^N del espacio de Hilbert $l^2(\{1,...,N\})$ con N un número finito, en él mismo de la siguiente forma: Dado un vector $\phi \in l^2(\{1,...,N\})$ con $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N)$,

$$(H^N\phi)_n = t_{n+1}\phi_{n+1} + v_n\phi_n + t_n\phi_{n-1} \ , \qquad n = 1, \ldots, N \ , \tag{2.1}$$

que resulta ser un operador autoadjunto. Asociado a este operador, tenemos dada $z \in \mathbb{C}$ el problema con condiciones a la frontera dado por la condición

$$(H^N\phi)_n = (z\phi)_n \ ,$$

$$t_{n+1}\phi^z_{n+1} + v_n\phi^z_n + t_n\phi^z_{n-1} = z\phi^z_n \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} t_1\phi^z_1 \\ \phi^z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \ , \qquad \begin{pmatrix} t_{N+1}\phi^z_{N+1} \\ \phi^z_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} \ , \tag{2.3}$$

donde λ es un valor real arbitrario.

Denotaremos como $H^N_{\alpha,\beta}$ al operador definido por (2.1) y (2.3). Este operador puede escribirse en una forma matricial como

$$H^N_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} v_1+\tan(\alpha) & t_2 & & & & \\ t_2 & v_2 & t_3 & & & \\ & t_3 & v_3 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & v_{N-1} & t_N \\ & & & & t_N & v_N+\cot(\beta) \end{pmatrix} . \qquad (2.4)$$

2.1.2. Matrices de Transferencia

Las soluciones formales de (2.2) se pueden escribir utilizando matrices de transferencia. Se fijan los valores $t_1 = 1$ y $t_{N+1} = 1$ y se tiene entonces que

$$\begin{pmatrix} t_{n+1}\phi^z_{n+1} \\ \phi^z_n \end{pmatrix} = \mathcal{T}^z_n \mathcal{T}^z_{n-1} \cdots \mathcal{T}^z_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} , \qquad (2.5)$$

donde $\mathcal{T}^z_n$, $n = 1, \ldots, N$, son matrices de la forma

$$\mathcal{T}^z_n = \begin{pmatrix} (z - v_n)\, t_n^{-1} & -t_n \\ t_n^{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \qquad n = 1, \ldots, N . \qquad (2.6)$$

Definición 1. *Se define la matriz de transferencia $\mathcal{T}^z(n,k)$ del estado k al estado n con $k < n$ a la matriz de 2×2*

$$\mathcal{T}^z(n,k) = \mathcal{T}^z_n \mathcal{T}^z_{n-1} \cdots \mathcal{T}^z_{k+1}.$$

Estas matrices, además, cumplen con la relacion $\mathcal{T}^z(n,m) = \mathcal{T}^z(n,k)\mathcal{T}^z(k,m)$ para $m < k < n$. Además se define $\mathcal{T}^z(n,n) = \mathrm{Id}$.

Con estas matrices de transferencia es posible escribir las soluciones de la ecuación en diferencias $H^N_{\alpha,\beta}\phi^z(\alpha) = z\phi^z(\alpha)$ que satisface las condiciones a la frontera como:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1}\phi^z_{n+1}(\alpha) \\ \phi^z_n(\alpha) \end{pmatrix} = \mathcal{T}^z(n,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} . \qquad (2.7)$$

La condición de frontera a la derecha, es decir en β, se cumple precisamente en los eigenvalores de $H^N_{\alpha,\beta}$. Por lo tanto, $z \in \mathbb{R}$ es un eigenvalor de $H^N_{\alpha,\beta}$ si y solo si para alguna $\lambda \neq 0$

$$\mathcal{T}^z(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \;=\; \lambda \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} . \tag{2.8}$$

Denotaremos a los coeficientes de la matriz de transferencia del estado inicial al estado N por:

$$\mathcal{T}^z(N,0) \;=\; \begin{pmatrix} a^z_N & b^z_N \\ c^z_N & d^z_N \end{pmatrix}. \qquad a^z_N, b^z_N, c^z_N, d^z_N \in \mathbb{C} . \tag{2.9}$$

2.1.3. Identidades del Wronskiano

Los coeficientes de las matrices de transferencia cumplen las siguientes propiedades:

Proposición 1. *Si* $\phi^z_n = \phi^z_n(0)$ *es la solución con condiciones iniciales* $\phi^z_1 = 1$ *y* $\phi^z_0 = 0$, *entonces*

$$a^z_N\overline{c^z_N} - \overline{a^z_N}c^z_N \;=\; (z-\overline{z}) \sum_{n=1}^{N} |\phi^z_n|^2 .$$

Demostración. De (2.7) y de la definición (2.9) se tiene que

$$t_{N+1}\phi^z_{N+1} = a^z_N \qquad t_N\phi^z_N = c^z_N ,$$

con lo cual se sigue que

$$a^z_N\overline{c^z_N} - \overline{a^z_N}c^z_N = t_{N+1}\phi^z_{N+1}\overline{\phi^z_N} - t_{N+1}\overline{\phi^z_{N+1}}\phi^z_N .$$

Sustituyendo dos veces en $t_{N+1}\phi^z_{N+1} = (z-v_N)\phi^z_N - t_N\phi^z_{N-1}$ (ecuación de Schrödinger), y repitiendo el proceso iterativamente sobre N se tiene que

$$\begin{aligned} a^z_N\overline{c^z_N} - \overline{a^z_N}c^z_N \;&=\; \left((z-v_N)\phi^z_N - t_N\phi^z_{N-1}\right)\bar{\phi^z_N} - \left((\overline{z}-v_N)\overline{\phi^z_N} - t_N\overline{\phi^z_{N-1}}\right)\phi^z_N \\ &=\; (z-\overline{z})|\phi^z_N|^2 + t_N\phi^z_N\overline{\phi^z_{N-1}} - t_N\overline{\phi^z_N}\phi^z_{N-1} \\ &=\; \ldots \\ &=\; (z-\overline{z}) \sum_{n=1}^{N} |\phi^z_n|^2 . \end{aligned} \tag{2.10}$$

□

Es posible probar una identidad del Wronskiano más general para $z, \zeta \in \mathbb{C}$ que la que se acaba de probar en la Proposición 1:

Proposición 2. *Consideremos ahora al vector* $\Psi_N^z \in \mathbb{C}^2$ *definido por*

$$\Psi_N^z = \begin{pmatrix} t_{N+1}\psi_{N+1}^z \\ \psi_N^z \end{pmatrix} = \mathcal{T}^z(N,0)\begin{pmatrix} -g \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_N^z g + b_N^z \\ -c_N^z g + d_N^z \end{pmatrix}$$

donde $g \in \mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im m z \geq 0\}$*, es decir, está en el semiplano superior, entonces*

$$(\Psi_N^z)^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\Psi_N^\zeta) \;=\; (g * -g) + (\zeta - \overline{z}) \sum_{n=1} \overline{\psi_n^z}\psi_n^\zeta \,.$$

Demostración Desarrollando el lado izquierdo y usando la ecuación de recurrencia que cumple $t_{N+1}\phi_{N+1}$ se tiene

$$\begin{aligned}
(\Psi_N^z)^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\Psi_N^\zeta\right) &= t_{N+1}\psi_{N+1}^\zeta\overline{\psi_N^z} - t_{N+1}\overline{\psi_{N+1}^z}\psi_N^\zeta \\
&= (\zeta - \overline{z})\overline{\psi_N^z}\psi_N^\zeta \\
&\quad + t_{N-1}\psi_{N-1}^z\overline{\psi_{N-2}^z} - t_{N-1}\overline{\psi_{N-1}^z}\psi_{N-2}^z \\
&= \ldots \\
&= (\Psi_0^z)^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(\Psi_0^\zeta\right) + (\zeta - \overline{z}) \sum_{n=1}^{N} \overline{\psi_n^z}\psi_n^\zeta \\
&= (-\overline{g}, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -g \end{pmatrix} + (\zeta - \overline{z}) \sum_{n=1}^{N} \overline{\psi_n^z}\psi_n^\zeta \\
&= \overline{g} - g + (\zeta - \overline{z}) \sum_{n=1}^{N} \overline{\psi_n^z}\psi_n^\zeta \,.
\end{aligned}$$

□

2.1.4. Función de Green

Se usará la notación de Dirac a lo largo de este capítulo, la cual está brevemente explicada en el Apéndice A. Se define la función de Green para cada estado $|m\rangle$ en función de la resolvente como

$$G^N_{\alpha,\beta}(z,n,m) = \langle n|(H^N_{\alpha,\beta} - z)^{-1}|m\rangle \tag{2.11}$$

y en particular para el estado $|1\rangle$ como

$$G^N_{\alpha,\beta}(z) = \langle 1|(H^N_{\alpha,\beta} - z)^{-1}|1\rangle \; . \tag{2.12}$$

Como notación usaremos $G^N(z)$ y $G^N(z,n,m)$en el caso en que tengamos condiciones de frontera Dirichlet. Se probarán enseguida algunas relaciones entre la función de Green y las matrices de transferencia.

Proposición 3.

$$\begin{aligned} a) \quad G^N(z,1,N) \; &= \; -\frac{1}{a^z_N} \\ b) \quad G^N(z,1,1) \; &= \; \frac{b^z_N}{a^z_N} \; = \; G^N(z) \\ c) \quad G^N(z,N,N) \; &= \; -\frac{c^z_N}{a^z_N} \; . \end{aligned}$$

Demostración. Por la regla de Cramer se tiene que

$$G^N(z,1,N) \; = \; (-1)^{N+1} \, \frac{\det(H^N - z)_{1,N}}{\det(H^N - z)} \; ,$$

donde $\det(H^N - z)_{1,N}$ es el subdeterminante de la matriz $H^N - z$ a la cual se le extrajeron la primera línea y la N -ésima columna de lo cual resulta una matriz de dimensión $(N-1)\times(N-1)$. Si se calcula esto de manera iterativa se llega a que

$$\begin{aligned} \det(H^N - z)_{1,N} \; &= \; \begin{vmatrix} t_2 & v_2 - z & 0 & & & \\ 0 & t_3 & v_3 - z & \ddots & & \\ & \ddots & t_4 & v_4 - z & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & t_{N-1} & v_{N-1} - z \\ & & & & 0 & t_N \end{vmatrix} \\ &= \; t_2 \dots t_N \; . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Si se comienza a calcular $\det(H^N - z)$ a partir de la última columna se tiene que

$$
\begin{aligned}
\det(H^N - z) &= \begin{vmatrix} v_1 - z & t_2 & & & \\ t_2 & v_2 - z & t_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & t_{N-1} & v_{N-1} - z & t_N \\ & & & t_N & v_N - z \end{vmatrix} \\
&= (v_N - z) \begin{vmatrix} v_1 - z & t_2 & & \\ t_2 & v_2 - z & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & t_{N-1} \\ & & t_{N-1} & v_{N-1} - z \end{vmatrix} \\
&\quad -t_N^2 \begin{vmatrix} v_1 - z & t_2 & & \\ t_2 & v_2 - z & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & t_{N-2} \\ & & t_{N-2} & v_{N-2} - z \end{vmatrix} \\
&= (v_N - z) \det(H^{N-1} - z) - t_N^2 \det(H^{N-2} - z) \, .
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Por otro lado se tiene que si se multiplica la relación de recurrencia (2.2) por el término $(-1)^{N+1} t_2 t_3 ... t_N$, se llega a que

$$
\begin{aligned}
(-1)^{N+1} t_2 ... t_{N+1} \phi_{N+1} &= (z - v_N)(-1)^{N+1} t_2 ... t_N \phi_N - (-1)^{N+1} t_2 ... t_N t_N \phi_{N-1} \\
&= (v_N - z)(-1)^N t_2 ... t_N \phi_N - t_N^2 (-1)^{N-1} t_2 ... t_{N-1} \phi_{N-1} \, .
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

De la ecuación de Schrödinger deducimos que $N \mapsto \det(H^N - z)$ cumple la misma relación de recurrencia que $N \mapsto (-1)^N t_2 \cdots t_{N+1} \phi^z_{N+1}$. Además, las condiciones iniciales coinciden pues

$$\det(H^1 - z) = v_1 - z = -t_2 \phi_2$$

y

$$\begin{aligned}
\det(H^2 - z) &= (v_1 - z)(v_2 - z) - t_2^2 \\
&= -t_2\phi_2(v_2 - z) - t_2^2 \\
&= t_2((z - v_2)\phi_2 - t_2\phi_1) \\
&= (-1)^2 t_2 t_3 \phi_3 \,.
\end{aligned}$$

De manera que

$$\begin{aligned}
\det(H^N - z) &= (-1)^N t_1 \cdots t_{N+1} \phi^z_{N+1} \\
&= (-1)^N t_1 \cdots t_N a^z_N
\end{aligned} \tag{2.16}$$

y por tanto,

$$G^N(z, 1, N) \;=\; (-1)^{N+1} \, \frac{t_2 \cdots t_N}{(-1)^N t_2 \cdots t_N a^z_N} \;=\; -\,\frac{1}{a^z_N}.$$

Para la segunda ecuación, empecemos aplicando la regla de Cramer,

$$G^N(z, 1, 1) \;=\; \frac{\det(\tilde{H}^N - z)}{\det(H^N - z)} \,,$$

donde $\tilde{H}^N$ es la matriz $(N-1)\times(N-1)$ que se obtiene al quitar la primera columna y el primer renglón de H^N. Por el cálculo anterior, tenemos que $(-1)^{N-1} t_2 \ldots t_N \tilde{a}^z_N \;=\; \det(\tilde{H}^N - z)$ donde $\tilde{a}^z_N$ es la primera entrada a la izquierda de la matriz de transferencia $\mathcal{T}^z_N \cdots \mathcal{T}^z_2$. Multiplicando por $\mathcal{T}^z_1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^z_N \cdots \mathcal{T}^z_2 \mathcal{T}^z_1 &= \begin{pmatrix} \tilde{a}^z_N & \tilde{b}^z_N \\ \tilde{c}^z_N & \tilde{d}^z_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - v_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^z_N & b^z_N \\ c^z_N & d^z_N \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

por lo que $\tilde{a}^z_N = -b^z_N$. Y al sustituir $\det(H^N - z) = (-1)^N t_1 \cdots t_N a^z_N$ se tiene que

$$G^N(z, 1, 1) \;=\; \frac{(-1)^N \tilde{a}^z_N}{(-1)^{N+1} a^z_N} \;=\; \frac{b^z_N}{a^z_N} \,.$$

Para la tercera identidad, por la regla de Cramer, se tiene que utilizando dos veces la identidad $\det(H^N - z) = (-1)^N t_1 \cdots t_{N+1}\phi^z_{N+1}$

$$G^N(z,N,N) \;=\; \frac{\det(H^{N-1}-z)}{\det(H^N - z)} \;=\; -\,\frac{\phi_N}{t_{N+1}\phi_{N+1}} \;=\; -\,\frac{c^z_N}{a^z_N}\;.$$

□

Proposición 4. *La dependencia de la función de Green $G^N_{\alpha,\beta}(z)$ respecto de las condiciones de frontera está dada por*

$$G^N_{\alpha,\beta}(z) \;=\; \frac{b^z_N - d^z_N\cot(\beta)}{a^z_N + b^z_N\tan(\alpha) - c^z_N\cot(\beta) - d^z_N\tan(\alpha)\cot(\beta)}\;.$$

Demostración. Las condiciones de frontera α, β pueden incorporarse en los valores del potencial v_1, v_N tal como en (2.4), el cual se entiende que tiene condiciones de frontera de Dirichlet. La matriz de transferencia del estado 0 a N con condiciones α y β se puede dar en términos de la matriz de transferencia $\mathcal{T}^z(N,0)$ para el caso Dirichlet de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & -\cot(\beta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^z_N & b^z_N \\ c^z_N & d^z_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \tan(\alpha) & 1 \end{pmatrix} \\
=\;& \begin{pmatrix} a^z_N + b^z_N\tan(\alpha) - c^z_N\cot(\beta) - d^z_N\tan(\alpha)\cot(\beta) & b^z_N - d^z_N\cot(\beta) \\ c^z_N + d^z_N\tan(\alpha) & d^z_N \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Sabemos de la Proposición 3 ii), que son necesarias las entradas superiores izquierda y derecha para calcular la función de Green $G^N(z,1,1)$ de manera que, para el caso de la matriz con condiciones de frontera que no son Dirichlet, tomando los valores de las entradas superiores izquierda y derecha queda

$$G^N_{\alpha,\beta}(z) \;=\; \frac{b^z_N - d^z_N\cot(\beta)}{a^z_N + b^z_N\tan(\alpha) - c^z_N\cot(\beta) - d^z_N\tan(\alpha)\cot(\beta)}\;.$$

□

Proposición 5. *Si $\Im m(z) > 0$,*

$$\int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{\alpha,\beta}(z) \;=\; \frac{b^z_N + i d^z_N}{(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha)) + i(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))}\;,$$

y para $E \in \mathbb{R}$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \Im m \int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{\alpha,\beta}(E+i\epsilon) \;=\; \frac{1}{|a^E_N + b^E_N \tan(\alpha)|^2 + |c^E_N + d^E_N \tan(\alpha)|^2}\,. \tag{2.19}$$

Demostración. Haciendo uso de 2.18 es posible deducir las fórmulas para una condición de frontera arbitraria α siguiendo lo que se obtiene del caso $\alpha = 0$. De manera que es suficiente considerar el caso $\alpha = 0$ en los cálculos. De la Proposición 4 y haciendo el cambio de variable $x = \tan\beta$ se tiene que

$$\int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{0,\beta}(z) \;=\; \int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\, \frac{b^z_N \tan(\beta) - d^z_N}{a^z_N \tan(\beta) - c^z_N} \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\, \frac{b^z_N x - d^z_N}{a^z_N x - c^z_N}\,.$$

Esta última integral puede evaluarse haciendo una integral de contorno que tiene polos del integrando en $x = i, -i, \frac{c^z_N}{a^z_N}$. Puesto que $\frac{c^z_N}{a^z_N} = -G^N(z,N,N)$ y la función de Green es siempre positiva, entonces el polo $x = \frac{c^z_N}{a^z_N}$ está en el semiplano inferior, y el único polo que queda en el semiplano superior es $x = i$. Por el teorema del residuo, integrando en el semiplano superior tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{0,\beta}(z) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\, \frac{b^z_N x - d^z_N}{a^z_N x - c^z_N} \\ &= \quad 2\pi i \left(\frac{1}{2i\pi}\, \frac{b^z_N i - d^z_N}{a^z_N i - c^z_N} \right)\,. \\ &= \quad \frac{b^z_N i - d^z_N}{a^z_N i - c^z_N}\,. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Incorporando una condición de frontera α cualquiera, se tiene en lugar de a^z_N y c^z_N los valores $a^z_N + b^z_N \tan(\alpha)$ y $c^z_N + d^z_N \tan(\alpha)$, con lo cual queda la fórmula que se buscaba.

Para la segunda parte, se tiene que la parte imaginaria de esta integral es

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi} \quad \Im m \quad & G^N_{\alpha,\beta}((E-i\epsilon)) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\Im m \frac{b^z_N + i d^z_N}{(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha)) + i(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))} \\
&= \Im m\left(\lim_{\epsilon\to 0}\frac{b^z_N + i d^z_N}{(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha)) + i(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))}\right) \\
&= \Im m\left(\frac{b^E_N + i d^E_N}{(a^E_N + b^E_N\tan(\alpha)) + i(c^E_N + d^E_N\tan(\alpha))}\right) \\
&= \frac{-b^E_N c^E_N - d^E_N b^E_N \tan\alpha + d^E_N a^E_N + b^E_N d^E_N\tan\alpha}{(a^E_N + b^E_N\tan(\alpha))^2 + (c^E_N + d^E_N\tan(\alpha))^2} \\
&= \frac{1}{(a^E_N + b^E_N\tan(\alpha))^2 + (c^E_N + d^E_N\tan(\alpha))^2}
\end{aligned}$$

$\square$

Ya teniendo (2.19) y del teorema de Vallée-Poussin se sigue que $\int_0^\pi \frac{d\beta}{\pi}\,\rho^N_{\alpha,\beta}$ es absolutamente continua con densidad dada por la parte derecha de la ecuación (2.19).

2.1.5. Teoría de Weyl

Tomaremos para la siguiente proposición una condición de frontera a la izquierda fija α.

Proposición 6. *Para $\Im m(z) \neq 0$, la curva $\beta \in \mathbb{R} \mapsto G^N_{\alpha,\beta}(z) \in \mathbb{C}$ en el plano complejo recorre una vez un círculo conocido como el círculo de Weyl que se denotará como $\mathcal{W}^N_\alpha(z)$, con centro en*

$$\frac{\overline{d}^z_N\,(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha)) - \overline{b}^z_N\,(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))}{(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha))\,\overline{(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))} - \overline{(a^z_N + b^z_N\tan(\alpha))}\,(c^z_N + d^z_N\tan(\alpha))}$$

y cuyo radio vale

$$\mathcal{R}^N_\alpha(z) \;=\; \frac{\cos(\alpha)^2}{|z-\overline{z}|\;\sum_{n=2}^N |\phi^z_n(\alpha)|^2}\;,$$

donde $\phi_n^z(\alpha)$ *está definida por* (2.7)

Demostración. Tomaremos el caso $\alpha = 0$, que posteriormente puede utilizarse para tomar en cuenta otros valores de α. De acuerdo a la Proposición 4, la función de Green $G = G_{\alpha,\beta}^N(z)$ es

$$G \;=\; \frac{d\,\cot(\beta) - b}{c\,\cot(\beta) - a}\,,$$

donde se han suprimido los índices z, N en las entradas a, b, c, d de la matriz de transferencia. Esta es una transformación de Möbius de la variable $\cot(\beta)$, (ver Apéndice B). Se sabe que toda transformación de Möbius lleva rectas y círculos en rectas o círculos, y en nuestro caso veremos a continuación que la recta real $\cot(\beta)$, $\beta \in [0, \pi)$, es enviada a un círculo. Para calcular su radio, cabe notar que la inversa de la transformación está dada por

$$\cot(\beta) \;=\; \frac{a\,G - b}{c\,G - d}\,.$$

De aquí podemos decir que la parte imaginaria de lo que se tiene del lado derecho vale 0, lo cual nos lleva a la ecuación

$$(a\,G - b)\,(\overline{c}\,\overline{G} - \overline{d}) \;-\; (c\,G - d)\,(\overline{a}\,\overline{G} - \overline{b}) \;=\; 0\,. \tag{2.21}$$

Por la Proposición 1, se tiene que $a\overline{c} - \overline{a}c \neq 0$. De manera que la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\left| G \;-\; \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c} \right|^2 \;=\; \frac{d\overline{b} - \overline{d}b}{a\overline{c} - \overline{a}c} \;-\; \left| \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c} \right|^2\,.$$

Utilizando el hecho de que $\det(\mathcal{T}^z(N,0)) = ad - bc = 1$, la parte de la derecha puede evaluarse y entonces tenemos que

$$\left| G \;-\; \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c} \right|^2 \;=\; \frac{1}{|a\overline{c} - \overline{a}c|^2}\,. \tag{2.22}$$

Esta es, en efecto, la ecuación de un círculo con centro en $\frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c}$ y radio $|a\overline{c} - \overline{a}c|^{-1}$.

Para el caso $\alpha \neq 0$, utilizando la forma de expresar los coeficientes de la matriz de transferencia para condiciones de frontera cualquiera en función de la matriz de tranferencia para el caso Dirichlet 2.18, tenemos que $a = a_N^z + b_N^z \tan(\alpha)$ y $c = c_N^z + d_N^z \tan(\alpha)$. Si sustituimos esto en el centro y radio obtenidos para el caso de condiciones de frontera de Dirichlet en la ecuación (2.22) se llega a lo que se buscaba:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha^N(z)^2 = & \ \frac{1}{|a\overline{c} - \overline{a}c|^2} \\
= & \ \frac{1}{|(a_N^z + b_N^z \tan(\alpha))\overline{(c_N^z + d_N^z \tan(\alpha))} - \overline{(a_N^z + b_N^z \tan(\alpha))}(c_N^z + d_N^z \tan(\alpha))|^2} \\
= & \ \frac{\cos^4(\alpha)}{|t_{N+1}\phi_{N+1}^z(\alpha)\overline{\phi_N^z(\alpha)} - t_{N+1}\overline{\phi_{N+1}^z(\alpha)}\phi_N^z(\alpha)|^2} \\
= & \ \dots \\
= & \ \frac{\cos^4(\alpha)}{|z - \overline{z}|^2 \left(\sum_{n=1}^N |\phi_n^z(\alpha)|^2\right)^2},
\end{aligned}
$$

y el centro está en

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\alpha^N(z) = & \ \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - \overline{a}c} \\
= & \ \frac{\overline{d}_N^z \left(a_N^z + b_N^z \tan(\alpha)\right) - \overline{b}_N^z \left(c_N^z + d_N^z \tan(\alpha)\right)}{\left(a_N^z + b_N^z \tan(\alpha)\right)\overline{\left(c_N^z + d_N^z \tan(\alpha)\right)} - \overline{\left(a_N^z + b_N^z \tan(\alpha)\right)}\left(c_N^z + d_N^z \tan(\alpha)\right)}.
\end{aligned}
$$

□

Además es posible ver que, aun cuando los círculos no son concéntricos, van conteniéndose uno dentro del otro conforme n aumenta.

Proposición 7. *Si $\mathcal{W}_\alpha^N(z)$ denota al círculo de Weyl correspondiente al estado N, entonces para todo $k > N$, $\mathcal{W}_\alpha^N(z) \subset \mathcal{W}_\alpha^k(z)$.*

Demostración. Para probar esto, tomemos la identidad del Wronskiano probada en la Proposición 2. Si $z = \zeta$, y nuevamente suprimimos los índices z y N, se tiene entonces que

$$
\begin{pmatrix} -ag + b \\ -cg + d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -ag + b \\ -cg + d \end{pmatrix} = (\overline{g} - g) + (z - \overline{z}) \sum_{n=1}^N |\psi_n^z|^2
$$

Haciendo los productos de las matrices queda la siguiente ecuación

$$\overline{(-ag+b)}(cg-d)+\overline{(-cg+d)}(-ag+b)=-(g-\overline{g})+(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N}|\psi_n^z|^2$$

y desarrollando los productos se tiene

$$|g|^2(a\overline{c}-\overline{a}c)+\overline{g}(\overline{a}d-\overline{c}b)+g(c\overline{b}-\overline{d}a)+(b\overline{d}-\overline{b}d)=-(g-\overline{g})+(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N}|\psi_n^z|^2\ ,$$

que es la ecuación de un círculo. Si recordamos el desarrollo que se hizo para obtener el círculo de Weyl, tenemos que por la ecuación (2.22) lo que se tiene del lado izquierdo de esta ecuación vale 0, por lo que solo se obtiene la ecuación

$$(g-\overline{g})=(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N}|\psi_n^z|^2\ .$$

El interior del círculo está determinado por los valores de g que cumplen la desigualdad

$$(g-\overline{g})<(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N}|\psi_n^z|^2\ . \tag{2.23}$$

Si ahora se hace el mismo cálculo para Ψ_{N+1}, llegamos al círculo siguiente de Weyl $\mathcal{W}_\alpha^{N+1}(z)$, que tiene una ecuación similar, pero con los coeficientes correspondientes a la matriz de transferencia $\mathcal{T}^z(N+1,0)$ y nuevamente se anula lo que queda del lado izquierdo y queda solamente la ecuación de un círculo, cuyo interior esta determinado por la desigualdad

$$(g-\overline{g})<(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N+1}|\psi_n^z|^2\ . \tag{2.24}$$

Además tenemos que

$$(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N+1}|\psi_n^z|^2\ >(z-\overline{z})\sum_{n=1}^{N}|\psi_n^z|^2$$

con lo cual, si $g\in\mathcal{W}_\alpha^N(z)$, se cumple la condición (2.23) y también a su vez se cumple la condición (2.24) entonces también $g\in\mathcal{W}_\alpha^{N+1}(z)$. Esto nos lleva a concluir que los círculos consecutivos de Weyl se van conteniendo uno dentro del siguiente.

□

El radio positivo $\mathcal{R}_\alpha^N(z)$ disminuye conforme N aumenta y además converge a un número que llamaremos $\mathcal{R}_\alpha(z)$, el cual podría ser 0 cuando los círculos convergen a un punto. Si $\mathcal{R}_\alpha(z) > 0$, entonces se habla del caso círculo límite, y la matriz de Jacobi semiinfinita H_α definida por $H_{\alpha,\beta}^N$ tiene una extensión autoadjunta en sucesiones finitas para cada valor fijo de β. Por otro lado, si $\mathcal{R}_\alpha(z) = 0$, entonces H_α es esencialmente autoadjunto para sucesiones finitas y entonces se habla del caso punto límite. Este es el caso, por ejemplo, cuando las entradas de la matriz $(t_n, v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ están uniformemente acotadas. En este trabajo se supondrá siempre que se tiene el caso de punto límite al infinito. Al tener el caso de punto límite, existe una extensión autoadjunta del operador, de manera que podemos también dar la medida espectral de H_α con respecto al estado $|1\rangle$, la cual denotaremos por ρ_α y si denotamos

$$G_\alpha(z) \;=\; \lim_{N\to\infty} G_{\alpha,\beta}^N(z)\;, \tag{2.25}$$

que es la función de Green de H_α, esta cumple que

$$G_\alpha(z) \;=\; \int \rho_\alpha(dE)\,\frac{1}{E-z}\;. \tag{2.26}$$

Ahora, podemos asegurar que (2.25) existe también de la convergencia fuerte de la resolvente de $H_{\alpha,\beta}^N$ a H_α, pero utilizando el círculo de Weyl, es posible deducir una convergencia uniforme en β, ya que el radio y el centro del círculo no dependen de β.

2.1.6. Variables de Prüfer

En esta sección se definirán las variables de Prüfer y se probarán algunas propiedades que éstas cumplen y que serán herramientas en la prueba de los teoremas de este capítulo. Para los cálculos de esta sección se considerarán valores de energía reales, es decir que $z = E \in \mathbb{R}$.

Definición 2. *Para una condición fija de frontera a la izquierda α, se definen como en* [JSS] *las fases de Prüfer $\theta_n^E(\alpha)$ y el radio de Prüfer $R_n^E(\alpha)$ como*

$$R_n^E(\alpha)\begin{pmatrix}\cos(\theta_n^E(\alpha))\\ \sin(\theta_n^E(\alpha))\end{pmatrix} \;=\; \mathcal{T}^E(n,0)\begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}\;, \tag{2.27}$$

además de imponer las condiciones $-\frac{\pi}{2} < \theta^E_{n+1}(\alpha) - \theta^E_n(\alpha) < \frac{3\pi}{2}$ *y* $\theta^E_0(\alpha) = \alpha$. *De manera que podemos decir también que* $\left(R^E_n(\alpha)\right)^2 = (t_{n+1}\phi_{n+1})^2 + \phi_n^2$ *y* $\theta^E_n(\alpha) = \arctan\left(\frac{\phi_n}{t_{n+1}\phi_{n+1}}\right)$.

Proposición 8. *Si* $R^E_N(\alpha)$ *es el radio de Prüfer, entonces*

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{R^E_N(\alpha)^2} \ = \ 1 \ .$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{R^E_\alpha(N)^2} = \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{\left\| \mathcal{T}^E(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right\|^2} \ . \tag{2.28}$$

Recordemos que una matriz positiva con determinante uno tiene 2 eigenvalores positivos λ y $\frac{1}{\lambda}$, por lo cual en nuestro caso, ya que el producto de matrices $(\mathcal{T}^E(1,N))^*\mathcal{T}^E(1,N)$ da como resultado una matriz positiva, entonces podemos concluir que

$$(\mathcal{T}^E(N,0))^*\mathcal{T}^E(N,0) = R_\eta \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} R_\eta^{-1}$$

donde R_η es una matriz de rotación de la forma

$$R_\eta = \begin{pmatrix} \cos(\eta) & -\sin(\eta) \\ \sin(\eta) & \cos(\eta) \end{pmatrix} \ .$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{T}^E(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right\|^2 \ &= \ \left\langle \mathcal{T}^E(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \middle| \mathcal{T}^E(1,N) \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \ \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \middle| (\mathcal{T}^E(N,0))^*\mathcal{T}^E(N,0) \middle| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \ \left\langle \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \middle| R_\eta \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} R_\eta^{-1} \middle| \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \ \left\langle R_\eta^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \middle| R_\eta^{-1} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \ \left\langle \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\eta) \\ \sin(\alpha-\eta) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\eta) \\ \sin(\alpha-\eta) \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \ \cos^2(\alpha-\eta)\lambda + \sin^2(\alpha-\eta)\frac{1}{\lambda} \ .
\end{aligned}$$

Volviendo a la integral (2.28), y haciendo un cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{\left\| \mathcal{T}^E(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right\|^2} &= \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{\lambda \cos^2(\alpha-\eta) + \frac{1}{\lambda}\sin^2(\alpha-\eta)} \\
&= \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{\lambda \cos^2(\alpha) + \frac{1}{\lambda}\sin^2(\alpha)} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\pi} \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \; \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}\tan^2(\alpha)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\pi} \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\lambda}u^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\pi} \frac{\frac{1}{\lambda}}{1 + \left(\frac{u}{\lambda}\right)^2} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{1}{\pi} \arctan x \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

Proposición 9. *El radio y la fase de Prüfer cumplen lo siguiente:*
(i) *Para la derivada con respecto a la energía E*

$$R_N^E(\alpha)^2 \, \partial_E \theta_N^E(\alpha) \; = \; -\sum_{n=1}^{N} |\phi_n^E(\alpha)|^2 \; .$$

(ii) *Para la derivada con respecto al potencial v_n siendo $n \leq N$, se tiene que*

$$R_N^E(\alpha)^2 \, \partial_{v_n} \theta_N^E(\alpha) \; = \; |\phi_n^E(\alpha)|^2 \; .$$

Demostración. La primera de estas fórmulas se encuentra en [JSS]. De acuerdo a como se definió la transformada de Prüfer tenemos que

$$\theta_N^E(\alpha) = \arctan\left(\frac{\phi_N^E(\alpha)}{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)} \right)$$

$$R_N^E(\alpha)^2 = (t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha))^2 + \phi_N^E(\alpha)^2 \ .$$

Si se deriva $\theta_n^E(\alpha)$ con respecto a E se tiene que,

$$\begin{aligned}
\partial_E \theta_n^E(\alpha) &= \frac{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)\partial_E\phi_N^E(\alpha) - t_{N+1}\partial_E\phi_{N+1}^E(\alpha)\phi_N^E(\alpha)}{(t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha))^2 + \phi_N^E(\alpha)^2} \\
&= \frac{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)\partial_E\phi_N^E(\alpha) - t_{N+1}\partial_E\phi_{N+1}^E(\alpha)\phi_N^E(\alpha)}{R_N^E(\alpha)^2}
\end{aligned}$$

Derivando en la ecuación de recurrencia (2.2) con respecto a E se sigue que

$$\begin{aligned}
R_N^E(\alpha)^2\partial_E\theta_N^E(\alpha) &= \partial_E\phi_N(\alpha)\left((E - v_N)\phi_N(\alpha) - t_N\phi_{N-1}(\alpha)\right) - \phi_N(\alpha)\phi_N(\alpha) \\
&\quad + t_N\partial_E\phi_{N-1}(\alpha)\phi_N(\alpha) - \phi_N(\alpha)\left((E - v_N)\partial_E\phi_N(\alpha)\right) \\
&= -|\phi_N(\alpha)|^2 + (E - v_N)\phi_N(\alpha)\partial_E\phi_N(\alpha) \\
&\quad + t_N\phi_N(\alpha)\partial_E\phi_{N-1}(\alpha) - (E - v_N)\partial_E\phi_N(\alpha)\phi_N(\alpha) \\
&\quad - t_N\partial_E\phi_N(\alpha)\phi_{N-1}(\alpha) \\
&= -|\phi_N(\alpha)|^2 - t_N\partial_E\phi_N(\alpha)\phi_{N-1}(\alpha) + t_N\phi_N(\alpha)\partial_E\phi_{N-1}(\alpha) \\
&= \ldots \\
&= -\Sigma_{n=1}^N|\phi_n(\alpha)|^2 \ .
\end{aligned}$$

Los puntos suspensivos dados en el penúltimo paso quieren decir que esto se debe continuar sustituyendo de la misma manera, sucesivamente, hasta llegar al resultado final.

Para la prueba de la segunda fórmula, tenemos que

$$\tan(\theta_N^E(\alpha)) = \frac{\phi_N^E(\alpha)}{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)}$$

y derivando con respecto a v_n se tiene que

$$\partial_{v_n}\theta_N^E(\alpha) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\phi_N^E(\alpha)}{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)}\right)^2}\,\partial_{v_n}\frac{\phi_N^E(\alpha)}{t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)} \ .$$

Desarrollando esto y usando el hecho de que

$$R_N^E(\alpha)^2 = \phi_N^E(\alpha)^2 + (t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha))^2$$

resulta que

$$\partial_{v_n}\theta_N^E(\alpha) \;=\; \frac{(\partial_{v_n}\phi_N^E(\alpha))(t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha)) - (\phi_N^E(\alpha))(\partial_{v_n}t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha))}{(R_N^E(\alpha))^2}\;.$$

Siempre y cuando $n < N$, los términos dentro de los paréntesis pueden sustituirse por la ecuación de Schrödinger $t_{N+1}\phi_{N+1}^E(\alpha) = (E - v_n)\phi_N^E(\alpha) - t_N\phi_{N-1}^E(\alpha)$. Entonces se obtiene que

$$\partial_{v_n}\theta_N^E(\alpha) \;=\; \frac{1}{R_N^E(\alpha)^2}\left[(\partial_{v_n}\phi_{N-1}^E(\alpha))(t_N\phi_N^E(\alpha)) - (\phi_{N-1}^E(\alpha))(\partial_{v_n}t_N\phi_N^E(\alpha))\right]\;,$$

e iterando se tiene que

$$\partial_{v_n}\theta_N^E(\alpha) \;=\; \frac{1}{R_N^E(\alpha)^2}\left[(\partial_{v_n}\phi_n^E(\alpha))(t_{n+1}\phi_{n+1}^E(\alpha)) - (\phi_n^E(\alpha))(\partial_{v_n}t_{n+1}\phi_{n+1}^E(\alpha))\right]\;.$$

Sabemos que $\partial_{v_n}\phi_n^E(\alpha) = 0$, y derivando con respecto a v_n en la ecuación de Schrödinger, $\partial_{v_n}t_{n+1}\phi_{n+1}^E(\alpha) = -\phi_n^E(\alpha)$, es posible concluir que solo queda un valor y entonces

$$R_N^E(\alpha)^2\;\partial_{v_n}\theta_N^E(\alpha) \;=\; |\phi_n^E(\alpha)|^2\;.$$

Si $n = N$ se obtiene directamente el mismo resultado.

□

Ahora se probará la fórmula de Carmona [CL] (que posteriormente Pearson prueba en [Pea] y Simon prueba para el caso discreto [Sim2]).

Proposición 10. *Para $E_0 < E_1$,*

$$\frac{1}{2}\left[\rho_\alpha([E_0,E_1]) + \rho_\alpha((E_0,E_1))\right] \;=\; \lim_{N\to\infty}\int_{E_0}^{E_1}\frac{dE}{\pi}\,\frac{\cos^2(\alpha)}{R_N^E(\alpha)^2}\;.$$

Demostración. Si se integra la ecuación (2.19) con respecto a la energía en un intervalo $[E_0, E_1]$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{E_0}^{E_1} dE \lim_{\epsilon\to 0} \quad \Im m \quad \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{\alpha,\beta}(E+i\epsilon) & \\
&= \int_{E_0}^{E_1} dE\, \frac{1}{|a^E_N + b^E_N \tan(\alpha)|^2 + |c^E_N + d^E_N \tan(\alpha)|^2} \\
&= \int_{E_0}^{E_1} dE\, \frac{\cos^2(\alpha)}{|t_{N+1}\phi_{N+1}(\alpha)|^2 + |\phi_N(\alpha)|^2} \\
&= \int_{E_0}^{E_1} dE\, \frac{\cos^2(\alpha)}{R^E_N(\alpha)^2} \,.
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Se desarrollará ahora el lado derecho, utilizando la relación que existe entre la función de Green y la medida espectral (ver Apéndice D). Además hay que mencionar que el integrando es finito por lo que es posible cambiar el orden de integración, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int_{E_0}^{E_1} dE \lim_{\epsilon\to 0} \quad \Im m \quad \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi}\, G^N_{\alpha,\beta}(E+i\epsilon) & \\
= \quad & \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \int_{E_0}^{E_1} dE \lim_{\epsilon\to 0} \Im m\, G^N_{\alpha,\beta}(E+i\epsilon) \\
= \quad & \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \int_{E_0}^{E_1} dE \lim_{\epsilon\to 0} \Im m \int \rho^N_{\alpha\ ,\beta}(d\lambda) \frac{1}{\lambda-(E+i\epsilon)} \\
= \quad & \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \int \rho^N_{\alpha\ ,\beta}(d\lambda) \lim_{\epsilon\to 0} \int_{E_0}^{E_1} dE\, \frac{\epsilon}{(\lambda-E)^2+\epsilon^2} \\
= \quad & \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \left[\rho^N_{\alpha,\beta}([E_0,E_1]) + \rho^N_{\alpha,\beta}((E_0,E_1))\right] \,.
\end{aligned}
$$

De los dos desarrollos anteriores se tiene entonces que

$$
\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{d\beta}{\pi} \left[\rho^N_{\alpha,\beta}([E_0,E_1]) + \rho^N_{\alpha,\beta}((E_0,E_1))\right] \;=\; \int_{E_0}^{E_1} dE\, \frac{\cos^2(\alpha)}{R^E_N(\alpha)^2} \,,
$$

donde $\rho^N_{\alpha,\beta}$ es la medida espectral de $H^N_{\alpha,\beta}$ con respecto a $|1\rangle$. Ahora tomando el límite $N\to\infty$ de esta ecuación es posible meterlo dentro de la integral utilizando el teorema de convergencia dominada, puesto que el integrando está dominado. Por la ecuación 2.25 y la relación de la función de Green con la medida espectral mencionada en 2.26, tenemos que si $N \to \infty$, entonces

$$G_{\alpha,\beta}(z)^N \;=\; \int \rho_{\alpha,\beta}(dE)\,\frac{1}{E-z} \;\to \int \rho_\alpha(dE)\,\frac{1}{E-z} \;=\; G_\alpha(z).$$

Esto nos dice precisamente que $\rho^N_{\alpha,\beta}$ converge débilmente a ρ_α para toda β, y se sigue el resultado que se buscaba.

□

2.1.7. Teorema de Oscilación

Teorema 1. *(ver Sec. 3.2 de* [JSS]*) Si consideramos a $\theta^E_N(\alpha)$ como una función de E, entonces tenemos que esta función es estrictamente decreciente, y para $N \geq 2$*

$$\lim_{E\to-\infty} \theta^E_N(\alpha) = N\pi \;,$$

$$\lim_{E\to+\infty} \theta^E_N(\alpha) = 0 \;,$$

y si $E_1 < E_2 < \ldots < E_N$ son los eigenvalores de $H^N_{\alpha,\beta}$ ordenados, entonces en cada valor E_j la función toma un valor de la forma

$$\theta^{E_j}_N = \beta + \pi(N-j) \;.$$

Demostración. El hecho de que la función sea decreciente es consecuencia de la Proposición 9 (i). Ahora, la prueba de los límites se hará de manera iterativa. Se tiene, por definición, que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R^E_2(\alpha)\cos(\theta^E_2(\alpha)) \\ R^E_2(\alpha)\sin(\theta^E_2(\alpha)) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t_2\phi^E_2(\alpha) \\ \phi^E_1(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (E\,-\,v_1) & -1 \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

y esto también es posible, utilizando la transformación de Cayley $\mathcal{C}$ (véase

Apéndice B), expresarlo como una transformación de Möbius

$$\begin{aligned} e^{-2i\theta_2^E(\alpha)} &= \mathcal{C}\mathcal{T}_1^E\mathcal{C}^{-1}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E\,-\,v_1) & -1 \\ 1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E\,-\,v_1)-i & (E\,-\,v_1)\,1+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} (E\,-\,v_1)\,-i(1+1) & (E\,-\,v_1)+i(1-1) \\ (E\,-\,v_1)\,-i(1-1) & (E\,-\,v_1)+i(1+1) \end{pmatrix}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \frac{((E\,-\,v_1)-i(1+1))\,e^{-2i\alpha}+(E\,-\,v_1)\,+i(1-1)}{((E\,-\,v_1)\,-i(1-1))\,e^{-2i\alpha}+(E\,-\,v_1)\,1+i(1+1)}\,. \end{aligned}$$

Si ahora sacamos los límites deseados, tenemos que

$$\lim_{E\to-\infty} e^{-2i\theta_2^E(\alpha)} = \frac{e^{-2i\alpha}+1}{e^{-2i\alpha}+1} = 1\,,$$

y de igual forma

$$\lim_{E\to\infty} e^{-2i\theta_2^E(\alpha)} = \frac{e^{-2i\alpha}+1}{e^{-2i\alpha}+1} = 1\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{E\to-\pm\infty} \theta_2^E(\alpha) = 0 \mod \pi$$

Si continuamos haciendo esto de manera sucesiva, tenemos que en particular para N,

$$\begin{aligned} e^{-2i\theta_N^E(\alpha)} &= \mathcal{C}\mathcal{T}_N^E\cdots\mathcal{T}_1^E\mathcal{C}^{-1}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \mathcal{C}\mathcal{T}^E(N,0)\mathcal{C}^{-1}\cdot e^{-2i\alpha}\,. \end{aligned}$$

Antes de proseguir, se analizará la forma de los coeficientes $a_N^E, b_N^E, c_N^E, d_N^E$ de la matriz de transferencia $\mathcal{T}^E(N,0)$. Tenemos, para $n=2$, que haciendo los productos de las matrices,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_2^E & b_2^E \\ c_2^E & d_2^E \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (E-v_2)\frac{1}{t_2} & -t_2 \\ \frac{1}{t_2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E-v_1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(E-v_1)(E-v_2)}{t_2}-t_2 & -\frac{(E-v_2)}{t_2} \\ \frac{E-v_1}{t_2} & -\frac{1}{t_2} \end{pmatrix}\,, \end{aligned}$$

y para $n=3$

$$\begin{pmatrix} a_3^E & b_3^E \\ c_3^E & d_3^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(E-v_1)(E-v_2)(E-v_3)}{t_2t_3} - \frac{(E-v_1)t_3}{t_2} & -\frac{(E-v_2)(E-v_3)}{t_2t_3} \\ \frac{(E-v_1)(E-v_2)}{t_2t_3} & -\frac{(E-v_2)}{t_2t_3} \end{pmatrix},$$

con lo cual, se tiene que, en general,

$$a_N^E = \frac{E^N}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-1})\;,$$

$$b_N^E = -\frac{E^{N-1}}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-2})\;,$$

$$c_N^E = -\frac{E^{N-1}}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-2})$$

y

$$d_N^E = -\frac{E^{N-2}}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-3})\;.$$

De manera que, suprimiendo nuevamente los índices N y E,

$$\begin{aligned} e^{-2i\theta_N^E(\alpha)} &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \begin{pmatrix} (a-d)-i(b+c) & (a+d)+i(b-c) \\ (a+d)-i(b-c) & (a-d)+i(b+c) \end{pmatrix}\cdot e^{-2i\alpha} \\ &= \frac{((a-d)-i(b+c))\,e^{-2i\alpha} + (a+d)+i(b-c)}{((a+d)-i(b-c))\,e^{-2i\alpha} + (a-d)+i(b+c)} \\ &= \frac{\frac{E^N}{t_2\dots t_N}e^{-2i\alpha} + \frac{E^N}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-1})}{\frac{E^N}{t_2\dots t_N}e^{-2i\alpha} + \frac{E^N}{t_2\dots t_N} + \mathcal{O}(E^{N-1})}\;. \end{aligned}$$

Factorizando E^N del numerador y denominador en la última expresión y sacando los límites se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{E\to\pm\infty} e^{-2i\theta_N^E(\alpha)} &= \frac{\frac{1}{t_2\dots t_N}e^{-2i\alpha} + \frac{1}{t_2\dots t_N}}{\frac{1}{t_2\dots t_N}e^{-2i\alpha} + \frac{1}{t_2\dots t_N}} \\ &= 1\;. \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos concluir que

$$\lim_{E\to\pm\infty} \theta_N^E(\alpha) = 0 \mod \pi \ .$$

Recordemos ahora que E es un eigenvalor si y solo si, se cumple la ecuación de Schrödinger y la solución cumple las condiciones de frontera a la izquierda en α y a la derecha en $\beta \in [0, \pi)$ definida en (2.8). Esto último quiere decir que,

$$\begin{pmatrix} t_{N+1}\phi_{N+1}^E \\ \phi_N^E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_N^E(\alpha)\cos(\theta_N^E(\alpha)) \\ R_N^E(\alpha)\sin(\theta_N^E(\alpha)) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{pmatrix} .$$

Entonces tenemos que

$$\tan(\theta_N^E(\alpha)) = \tan(\beta),$$

por lo cual

$$\theta_N^E(\alpha) = \beta \mod \pi \ .$$

Con esta información y los límites previamente obtenidos, podemos concluir que si tomamos a los N eigenvalores, que se sabe son distintos, en forma ordenada ($E_1 < E_2 < ... < E_N$), entonces

$$\lim_{E\to-\infty} \theta_N^E(\alpha) = N\pi \ ,$$

$$\lim_{E\to\infty} \theta_N^E(\alpha) = 0$$

que si se toma el j-ésimo eigenvalor E_j

$$\theta_N^E(\alpha) = \beta + \pi(N-j) \ .$$

$\square$

2.1.8. Variables de Prüfer Modificadas

Además de las variables de Prüfer, existen las llamadas variables de Prüfer E-modificadas (ver [PF, JSS]) que están definidas en función de las primeras, de la siguiente forma:

Definición 3. *Para* $E \in (-2,2)$ *y* $k = \arccos(E/2) \in (0, \frac{\pi}{2})$*, sea*

$$M^E \ = \ \frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k) & 0 \\ -\cos(k) & 1 \end{pmatrix} .$$

Se denotará $e_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$*. Definimos una función suave* $m^E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que cumple las condiciones*

$$m^E(\theta + \pi) = m^E(\theta) + \pi$$

y

$$0 < C_1 \leq (m^E)' \leq C_2 < \infty \ ,$$

de la siguiente forma:

$$r(\theta) e_{m^E(\theta)} = M^E e_\theta, \qquad r(\theta) > 0 \ , \qquad m^E(0) \in [-\pi, \pi) \ .$$

Entonces, las variables de Prüfer E-modificadas $(\hat{R}_n^E(\alpha), \hat{\theta}_n^E(\alpha)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ *para una condición inicial* $\hat{\theta}_0^E = m^E(\theta_0^E(\alpha))$ *están dadas por:*

$$\hat{\theta}_n^E(\alpha) \ = \ m^E(\theta_n^E(\alpha)) \ , \tag{2.30}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{R}_n^E(\alpha) \cos(\hat{\theta}_n^E(\alpha)) \\ \hat{R}_n^E(\alpha) \sin(\hat{\theta}_n^E(\alpha)) \end{pmatrix} \ = \ M^E \begin{pmatrix} t_n \, \phi_n^E(\alpha) \\ \phi_{n-1}^E(\alpha) \end{pmatrix} \ . \tag{2.31}$$

Proposición 11. *La función* $m^E(\theta(\alpha))$ *es creciente y existen valores*C_1 *y* C_2 *tales que* $0 < C_1 \leq (m^E)' \leq C_2 < \infty$*.*

Demostración Aplicando la definición de $m^E(\theta)$ y desarrollando la expresión tenemos que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos(m^E(\theta_n^E(\alpha))) \\ \sin(m^E(\theta_n^E(\alpha))) \end{pmatrix} &= \frac{M^E e_{\theta_n^E(\alpha)}}{\|M^E e_{\theta_n^E(\alpha)}\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k) & 0 \\ -\cos(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_n^E(\alpha)) \\ \sin(\theta_n^E(\alpha)) \end{pmatrix}}{\|M^E e_{\theta_n^E(\alpha)}\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k)\cos(\theta_n^E(\alpha)) \\ -\cos(\theta)\cos(k) + \sin(\theta_n^E(\alpha)) \end{pmatrix}}{\|\frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k)\cos(\theta_n^E(\alpha)) \\ -\cos(\theta_n^E(\alpha))\cos(k) + \sin(\theta_n^E(\alpha)) \end{pmatrix}\|} \\
&= \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k)\cos(\theta_n^E(\alpha)) \\ -\cos(\theta_n^E(\alpha))\cos(k) + \sin(\theta_n^E(\alpha)) \end{pmatrix}}{\sin^2(k)\cos^2(\theta_n^E(\alpha)) + (-\cos(\theta_n^E(\alpha))\cos(k) + \sin(\theta_n^E(\alpha)))^2} \, .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$m^E(\theta_n^E(\alpha)) = \cot^{-1}\left(\frac{\sin(k)\cos(\theta_n^E(\alpha))}{\sin(\theta_n^E(\alpha)) - \cos(k)\cos(\theta_n^E(\alpha))}\right) \tag{2.32}$$

y derivando,

$$\begin{aligned}
(m^E)'(\theta_n^E(\alpha)) &= \frac{\sin(k)}{(\sin(k)\cos(\theta_n^E(\alpha)))^2 + (\sin(\theta_n^E(\alpha)) - \cos(k)\cos(\theta_n^E(\alpha)))^2} \\
&= \frac{1}{\|M^E e_{\theta_n^E(\alpha)}\|^2} \, .
\end{aligned}$$

Recordemos que k se eligió en función de la energía E de manera que $k = \arccos(E/2) \in (0, \frac{\pi}{2})$ con lo cual podemos asegurar que $(m^E)'(\theta_n^E(\alpha)) > 0$, y además de aquí es posible calcular las cotas.

□

Proposición 12. *Si $\theta_n^E(\alpha)$ y $\hat{\theta}_n^E(\alpha)$ son las fases de Prüfer y Prüfer modificado, entonces se tiene que hay una transformación de Möbius* [ver Apéndice B] *dada por $\mathcal{C}M^E\mathcal{C}^{-1}$, tal que*

$$e^{-2i\hat{\theta}_n^E(\alpha)} = \mathcal{C}M^E\mathcal{C}^{-1} \cdot e^{-2i\theta_n^E(\alpha)} \, .$$

Demostración
Si aplicamos la transformada de Cayley $\mathcal{C}$ a la fase de Prüfer modificada se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\begin{pmatrix}\hat{R}_n^E(\alpha)\cos(\hat{\theta}_n^E(\alpha))\\ \hat{R}_n^E(\alpha)\sin(\hat{\theta}_n^E(\alpha))\end{pmatrix} &= \mathcal{C}M^E\begin{pmatrix}R_n^E(\alpha)\cos(\theta_n^E(\alpha))\\ R_n^E(\alpha)\sin(\theta_n^E(\alpha))\end{pmatrix}\\ &= R_n^E(\alpha)\left(\mathcal{C}M^E\mathcal{C}^{-1}\right)\left(\mathcal{C}\begin{pmatrix}\cos(\theta_n^E(\alpha))\\ \sin(\theta_n^E(\alpha))\end{pmatrix}\right).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Y aplicando la función Π (ver Apéndice B) a ambos lados de la ecuación se tiene que

$$\begin{aligned}e^{-2i\hat{\theta}_n^E(\alpha)} &= \Pi R_n^E(\alpha)\left(\mathcal{C}M^E\mathcal{C}^{-1}\right)\left(\mathcal{C}\begin{pmatrix}\cos(\theta_n^E(\alpha))\\ \sin(\theta_n^E(\alpha))\end{pmatrix}\right)\\ &= \Pi\left(\mathcal{C}M^E\mathcal{C}^{-1}\right)\left(\mathcal{C}\begin{pmatrix}\cos(\theta_n^E(\alpha))\\ \sin(\theta_n^E(\alpha))\end{pmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin(k)}}\begin{pmatrix}\sin(k)+1+i\cos(k) & \sin(k)-1+i\cos(k)\\ \sin(k)-1-i\cos(k) & \sin(k)+1-i\cos(k)\end{pmatrix}\cdot e^{-2i\theta_n^E(\alpha)}.\end{aligned}$$

Con esto, podemos decir que es posible pasar de la fase de Prüfer a la fase de Prüfer E-modificada a través de una transformación de Möbius de la siguiente forma:

$$e^{-2i\hat{\theta}_n^E(\alpha)} = \frac{\gamma e^{-2i\theta_n^E(\alpha)}+\delta}{\bar{\delta}e^{-2i\theta_n^E(\alpha)}+\overline{\gamma}}$$

donde $\gamma = \sin(k)+1+i\cos(k)$ y $\delta = \sin(k)-1+i\cos(k)$.

□

Proposición 13. *Si $\theta_n^E(\alpha)$ y $\hat{\theta}_n^E(\alpha)$ son las fases de Prüfer y Prüfer E-modificada , entonces para toda $n \geq 0$ se cumple que*

$$|\hat{\theta}_n^E(\alpha) - \theta_n^E(\alpha)| \leq 2\pi\ .$$

Demostración De acuerdo a la forma como se definieron las variables modificadas de Prüfer, sabemos que $m^E(0) \in [-\pi,\pi)$ de manera que para $\theta_n^E(\alpha) = 0$ tenemos que

$$|m^E(\theta_n^E(\alpha)) - \theta_n^E(\alpha)| \leq 2\pi\ .$$

En el caso en que $0 \leq \theta_n^E(\alpha) \leq \pi$ tenemos que

$$m^E(\theta(\alpha)) \leq m^E(0+\pi) = m^E(0) + \pi \leq 2\pi$$

entonces por un lado

$$m^E(\theta_n^E(\alpha)) - \theta_n^E(\alpha) \leq 2\pi - \theta_n^E(\alpha) \leq 2\pi \ ,$$

y por el otro

$$m^E(\theta_n^E(\alpha)) - \theta_n^E(\alpha) \geq m^E(0) - \pi \geq -2\pi \ .$$

Con lo cual tenemos el resultado para $0 \leq \theta_n^E(\alpha) \leq \pi$. Ahora se toma el caso $\pi \leq \theta_n^E(\alpha) \leq 2\pi$, para lo cual usamos el hecho de que $\theta_n^E(\alpha) = (\theta_n^E(\alpha))' + \pi$ con $\theta_n^E(\alpha)' \in [0,\pi)$ y entonces por el caso anterior

$$m^E(\theta_n^E(\alpha)) \ = m^E((\theta_n^E(\alpha))' + \pi) \ = m^E(\theta_n^E(\alpha)') + \pi \ \leq 2\pi \ .$$

Por lo tanto, usando lo anterior

$$\begin{aligned} |m^E(\theta_n^E(\alpha)) - \theta_n^E(\alpha)| &= |m^E(\theta_n^E(\alpha)') + \pi - \theta_n^E(\alpha)| \\ &= |m^E(\theta_n^E(\alpha)') + \pi - (\theta_n^E(\alpha)' - \pi)| \\ &= |m^E(\theta_n^E(\alpha)') - \theta_n^E(\alpha)'| \leq 2\pi \ . \end{aligned}$$

Y este proceso se puede continuar sucesivamente para cubrir cualquier caso donde $\theta_n^E(\alpha)$ sea un ángulo positivo.

□

También nos interesa saber un poco más sobre la derivada de la fase $\partial_{v_n}\hat{\theta}_n^E(\alpha)$, por lo cual probaremos lo siguiente:

Proposición 14.

$$\partial_{v_n}\hat{\theta}_n^E(\alpha) \geq 0$$

Demostración. Tenemos que, de acuerdo a 2.32

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_L^E(\alpha) &= \cot^{-1}\left(\frac{\sin(k)\cos(\theta_L^E(\alpha))}{\sin(\theta_L^E(\alpha)) - \cos(k)\cos(\theta_L^E(\alpha))}\right) \\ &= \cot^{-1}\left(\frac{\sin(k)}{\tan(\theta_L^E(\alpha)) - \cos(k)}\right) \ . \end{aligned}$$

Si ahora derivamos con respecto a v_n se tiene que

$$\partial_{v_n}\hat{\theta}_n^E(\alpha) \;=\; -\frac{1}{1+\left(\frac{\sin(k)}{\tan(\theta_L^E(\alpha))-\cos(k)}\right)^2}\frac{-\;\sin(k)\partial_{v_n}(\tan(\theta_n^E(\alpha)))}{(\tan(\theta_n^E(\alpha))-\cos(k))^2}\;.$$

Los términos del denominador son positivos, y $\sin(k)$ también lo es, con lo cual el comportamiento de $\partial_{v_n}(\tan(\theta_n^E(\alpha)))$ va a darnos más información. Desarrollando tenemos que

$$\partial_{v_n}(\tan(\theta_n^E(\alpha))) = \sec^2(\theta_n^E(\alpha))\partial_{v_n}\theta_n^E(\alpha)\;, \tag{2.34}$$

y se probó en la Proposición 9 que $\partial_{v_n}\theta_n^E(\alpha) \geq 0$ de manera que podemos también concluir que

$$\partial_{v_n}\hat{\theta}_n^E(\alpha) \geq 0.$$

□

2.2. Promedio espectral en un parámetro

Sea $I = [\mu_0, \mu_1] \subset \mathbb{R}$ un intervalo finito de parámetros y supongamos que se tiene una familia diferenciable $\mu \in I \mapsto H(\mu)$ de matrices de Jacobi semiinfinitas con condiciones de frontera de Dirichlet, es decir $\alpha = 0$ y tal que solamente los primeros N valores del potencial $v_1, \ldots, v_N$ así como los términos fuera de la diagonal $t_2, \ldots, t_N$ dependen del parámetro μ. Se denotará como ρ_μ a la medida espectral asociada, y a las fases de Prüfer por $\theta_N^E(\mu)$. Se define la medida espectral promedio ρ como

$$\rho \;=\; \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\; \rho_\mu\;. \tag{2.35}$$

Teorema 2. *Suponiendo que para todo $E \in [E_0, E_1]$ se cumple que:*
(i) $\mu \in I \mapsto \theta_N^E(\mu)$ *es estrictamente monótona con derivada acotada,*
(ii) $|\theta_N^E(\mu_1) - \theta_N^E(\mu_0)| > \pi$.

Entonces en el mismo intervalo $[E_0, E_1]$, la medida espectral promedio ρ es equivalente a la medida de Lebesgue

Demostración. De acuerdo a como se definió la medida promedio en (2.35) y sustituyendo lo que se obtuvo en la Proposición 10, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\rho([E_0,E_1]) &= \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \rho_\mu([E_0,E_1]) \\
&= \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \frac{1}{(R_L^E(\mu))^2} \\
&= \lim_{L\to\infty} \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu \int_{E_0}^{E_1} dE\ \frac{1}{(R_L^E(\mu))^2} \\
&= \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{(R_L^E(\mu))^2}\ .
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

Fue posible en el cálculo anterior sacar el límite por el Teorema de Convergencia Dominada ya que el integrando está dominado, e intercambiar las integrales usando el Teorema de Fubini, ya que son finitas, y lo que se tiene entonces es que

$$
\rho([E_0,E_1]) = \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{(R_L^E(\mu))^2}\ .
$$

Denotemos para $L > N$:

$$
R_{L,N}^E(\theta) = \left\| \mathcal{T}^E(L,N) \begin{pmatrix} \cos(\theta_N^E(\mu)) \\ \sin(\theta_N^E(\mu)) \end{pmatrix} \right\|\ .
$$

$R_{L,N}^E(\theta)$ no depende de μ ya que se supuso que solamente las primeras N entradas dependerían de μ. Ahora, es posible descomponer el radio $R_L^E(\mu)$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} R_L^E(\mu) &= \left\| \mathcal{T}^E(L,0) \begin{pmatrix} \cos(\mu) \\ \sin(\mu) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \mathcal{T}^E(L,N)\mathcal{T}^E(N,0) \begin{pmatrix} \cos(\mu) \\ \sin(\mu) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \mathcal{T}^E(L,N) R_N^E \begin{pmatrix} \cos(\theta_N^E(\mu)) \\ \sin(\theta_N^E(\mu)) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \mathcal{T}^E(L,N) \begin{pmatrix} \cos(\theta_N^E(\mu)) \\ \sin(\theta_N^E(\mu)) \end{pmatrix} R_N^E(\mu) \right\| \\ &= R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu))\ R_N^E(\mu)\ . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Se supuso desde el principio que $\mu \mapsto H(\mu)$ es diferenciable, con lo cual es continua y puesto que μ está en un intervalo finito, entonces $H(\mu)$ alcanza su máximo y mínimo, de manera que obtenemos las siguientes cotas:

$$0 \ < \ C_0 \ \le \ R_N^E(\mu)^2 \ \le \ C_1 \ < \ \infty\ .$$

Si ahora utilizamos la descomposición (2.37) y las cotas obtenidas, entonces en uno de los sentidos obtenemos que

$$\begin{aligned} \rho([E_0,E_1]) &= \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu))^2\ R_N^E(\mu)^2} \\ &\le \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu))^2\ C_0^2} \\ &\le C_2 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu))^2}\ . \end{aligned} \tag{2.38}$$

De manera análoga se calcula una cota inferior, con lo cual se tiene que

$$\rho([E_0,E_1]) \ \ge \ C_3 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} d\mu\ \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu))^2}\ ,$$

Por la hipótesis (i) sabemos que la derivada de μ es acotada, de manera que si hacemos un cambio de variables en la integral obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\mu_0}^{\mu_1} \quad d\mu \quad & \frac{1}{(R^E_{L,N}(\theta^E_N(\mu)))^2} \\ &= \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} d\theta \left|\frac{d\mu}{d\theta}\right| \frac{1}{(R^E_{L,N}(\theta))^2} .\end{aligned}$$

Además, por la hipótesis (i), es posible acotar el Jacobiano superior e inferiormente,

$$\begin{aligned}C_2 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} \quad d\theta \quad & \frac{1}{R^E_{L,N}(\theta)^2} \\ &\le \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} d\theta \left|\frac{d\mu}{d\theta}\right| \frac{1}{R^E_{L,N}(\theta)^2} \\ &\le C_3 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} d\theta \, \frac{1}{R^E_{L,N}(\theta)^2} .\end{aligned}$$

Para la cota inferior, por la hipótesis (ii) y utilizando la Proposición 8 tenemos que

$$\begin{aligned}C_2 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} \quad d\theta \quad & \frac{1}{R^E_{L,N}(\theta)^2} \qquad (2.39) \\ &\ge C_2 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_0^{\pi} d\theta \, \frac{1}{R^E_{L,N}(\theta)^2} \\ &\ge C_4 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \\ &= C_4|E_1 - E_0| , \qquad (2.40)\end{aligned}$$

y para la cota superior con los mismos argumentos, y suponiendo que el intervalo $[\theta(\mu_0), \theta(\mu_1)]$ puede descomponerse en M intervalos de longitud π, más uno de longitud menor a π, entonces se tiene que

$$
\begin{aligned}
C_3 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{\theta(\mu_0)}^{\theta(\mu_1)} d\theta \quad & \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta)^2} \\
&\leq (M+1)C_3 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_0^\pi d\theta \, \frac{1}{R_{L,N}^E(\theta)^2} \\
&\leq C_5 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \\
&= C_5 |E_1 - E_0| \, .
\end{aligned}
$$

□

En la aplicación de este teorema, se considerarán matrices de Jacobi de la forma

$$
H(\mu) \;=\; H(0) + \mu\, W \;, \qquad W \;=\; \sum_{n=1}^{N} w_n \,|n\rangle\langle n| \;,
$$

donde $H(0)$ es una matriz de Jacobi semi-infinita, $N < \infty$ y $w_1, \ldots, w_N \geq 0$ de manera que el potencial W es positivo. Se sacará el promedio sobre el parámetro μ y el siguiente resultado nos dice bajo que condiciones en el tamaño del intervalo $[\mu_0, \mu_1]$ es posible aplicar el teorema anterior. Las condiciones se van a expresar en términos del operador de Birman-Schwinger asociado, que es una matriz de $N \times N$ autoadjunta, definida para cualquier energía $E \in \mathbb{R}$ que no esté en el espectro de $H^N(0)$ definida por

$$
K_E^N \;=\; W^{\frac{1}{2}} \,(E - H^N(0))^{-1}\, W^{\frac{1}{2}} \;.
$$

Denotaremos por $H^N(\mu)$ a la matriz $N \times N$ dada por la esquina superior izquierda de $H(\mu)$.

Utilizaremos la notación $E_1(\mu), \ldots, E_N(\mu)$, para los eigenvalores de $H^N(\mu)$ y se considerarán ordenados tales que $E_1(\mu) < \ldots < E_N(\mu)$, siendo las desigualdades estrictas ya se sabe que los eigenvalores son todos distintos.

Teorema 3. *Dado un valor fijo $E \in \mathbb{R}$, supóngase que dos valores consecutivos w_m, w_{m+1} son estrictamente positivos y que en un intervalo $[\mu_0, \mu_1]$ se cumple una de las siguientes condiciones:*

(a) *Existen* $\mu_0', \mu_1' \in (\mu_0, \mu_1)$ *tales que* $E_n(\mu_0') = E_{n-1}(\mu_1') = E$ *para alguna* $n = 2, \ldots, N$.

(b) *El potencial* W *es estrictamente positivo,* E *no está en el espectro de* $H^N(0)$ *y existen dos valores no triviales* $\lambda_0(E)$ *y* $\lambda_1(E)$ *de* K_E^N *tales que*

$$\mu_0 < \frac{1}{\lambda_0(E)} < \frac{1}{\lambda_1(E)} < \mu_1 . \tag{2.41}$$

Entonces la medida espectral promedio ρ *definida como en* (2.35) *es equivalente a la medida de Lebesgue en un intervalo abierto alrededor de* E.

Demostración. Se buscará, entonces que se cumplan las dos condiciones del Teorema 2 para así poder concluir el resultado. Si aplicamos la Proposición 9 (ii)

$$R_N^E(\alpha)^2 \, \partial_{v_n} \theta_N^E(\alpha) = |\phi_n^E(\alpha)|^2 .$$

a la derivada con respecto a cada valor de la diagonal, en particular, para $m, m+1$ se tiene que por lo menos una función de onda ϕ_n^E no se anula, ya que se tienen dos valores, el m y el $m+1$, consecutivos no nulos. Por lo tanto, ya que la derivada $\partial_\mu \theta_N^E(\alpha)$ es estrictamente positiva, la condición (i) de monotonicidad del Teorema 2 se cumple.

Para la segunda condición, si se tiene la hipótesis (a), utilizando el Teorema 1 , en el cual se asegura que la fase de Prüfer $\theta_N^E(\mu)$ tiene que variar en más de π en el intervalo $[\mu_0, \mu_1]$, se concluye la condición (ii) del Teorema 2,

$$\theta_N^E(\mu_1) - \theta_N^E(\mu_0) > \pi .$$

En el caso que se tenga la hipótesis (b), vamos a escribir la ecuación de eigenvalores

$$H^N(\mu)\phi^E = E\phi^E$$

de la siguiente forma

$$(E - H^N(0))\phi^E = \mu W \phi^E .$$

Se supuso que W es positivo, por lo cual es invertible y de igual forma lo es el operador $W^{\frac{1}{2}}$. Igualmente se supuso que E no es eigenvalor de $H^N(0)$ con lo cual este operador no se anula y es también invertible. Podemos reescribir la ecuación anterior multiplicando del lado izquierdo primero por $(E - H^N(0))^{-1}$ y posteriormente por $W^{\frac{1}{2}}$ como

$$W^{\frac{1}{2}}(E - H^N(0))^{-1}(E - H^N(0))\phi^E = \mu W^{\frac{1}{2}}(E - H^N(0))^{-1} W^{\frac{1}{2}} W^{\frac{1}{2}} \phi^E ,$$

lo cual nos da una nueva ecuación de eigenvalores

$$\frac{1}{\mu}\left(W^{\frac{1}{2}}\phi^E\right) = K_E^N\left(W^{\frac{1}{2}}\phi^E\right) \ .$$

Por lo tanto podemos decir que E es eigenvalor de $H^N(\mu)$ si y solo si $\frac{1}{\mu}$ es eigenvalor de K_E^N y su vector correspondiente es $W^{\frac{1}{2}}\phi$. Lo que se busca ahora es analizar los eigenvalores de $H^N(\mu)$. Si $I = [\mu_0, \mu_1]$ cumple (2.41), entonces el intervalo I tiene dos valores μ_0' y μ_1' que cumplen $\mu_0' < \mu_1'$ y tales que $E_n(\mu_0') = E$ y $E_{n-1}(\mu_1') = E$ para alguna n en $2, \ldots N$ y con eso ya es posible aplicar la condición (a) que utiliza el Teorema de Oscilación. Por continuidad, es posible tomar un intervalo abierto que contenga a E para que el Teorema 2 que enuncia que la medida promedio ρ es equivalente a la medida de Lebesgue en un intervalo que contiene a E y se llega a la conclusión que se buscaba.

□

Se mencionará un ejemplo para ver como aparece en un caso concreto la condición (b) que introduce al operador de Birman-Schwinger

Ejemplo: Sea $N = 2$, $w_1, w_2 > 0$ y consideremos el operador $H^2(0)$

$$H^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damos la condición $E \neq \pm 1$ para que el operador $E - H^2(0)$ pueda se invertible con inversa dada por

$$(E - H^2(0))^{-1} = \frac{1}{E^2 - 1}\begin{pmatrix} E & 1 \\ 1 & E \end{pmatrix} .$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} K_E^2 &= W^{\frac{1}{2}}\frac{1}{E^2-1}\begin{pmatrix} E & 1 \\ 1 & E \end{pmatrix}W^{\frac{1}{2}} \\ &= \begin{pmatrix} w_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & w_2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\frac{1}{E^2-1}\begin{pmatrix} E & 1 \\ 1 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & w_2^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{E^2-1}\begin{pmatrix} Ew_1 & +\sqrt{w_1w_2} \\ +\sqrt{w_1w_2} & Ew_2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Los eigenvalores son

$$\lambda_{\pm}(E) \;=\; \frac{1}{4(E^2-1)}\left[\,E(w_1+w_2)\pm\sqrt{E^2(w_1^2+w_2^2)+4w_1w_2}\,\right]\;.$$

Para que se cumpla la condición (2.41) es necesario que ambos eigenvalores tengan el mismo signo y sean distintos de 0, lo cual se traduce en las condiciones $|E|>1$ or $|E|<1$.

El hecho de que se pida la condición de que dos valores w_m, w_{m+1} adyacentes sean estrictamente positivos se utiliza para asegurar la condición de monotonicidad (i) del Teorema 2. Esta condición podría cambiarse pidiendo, por ejemplo, que $\phi_m^E \neq 0$ para la menor m para la cual $w_m > 0$. Cabe mencionar que de esta forma ϕ_m^E es independiente de W.

El caso en que W tuviera solo una entrada no nula, por ejemplo, $w_N = 1$, puede analizarse de manera similar al caso en el que se promedia sobre una condición de frontera. En este caso se toma el promedio sobre el intervalo $(\mu_0,\mu_1)=\mathbb{R}$ y la medida $\rho = \int_{\mathbb{R}} d\mu\, \rho_\mu$ va a dominar a la medida de Lebesgue en todo $\mathbb{R}$.

La forma como se demuestra esto es la siguiente. Se descompone nuevamente el radio de Prüfer igual que en la prueba del Teorema 2 en $R_L^E = R_{L,N}^E(\theta_N^E)R_N^E$. Ahora, calculando a partir de la definición de las variables de Prüfer se tiene que

$$\cot(\theta_N^E) = E - \mu - (t_N^E)^2\tan(\theta_{N-1}^E)$$

y θ_{N-1}^E es independiente μ. Por lo cual, μ toma valores en todo $\mathbb{R}$, por consiguiente θ_N^E toma valores en $[0,\pi)$ para todo θ_{N-1}^E. Además, si se diagonaliza $R_\eta^*|\mathcal{T}^E(L,N)|^2R_\eta$ =diag$(\kappa, 1/\kappa)$ con una rotación R_η adecuada, entonces se puede llegar a que

$$\int_{\mathbb{R}} d\mu\;\frac{1}{(R_{L,N}^E(\theta_N^E(\mu)))^2} \;=\; \int_{\mathbb{R}} d\mu\;\frac{1}{\kappa\cos^2(\theta_N^E+\eta)+\frac{1}{\kappa}\sin^2(\theta_N^E+\eta)}\;.$$

La integral del lado derecho puede acotarse inferiormente por una constante uniforme en θ_{N-1}^E ya que $\frac{d\mu}{d\theta}\geq 1$. Con esto se llega al mismo resultado que se probó en la demostración del Teorema 2.

2.3. Promedio espectral en varios parámetros

Existen modelos para los cuales hay varios parámetros sobre los cuales se puede promediar la medida espectral, pero el promedio en uno solo de esos parámetros no es suficiente para llegar a que la medida promedio es equivalente a la medida de Lebesgue. En este caso, es posible promediar sobre varios parámetros para llegar a dicha equivalencia.

Consideremos en nuestro caso un modelo con una matriz de Jacobi semi-infinita de la siguiente forma:

$$H_{\lambda,N,v} \;=\; \Delta_N \,+\, \lambda \sum_{n=1}^{N} v_n \,|n\rangle\langle n| \,+\, J_N \;, \tag{2.42}$$

donde Δ_N es el Laplaciano discreto hasta el sitio N, esto quiere decir que $t_n = 1$ y $v_n = 0$ para $n = 1, \ldots, N$, y para $n > N$ estos mismos coeficientes se anulan. J_N es entonces una matriz de Jacobi arbitraria que esta en el caso punto límite con $t_n = v_n = 0$ para $n = 1, \ldots, N$, $\lambda \geq 0$ es una constante de acoplamiento, y las entradas del vector $v = (v_1, \ldots, v_N)$ son variables aleatorias reales, independientes, y cada una tiene una distribución según la medida de Lebesgue en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Se va a denotar a esta medida producto definida en el cubo unitario $I_N = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{\times N}$ como $\mathbf{P}(dv)$. Se van a suponer condiciones de frontera de Dirichlet $\alpha = 0$ y para facilitar la notación se prescindirá del término α en todas las fórmulas subsecuentes. Se denotará a la medida espectral de $H_{\lambda,N,v}$ con respecto a la entrada $|1\rangle$ como $\rho_{\lambda,N,v}$.

Teorema 4. *Sea $0 < \lambda < 4$ e I un intervalo abierto tal que su cerradura está contenida en $(-2 + \frac{\lambda}{2}, 2 - \frac{\lambda}{2})$. Entonces existe $N = N(\lambda)$ tal que la medida espectral promedio*

$$\rho_{\lambda,N} \;=\; \int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\; \rho_{\lambda,N,v} \;,$$

es equivalente a la medida de Lebesgue en I.

El radio y las fases de Prüfer en el estado v y con constante de acoplamiento $\lambda > 0$ se van a denotar como $\theta^E_{\lambda,n}(v)$ y $R^E_{\lambda,n}(v)$. En la prueba del Teorema 4 se utilizarán variables de Prüfer E-modificadas definidas en la sección 2.1.8 de este capítulo.

Un caso especial que hay que hacer notar en el comportamiento de las variables de Prüfer E-modificadas es el caso cuando $\lambda = 0$, pues se tiene que

$$\hat{R}^E_{0,n}(v) = \hat{R}^E_{0,0}(v) \; , \qquad \hat{\theta}^E_{0,n}(v) = \hat{\theta}^E_0 + nk \; . \tag{2.43}$$

Demostración del Teorema 4. Sean $E_0, E_1 \in I$. Se puede demostrar, de manera similar a como se hizo en la prueba del Teorema 2, que

$$\rho_{\lambda,N}([E_0, E_1]) \;=\; \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{I_N} \mathbf{P}(dv) \, \frac{1}{R^E_{\lambda,L}(v)^2} \; .$$

Para acotar por arriba esta integral es suficiente utilizar las variables de Prüfer sin modificar y seguir los pasos que se utilizaron en el Teorema 2, por lo cual solo tenemos que encontrar la forma de acotarla inferiormente. Aquí se puede pasar, sin problema alguno a las variables de Prüfer E-modificadas en cualquier energía $E \in [E_0, E_1]$. Probaremos primero que los radios de Prüfer cambian, a lo más, en un factor que puede ser acotado uniformemente en energía. De acuerdo a la definición tenemos que

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \hat{R}^E_{\lambda,n}(v)\cos\hat{\theta}^E_{\lambda,n}(v) \\ \hat{R}^E_{\lambda,n}(v)\sin\hat{\theta}^E_{\lambda,n}(v) \end{pmatrix} \\
&= M \begin{pmatrix} R^E_{\lambda,n}(v)\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v)) \\ R^E_{\lambda,n}(v)\sin(\theta^E_{\lambda,n}(v)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} \sin(k) & 0 \\ -\cos(k) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^E_{\lambda,n}(v)\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v)) \\ R^E_{\lambda,n}(v)\sin(\theta^E_{\lambda,n}(v)) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sin(k)}} \begin{pmatrix} R^E_{\lambda,n}(v)\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v))\sin(k) \\ -R^E_{\lambda,n}(v)\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k) + R^E_{\lambda,n}(v)\sin(\theta^E_{\lambda,n}(v)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^E_{\lambda,n}(v)^2 &= \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2\cos^2(\theta^E_{\lambda,n}(v))\sin^2(k)}{\sin(k)} \\
&\quad + \frac{(-R^E_{\lambda,n}(v)\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k) + R^E_{\lambda,n}(v)\sin(\theta^E_{\lambda,n}(v)))^2}{\sin(k)} \\
&= \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2\cos^2(\theta^E_{\lambda,n}(v))}{\sin(k)} + \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2\sin^2(\theta^E_{\lambda,n}(v))}{\sin(k)} \\
&\quad - \frac{2R^E_{\lambda,n}(v)^2\sin(\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k)}{\sin(k)} \\
&= \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2(1-\sin 2(\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k)}{\sin(k)} .
\end{aligned}
$$

De aquí podemos ver que por un lado,

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^E_{\lambda,n}(v)^2 &= \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2(1-\sin(2\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k))}{\sin(k)} \\
&\leq 2R^E_{\lambda,n}(v)^2 ,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

y por el otro

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^E_{\lambda,n}(v)^2 &= \frac{R^E_{\lambda,n}(v)^2(1-\sin(2\theta^E_{\lambda,n}(v))\cos(k))}{\sin(k)} \\
&\geq R^E_{\lambda,n}(v)^2\,\frac{1+\cos(k)}{\sin k} \\
&\geq K(E)R^E_{\lambda,n}(v)^2 ,
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

donde $K(E) = \text{ínf}_k \frac{1+\cos(k)}{\sin k}$ el cual es estrictamente positivo pues tanto el numerador como el denominador son positivos dentro del intervalo de energías $[E_0, E_1] \in (2-\frac{\lambda}{2}, 2+\frac{\lambda}{2})$.

Utilizando lo anterior, es posible entonces decir que

$$
\rho_{\lambda,N}([E_0,E_1]) \;\geq\; C_0 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\,\frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L}(v)^2} .
$$

Se puede de igual forma dividir el radio en un producto de dos radios como en (2.37):

$$\rho_{\lambda,N}([E_0,E_1]) \ \geq \ C_0 \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{I_N} \mathbf{P}(dv) \ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))^2} \ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,N}(v)^2} \ . \tag{2.46}$$

y es posible dar constantes positivas que dependan de N y λ, de la siguiente forma

$$C_1 \ = \ \max_{E_0\leq E\leq E_1,\, v\in I_N} \ \hat{R}^E_{\lambda,N}(v)^2 \ ,$$

para acotar el segundo factor del integrando en (2.46):

$$\rho_{\lambda,N}([E_0,E_1]) \ \geq \ \frac{C_0}{C_1} \lim_{L\to\infty} \int_{E_0}^{E_1} dE \int_{I_N} \mathbf{P}(dv) \ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))^2} \ . \tag{2.47}$$

Es necesario ahora, dar una transformación de variables en I_N conveniente para poder aplicar aquí nuevamente la Proposición 8 como se hizo en el caso de promedio espectral en un parámetro.

En primer lugar, consideremos la fase de Prüfer E-modificada $\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)$ en (2.47) pues queremos analizar qué valores puede tomar ésta. Se vio en la Proposición 14 que esta fase es monótona en v_n y como m^E es un difeomorfismo, entonces los valores máximo y mínimo ocurren en $\hat{\theta}_0 = \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2})$ y $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2})$.

Antes de continuar, analicemos un poco las fases modificadas de Prüfer al tomar distintas energías. Siempre se parte de la misma condición inicial, independientemente de la energía, es decir que en particular,

$$\theta^E_{\lambda,0}(-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}) = \theta^{E+\frac{\lambda}{2}}_{0,0}(v) = \pi \ ,$$

y de hecho para cualquier n se tiene también que $\theta^E_{\lambda,n}(-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2}) = \theta^{E+\frac{\lambda}{2}}_{0,n}(v)$, con lo cual

$$m^E(\theta^E_{\lambda,n}(-\frac{1}{2},\ldots,-\frac{1}{2})) = m^E(\theta^{E+\frac{\lambda}{2}}_{0,n}(v)) \ .$$

Si en lugar de la transformada E-modificada, consideramos la transformada $E+\frac{\lambda}{2}$-modificada, se tiene que para el caso $n=1$

$$\begin{aligned} m^{E+\frac{\lambda}{2}}(\theta_{0,1}^{E+\frac{\lambda}{2}}(v)) &= m^{E+\frac{\lambda}{2}}(\theta_{\lambda,1}^{E}(-\frac{1}{2},\dots,-\frac{1}{2})) \\ &= m^{E+\frac{\lambda}{2}}(m^{E})^{-1}(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(-\frac{1}{2},\dots,-\frac{1}{2})) \end{aligned}$$

Desarrollamos para conocer lo que se tiene en la expresión del lado derecho, y utilizando la variable k' para la transformada de Prüfer $E+\frac{\lambda}{2}$-modificada de modo que $E+\frac{\lambda}{2}=2\cos(k')$, llegamos a que

$$\begin{aligned} & M^{E+\frac{\lambda}{2}}(M^{E})^{-1}\begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \\ \sin(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sin(k)}\sqrt{\sin(k')}}\begin{pmatrix} \sin(k') & 0 \\ -\cos(k')+\cos(k) & \sin(k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \\ \sin(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Lo importante es hacer notar que esta última matriz tiene un desarrollo de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{\sin(k)}\sqrt{\sin(k')}}\begin{pmatrix} \sin(k') & 0 \\ -\cos(k')+\cos(k) & \sin(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda) ,$$

con lo cual

$$\begin{aligned} & M^{E+\frac{\lambda}{2}}(M^{E})^{-1}\begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \\ \sin(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \\ \sin(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\lambda)\begin{pmatrix} \cos(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \\ \sin(\hat{\theta}_{\lambda,1}^{E}(v)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\hat{\theta}_{0,1}^{E+\frac{\lambda}{2}}(v) = \hat{\theta}_{\lambda,1}^{E} + \mathcal{O}(\lambda) ,$$

y si se continúa esto de manera sucesiva hasta N se tiene que

$$\hat{\theta}_{0,N}^{E+\frac{\lambda}{2}}(v) = \hat{\theta}_{\lambda,N}^{E} + \mathcal{O}(\lambda) .$$

De igual forma para la transformada $E-\frac{\lambda}{2}$-modificada se tiene que

$$\hat{\theta}_{0,N}^{E-\frac{\lambda}{2}}(v) = \hat{\theta}_{\lambda,N}^{E} + \mathcal{O}(\lambda) \ .$$

Como consecuencia de lo anterior y lo mencionado en (2.43) tenemos que

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\lambda,N}^{E}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},...) &= \hat{\theta}_{0,N}^{E-\frac{\lambda}{2}}(v) + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= Nk' + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= N \arccos\left((E-\frac{\lambda}{2})/2\right) + \mathcal{O}(\lambda) \ ,
\end{aligned}$$

y de igual manera

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{\lambda,N}^{E}(\frac{1}{2},\frac{1}{2},...) &= \hat{\theta}_{0,N}^{E+\frac{\lambda}{2}}(v) + \mathcal{O}(\lambda) \\
&= N \arccos\left((E+\frac{\lambda}{2})/2\right) + \mathcal{O}(\lambda) \ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_0 &= \hat{\theta}_{0,N}^{E+\frac{\lambda}{2}}(v) - \hat{\theta}_{0,N}^{E-\frac{\lambda}{2}}(v) \ + \ \mathcal{O}(\lambda) \\
&= N \left[\arccos((E-\frac{\lambda}{2})/2) - \arccos((E+\frac{\lambda}{2})/2)\right] \ + \ \mathcal{O}(\lambda) \\
&\geq C_2 N\lambda \ + \ \mathcal{O}(\lambda) \ ,
\end{aligned}$$

de manera que es posible elegir N de orden $1/\lambda$ de tal forma que $\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_0 > \pi$.

Recordemos que en la Proposición 14 se probó que $\partial_{v_n}\hat{\theta}_{\lambda,N}^{E}(v) \geq 0$, como consecuencia de la Proposición 9(ii), y de hecho, para cada $N \geq 2$, tenemos que la desigualdad es estricta pues el radio de Prüfer es acotado. Además no se anula, pues no se posible que una eigenfunción se anule en dos puntos consecutivos, ya que entonces la solución sería solo la trivial, por lo cual podemos asegurar que

$$\|\nabla_v \hat{\theta}_{\lambda,N}^{E}(v)\| = \left(\sum_{n=1}^{N} |\partial_{v_n}\hat{\theta}_{\lambda,N}^{E}(v)|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Por lo tanto, la función que manda $v \in I_N \mapsto \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)$ no tiene puntos críticos. Sea $\hat{\theta}_0 \leq \hat{\theta} \leq \hat{\theta}_1$, entonces si se toman las 'superficies de nivel'

$$P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta}) \;=\; \left\{ \, v \in I_N \;\middle|\; \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v) = \hat{\theta} \, \right\} \;, \tag{2.48}$$

éstas resultan ser subvariedades reales analíticas de I_N de codimensión 1, y cuya frontera es de codimensión 2. Consideremos ahora al intervalo $[\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1]$ como aquel intervalo en $\hat{\theta}$ donde el conjunto $P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta})$ es no vacío. Ya se mencionó que el gradiente de $\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)$ con respecto a v no se anula, por lo cual es posible concluir que tanto $P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta}_0)$ como $P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta}_1)$ solo consisten de un punto, de lo contrario habría varios puntos o intervalos donde la función sería constante y eso no es posible. Por la teoría de Morse [Hir, Teo 6.2.2] podemos asegurar que todas las variedades $P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta})$, pero ahora para $\hat{\theta} \in (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$, son difeomorfas. Esto también implica que el volumen $(N-1)$-dimensional que se mide con la medida $(N-1)$-dimensional de Hausdorff $\mathcal{H}^{N-1}$ de la hipersuperficie $P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta})$ con $\hat{\theta} \in (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$, es positivo. Con esto podemos concluir que existe una constante $C_3 > 0$ de tal forma que para $\hat{\theta}$ en un intervalo un poco menor $[\hat{\theta}'_0, \hat{\theta}'_1] \subset (\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)$ se cumple que

$$\mathcal{H}^{N-1}(P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta})) \geq C_3 \; .$$

Es posible, tomando una N adecuada, hacer además que $\hat{\theta}_0$ y $\hat{\theta}_1$ sean tales que también $\hat{\theta}'_1 - \hat{\theta}'_0 > \pi$.

En seguida buscamos hacer un cambio de variables en la integral para poder, en lugar de integrar sobre el conjunto I_N, solamente integrar sobre un intervalo de ángulos y así poder proseguir como en la prueba del Teorema 2. Para esto mencionaremos la fórmula de Federer de coárea [EG], la cual para nuestro caso dice que para toda función Lipshitz-continua g

$$\int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\; J_1(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))\; g(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)) \;=\; \int_{\hat{\theta}_0}^{\hat{\theta}_1} d\hat{\theta}\; \mathcal{H}^{N-1}(P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta}))\; g(\hat{\theta}) \;,$$

donde $J_1(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))$ es el 1-Jacobiano dado por

$$J_1(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)) \;=\; \left\| \nabla_v \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v) \right\| \;=\; \left(\sum_{n=1}^{N} |\partial_{v_n} \hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \; .$$

Puesto que se está integrando sobre un conjunto compacto, se tiene que para todo $v \in I_N$ y $E \in [E_0, E_1]$

$$J_1(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v)) \leq C_4 \ .$$

Si ahora aplicamos la fórmula de coárea mencionada para la función $g(\hat{\theta}) = \hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta})^{-2}$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{I_N} \mathbf{P}(dv) \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))^2} &\geq \frac{1}{C_4} \int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\ J_1(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))\ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta}^E_{\lambda,N}(v))^2} \\
&= \frac{1}{C_4} \int_{\hat{\theta}_0}^{\hat{\theta}_1} d\hat{\theta}\ \mathcal{H}^{N-1}(P^E_{\lambda,N}(\hat{\theta}))\ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta})^2} \\
&\geq \frac{C_3}{C_4} \int_{\hat{\theta}'_0}^{\hat{\theta}'_1} d\hat{\theta}\ \ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta})^2} \ .
\end{aligned}$$

Puesto que $\hat{\theta}'_1 - \hat{\theta}'_0 > \pi$, de igual manera las fases de Prüfer correspondientes no modificadas también cumplen que $\theta'_1 - \theta'_0 > \pi$. Esto se debe a la condición que cumple la función m^E al tomar las variables E-transformadas de Prüfer, ya que tenemos que

$$\hat{\theta}'_1 > \hat{\theta}'_0 + \pi \ ,$$

es decir,

$$m^E(\theta'_1) > m^E(\theta'_0 + \pi) \ ,$$

y como sabemos que la función m es estrictamente creciente entonces se tiene

$$\theta'_1 > \theta'_0 + \pi \ .$$

Y entonces es posible regresar en la integral que se está acotando a las variables no modificadas de Prüfer agregando solamente un término constante como se vio en (2.44). Por lo tanto es posible continuar acotando por abajo la integral de la derecha y con una cota que además es independiente de L,

$$\frac{C_3}{C_4} \int_{\hat{\theta}'_0}^{\hat{\theta}'_1} d\hat{\theta}\ \ \frac{1}{\hat{R}^E_{\lambda,L,N}(\hat{\theta})^2} > C_5 \int_{\theta'_0}^{\theta'_1} d\theta\ \ \frac{1}{R^E_{\lambda,L,N}(\theta)^2}$$

y finalmente podemos aplicar la Proposición 8. Regresando a lo que teníamos en (2.47) llegamos a que

$$\rho_{\lambda,N}([E_0, E_1]) \ > \ C_6 \lim_{L \to \infty} \int_{E_0}^{E_1} dE = C_6 |E_1 - E_0|$$

y de aquí y de la cota superior que ya se tenía es posible concluir que en I la medida espectral promedio es equivalente a la medida de Lebesgue.

$\square$

2.4. Aplicaciones al análisis espectral

Consideremos nuevamente el modelo definido en (2.42)

$$H_{\lambda,N,v} \;=\; \Delta_N \,+\, \lambda \sum_{n=1}^{N} v_n \, |n\rangle\langle n| \,+\, J_N \,. \tag{2.49}$$

No se están dando condiciones para J_N con lo cual se puede esperar que haya cualquier tipo de espectro en los operadores $H_{\lambda,N,v}$.

Proposición 15. *Sea $\hat{\lambda} \in (0,4)$ y sean el intervalo $\hat{I}$ nuevamente un intervalo abierto cuya cerradura está contenida en $(-2+\frac{\lambda}{2}, -2+\frac{\lambda}{2})$ y $\hat{N} = N(\hat{\lambda})$ la que da el* Teorema 4. *Sea $\hat{v} = (\hat{v}_1, \ldots, \hat{v}_{\hat{N}})$ un vector con entradas fijas tales que $\hat{v}_n \geq 0$ y con la condición de que por lo menos dos entradas adyacentes de éste sean estrictamente positivas. Entonces son equivalentes las siguientes dos condiciones:*

(i) $H_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}$ *tiene espectro singular en $\hat{I}$ para toda $\lambda \in B$ donde $B \subset \mathbb{R}$ tiene medida positiva de Lebesgue, es decir, $|B| > 0$.*

(ii) $H_{\hat{\lambda},\hat{N},v}$ *tiene espectro singular en $\hat{I}$ para toda $v \in D \subset I_{\hat{N}}$ donde $\mathbf{P}(D) > 0$.*

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii): Llamemos $S \subset \mathbb{R}$ al conjunto de energías para el cual el operador $H_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}$ tienen soluciones subordinadas (ver Apéndice E). Este conjunto es un soporte de la parte singular y es independiente de $\lambda, \hat{N}, \hat{v}$ pues solo depende del comportamiento de las soluciones en el infinito. Supongamos que (i) se cumple, es decir, que $H_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$ para $\lambda \in B$ donde $|B| > 0$, esto da peso a la medida espectral y como consecuencia también a la medida promedio en este conjunto (como consecuencia del Corolario 2.8 de [dRSS]) por lo cual para toda $\lambda \in B$ se tiene

$$\rho_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}(S \cap \hat{I}) > 0.$$

Esto entonces implica que

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda \, \rho_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}(S \cap \hat{I}) > 0.$$

Por lo tanto, tenemos que se cumplen las condiciones del Teorema 3, es decir dos valores consecutivos positivos, y además que se tiene la libertad de tomar el intervalo en λ tan grande como sea necesario para que se cumpla la condición a) con lo cual se asegura que

$$|S \cap \hat{I}| > 0.$$

Ahora es posible aplicar el Teorema 4 pues se tienen $\hat{I}$ y $\hat{\lambda}$ que cumplen las hipótesis, por lo cual existe una N tal que

$$\int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\, \rho_{\hat{\lambda},\hat{N},v}(S \cap \hat{I}) > 0\ .$$

Podemos entonces decir que para toda $v \in D$ con $\mathbf{P}(D) > 0$

$$\rho_{\hat{\lambda},\hat{N},v}(S \cap \hat{I}) > 0\ ,$$

y es posible, entonces, concluir que $H_{\hat{\lambda},\hat{N},v}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$ para toda $v \in D$ con $\mathbf{P}(D) > 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ahora tomemos el caso en que $H_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}$ tiene espectro singular para toda $v \in D \subset I_{\hat{N}}$ donde $\mathbf{P}(D) > 0$, entonces la medida espectral y también la promedio tienen peso, es decir que,

$$\int_{I_N} \mathbf{P}(dv)\, \rho_{\hat{\lambda},\hat{N},v}(S \cap \hat{I}) > 0.$$

Ahora aplicamos el Teorema 4 y se llega a que entonces $|S \cap \hat{I}| > 0$. Si se eligen adecuadamente dos valores λ_0 y λ_1, para tener las condiciones del Teorema 3 es posible aplicarlo y concluir que $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} d\lambda\, \rho_{\lambda,\hat{N},\hat{v}}(S \cap \hat{I}) > 0$, y como consecuencia se tiene que en el conjunto $\hat{I}$ hay espectro singular para λ dentro de un intervalo no vacío $B = (\lambda_0, \lambda_1)$ que, de acuerdo a como se eligieron λ_1 y λ_2, tiene medida positiva.

□

Proposición 16. *Sea $\hat{I}$ un intervalo abierto fijo y sean $\hat{N}_0, \hat{N}_1$ enteros positivos tales que $\hat{v}_0 \in I_{\hat{N}_0}, \hat{v}_1 \in I_{\hat{N}_1}$. Entonces son equivalentes las siguientes dos condiciones:*

(i) *$H_{\lambda,\hat{N}_0,\hat{v}_0}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$ para $\lambda \in B_1$ donde $B_1 \subset \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue positiva, es decir, $|B_1| > 0$.*

(ii) *$H_{\lambda,\hat{N}_1,\hat{v}_1}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$ para $\lambda \in B_2$ donde $B_2 \subset \mathbb{R}$ tiene medida positiva de Lebesgue, es decir, $|B_2| > 0$.*

Demostración (i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que se cumple (i), es decir, para $\lambda \in B_1$ donde $B_1 \subset \mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue positiva, es decir, $|B_1| > 0$ el operador $H_{\lambda,\hat{N}_0,\hat{v}_0}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$. Esto quiere decir que para toda $\lambda \in B_1$ se tiene

$$\rho_{\lambda,\hat{N}_0,\hat{v}_0}(S \cap \hat{I}) > 0,$$

y por lo tanto también

$$\int_{\mathbb{R}} d\lambda \; \rho_{\lambda,\hat{N}_0,\hat{v}_0}(S \cap \hat{I}) > 0.$$

Podemos nuevamente aplicar el Teorema 3 ya que se tienen 2 valores consecutivos estrictamente positivos, y además, es posible elegir un intervalo en λ tan grande como sea necesario para satisfacer la condición a), entonces tenemos la equivalencia de $\int d\lambda \; \rho_{\lambda,\hat{N}_0,\hat{v}_0}(S \cap \hat{I})$ con la medida de Lebesgue, y por tanto se tiene que en aquél intervalo de λ

$$|S \cap \hat{I}| > 0.$$

Si ahora a esta medida de Lebesgue, le aplicamos nuevamente el Teorema 3, para lo cual también con N_1 y v_1 se tienen las hipótesis satisfechas de dos valores consecutivos positivos y la condición a) ya que el intervalo de λ obtenido en el paso anterior se puede hacer más grande de ser necesario, se tiene entonces que

$$\rho_{\lambda,\hat{N}_1,\hat{v}_1}(S \cap \hat{I}) > 0,$$

esto es, que $H_{\lambda,\hat{N}_1,\hat{v}_1}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$ para $\lambda \in B_1$, donde el conjunto B_1 está dado de acuerdo al paso anterior.

(ii) $\Rightarrow$ (i) se hace de manera análoga a como se probó (i) $\Rightarrow$ (ii).

□

Proposición 17. *Sean $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1 \in (0,4)$ dos valores fijos, y consideremos un intervalo $\hat{I}$ correspondiente y un entero $\hat{N} = N(\hat{\lambda})$ cuya existencia está dada en el* Teorema 4. *Entonces son equivalentes las siguientes dos condiciones:*

(i) $H_{\hat{\lambda}_0,\hat{N},v}$ *tiene espectro singular en $\hat{I}$ para todo $v \in D_0 \subset I_{\hat{N}}$ donde $\mathbf{P}(D_0) > 0$.*

(ii) $H_{\hat{\lambda}_1,\hat{N},v}$ *tiene espectro singular en $\hat{I}$ para todo $v \in D_1 \subset I_{\hat{N}}$ donde $\mathbf{P}(D_1) > 0$.*

Demostración Dadas las hipótesis de la proposición, podemos primeramente decir que aplicando para λ_0 y λ_1 el Teorema 4, ambas medidas promedio $\rho_{\lambda_0,N}$ y $\rho_{\lambda_0,N}$ son equivalentes a la medida de Lebesgue en $\hat{I}$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos que $H_{\hat{\lambda}_0,\hat{N},v}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$, esto quiere decir que

$$\rho_{\lambda_0,N,v}(S \cap \hat{I}) > 0 \ ,$$

con lo cual se tiene que para $v \in D_0$ con $\mathbf{P}(D_0) > 0$,

$$\int_{\hat{I}_N} \mathbf{P}(dv)\rho_{\lambda_0,N,v}(S \cap \hat{I}) > 0 \ .$$

Por lo que se mencionó al inicio de la demostración, como consecuencia del Teorema 4 entonces

$$|S \cap \hat{I}| > 0 \ .$$

Pero tenemos también, como se dijo en un principio, que para λ_1 se da la equivalencia de las medidas por el Teorema 4, por lo tanto para $v \in D_1$ con $\mathbf{P}(D_1) > 0$

$$\int_{\hat{I}_N} \mathbf{P}(dv)\rho_{\lambda_1,N,v}(S \cap \hat{I}) > 0 \ .$$

Esto quiere decir que

$$\rho_{\lambda_1,N,v}(S \cap \hat{I}) > 0 \ ,$$

y que por lo tanto el operador $H_{\hat{\lambda}_0,\hat{N},v}$ tiene espectro singular en $\hat{I}$.
La demostración de (ii) $\Rightarrow$ (i) es análoga.

$\square$

Capítulo 3

Operador de Schrödinger

3.1. Teorema Principal

Definición 4. *Un operador de Schrödinger H aquí es un operador de la siguiente forma*

$$H \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \tag{3.1}$$

definido en $C_0^2[0,b]$ las funciones con segunda derivada continua, donde $q(x)$ es una función real que es localmente cuadrado integrable, $q(x) \in L_2^{loc}(0,b)$.

Definición 5. *Un problema a la energía E con condiciones a la frontera, es la ecuación diferencial*

$$(H\phi)(x) = E\phi(x), \qquad x \in (0,b), \tag{3.2}$$

asociada al operador dado en la definición 4 con condiciones de frontera de la forma

$$\begin{aligned} \phi(0)\cos(\alpha) + \phi'(0)\sin(\alpha) &= 0 \\ \phi(b)\cos(\beta) + \phi'(b)\sin(\beta) &= 0\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si $b = \infty$, existe una teoría de Weyl análoga a la que se mencionó en la Sección 2.1.5. Aquí vamos a suponer que q es tal que el operador H está en el caso punto límite al infinito, con lo cual se tienen índices de deficiencia (1,1), y fijemos una condición a la frontera en 0, es decir sobre α:

$$\phi(0)\cos(\alpha) + \phi'(0)\sin(\alpha) = 0 \ .$$

De esta forma el operador es esencialmente autoadjunto y el dominio del operador autoadjunto, que ahora denotaremos por H_α por tener una condición de frontera dada en α, es ahora:

$$D(H_\alpha) = \left\{ \begin{array}{c} \phi \in L_2(0,\infty) : \phi, \phi' \text{ son local absolutamente cont. en } (0,\infty), \\ H_\alpha \phi \in L_2(0,\infty) \quad \phi(0)\cos(\alpha) + \phi'(0)\sin(\alpha) = 0 \end{array} \right\} . \tag{3.4}$$

En este trabajo vamos a analizar el caso en el que $q(x)$ es una función llamada de corrimiento de la forma:

$$q_a(x) := \left\{ \begin{array}{cc} q(x-a) & x \geq a \\ 0 & 0 \leq x \leq a \end{array} \right. , \tag{3.5}$$

Por lo tanto, este operador también depende del parámetro a con lo cual,de aquí en adelante se usará la notación $H_{a,\alpha}$

Definición 6. *Sean $a_2 > a_1 > 0$ y $E_0 > 0$, entonces para un conjunto de Borel $A \subset [E_0, \infty)$ se define la medida promedio $\mu_\alpha(A)$ como*

$$\mu_\alpha(A) := \int_{a_1}^{a_2} \rho_{a,\alpha}(A) da \tag{3.6}$$

donde $\rho_{a,\alpha}$ es la función espectral asociada al operador $H_{a,\alpha}$

El teorema principal de esta sección da una equivalencia de esta medida promedio con la medida de Lebesgue bajo ciertas condiciones:

Teorema 5. *Si μ_α es la medida promedio definida en* 3.6 *asociada al operador $H_{a,\alpha}$, entonces*

i) *μ_α es absolutamente continuo con respecto a la medida de Lebesgue, lo cual se denotará por $\mu_\alpha \ll |\cdot|$.*

ii) *Si $a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{E_0}}$, entonces μ_α es equivalente a la medida de Lebesgue.*

3.2. Requerimientos técnicos

En esta sección se darán herramientas necesarias para la prueba del teorema.

Definición 7. *Dado $E \in \mathbb{R}$ y ϕ una solución no trivial de $H_{a,\alpha}\phi = E\phi$ y tal que para $c \in \mathbb{R}^+$*

$$\phi(c) = \sin\theta\ , \qquad \phi'(c) = \cos\theta\ ,$$

se definen las variables de Prüfer para $x \geq 0$ como las que cumplen:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= R_c(x)\sin\theta_c(x) \\ \phi'(x) &= R_c(x)\cos\theta_c(x) \end{aligned}$$

donde $\theta_c(x) = \theta_c(x, \alpha, E, V_a)$ y $R_c(x) = R_c(x, \alpha, E, V_a)$ son la fase y la amplitud de Prüfer de ϕ respectivamente.

Proposición 18. *Hay 3 propiedades que cumplen las variables de Prüfer:*

i) *Si E_1 y E_2 son puntos no discretos de $\rho_{a,\theta}$ y $E_1 < E_2$ entonces* [Pea, Thm 2].

$$\rho_{a,\theta}\big((E_1, E_2)\big) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{E_1}^{E_2} r_0(b, \theta, E, V_a)^{-2} dE\ .$$

ii) *Para cualesquiera $a, x, \theta, E \in \mathbb{R}$* [Sto2, Cor 12] *y* [Sto2, Ap. B]

$$\frac{1}{\pi} \int_{\beta}^{\beta+\pi} R_a(x, \theta, E, V_a)^{-2} d\theta = 1.$$

iii)

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial x} = \cos^2\theta_0(x) + (E - V_a)\sin^2\theta_0(x).$$

Demostración Las pruebas de i) y ii) se encuentran en las referencias dadas, solo se probará iii).
De acuerdo a como se definieron las variables de Prüfer se tiene que

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{\phi_0}{\phi_0'}\right) ,$$

con lo cual derivando con respecto a x se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta_0}{\partial x} &= \frac{(\phi_0')^2 - \phi_0 \phi_0''}{\phi_0^2 + (\phi_0')^2} \\
&= \frac{R_0^2 \cos^2(\theta_0) - (V-E)\phi_0^2}{R_0^2} \\
&= \cos^2(\theta_0) + (E-V)\sin^2(\theta_0) .
\end{aligned}$$

□

3.3. Prueba del Teorema Principal

Con un argumento similar al usado en [Sto1], dada K una constante positiva, sean $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ puntos de continuidad de $\rho_{a,\theta}$ para casi cada a tales que $K \leq E_1 < E_2$.

Se sigue de la Proposición 18(i) que

$$\begin{aligned}
\mu\big((E_1, E_2)\big) &= \int_{a_1}^{a_2} \rho_{a,\theta}\big((E_1, E_2)\big) da \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left[\lim_{b \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{E_1}^{E_2} R_0(b+a, \theta, E, V_a)^{-2} dE \right] da .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Primero se harán estimaciones para la doble integral de (3.7), y posteriormente se justificará como sacar el límite.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
R_0\big(b+a, \theta, E, V_a\big) &= R_0\big(a, \theta, E, 0\big) R_a\big(b+a, \phi_0(a, \theta, E, 0), E, V_a\big) \\
&= R_0\big(a, \theta, E, 0\big) R_0\big(b, \phi_0(a, \theta, E, 0), E, q(x)\big)
\end{aligned} \tag{3.8}$$

de manera que aplicando la descomposición de $r_0\big(b+a,\theta,E,V_a\big)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\pi}\left[\int_{E_1}^{E_2} \big(R_0(b+a,\theta,E,V_a)\big)^{-2} dE\right] da \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\pi}\left[\int_{E_1}^{E_2} R_0\big(a,\theta,E,0\big)^{-2} R_0\big(b,\phi_0(a,\theta,E,0),E,q(x)\big)^{-2} dE\right] da \\
&= \int_{E_1}^{E_2} \frac{1}{\pi}\left[\int_{a_1}^{a_2} R_0\big(a,\theta,E,0\big)^{-2} R_0\big(b,\phi_0(a,\theta,E,0),E,q(x)\big)^{-2} da\right] dE \\
&\leq C_1 \int_{E_1}^{E_2} dE \int_{a_1}^{a_2} da\, R_0\big(b,\phi_0(a,\theta,E,0),E,q(x)\big)^{-2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

el cambio en el orden de integración es posible ya que $R_0\big(b+a,\theta,E,V_a\big)$ es continua en el rectángulo $(a,E) \in [a_1,a_2] \times [E_1,E_2]$ y en este mismo rectángulo $R_0(a,\theta,E,0)$ es uniformemente acotada por lo cual es posible obtener la cota C_1 por arriba. y de manera análoga se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\pi}\left[\int_{E_1}^{E_2} \big(R_0(b+a,\theta,E,V_a)\big)^{-2} dE\right] da \\
&\qquad = C_2 \int_{E_1}^{E_2} dE \int_{a_1}^{a_2} da \quad R_0\big(b,\phi_0(a,\theta,E,0),E,q(x)\big)^{-2}.
\end{aligned}$$

Si llamamos

$$\beta(a) := \phi_0(a,\theta,E,0)$$

es posible hacer un cambio de variables de manera que

$$\int_{a_1}^{a_2} da\, R_0\big(b, \beta(a), E, q(x)\big)^{-2} = \int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} \frac{d\beta}{\beta'(a)} R_0\big(b, \beta(a), E, q(x)\big)^{-2}.$$

Puesto que por la Proposición 18(iii)

$$\text{mín}\{1, E\} \leq \beta'(a) \leq \text{máx}\{1, E\},$$

y ya que $E \in [E_1, E_2]$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned} C_3 \int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b, \beta, E, q(x)\big)^{-2} d\beta &\geq \int_{a_1}^{a_2} da\, R_0\big(b, \beta(a), E, q(x)\big)^{-2} \\ &\geq C_4 \int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b, \beta, E, q(x)\big)^{-2} d\beta \end{aligned} \tag{3.10}$$

donde C_3, C_4 son constantes positivas apropiadas.

De las desigualdades (3.9) y (3.10) se tiene entonces que

$$\begin{aligned} & C_5 \int_{E_1}^{E_2} dE \left[\int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b, \beta, E, q(x)\big)^{-2} d\beta \right] \\ \geq & \int_{a_1}^{a_2} \frac{1}{\pi} \left[\int_{E_1}^{E_2} \big(R_0(b+a, \theta, E, V_a)\big)^{-2} dE \right] da \\ \geq & C_6 \int_{E_1}^{E_2} dE \left[\int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b, \beta, E, q(x)\big)^{-2} d\beta \right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

para C_5, C_6 constantes positivas.

Para la prueba de i) es posible dividir al intervalo $[\beta(a_1), \beta(a_2)]$ en intervalos de longitud a los más π y usando la Proposición 18(ii) obtenemos que

$$\int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b, \beta, E, q(x)\big)^{-2} d\beta \leq \pi \left(\frac{\beta(a_2) - \beta(a_1)}{\pi} + 1 \right),$$

y para la primera desigualdad de (3.11) se tiene que

$$C_7(E_2 - E_1) \geq \int_{a_1}^{a_2} da \left[\frac{1}{\pi} \int_{E_1}^{E_2} R_0(b + a, \theta, E, V_a)^{-2} dE \right] .$$

Aplicando el lema de Fatou llegamos a que

$$C_7(E_2 - E_1) \geq \mu_\theta(E_1, E_2) .$$

Esto hasta ahora se probó para un intervalo abierto (E_1, E_2) pero usando el argumento de aditividad numerable se puede obtener el resultado para conjuntos de Borel en general.

Para la prueba del inciso ii) se buscan condiciones para a_1, a_2 de manera que $\beta(a_2) - \beta(a_1) \geq \pi$. Para obtener β en la Proposición 18(ii) se utilizó el potencial 0, por lo que es posible calcular explícitamente a β.

Tenemos que $\phi(x) := \sin(\alpha + \sqrt{E}x)$, donde

$$\alpha := \arctan(\sqrt{E} \tan\theta) \in [0, \pi) ,$$

cumple la ecuación

$$-\phi''(x) = E\phi(x)$$

y las condiciones

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \sin\theta \\ \phi'(0) &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}\beta(x)+n\pi &= \phi_0(x,\theta,E,0)+n\pi\\ &= \arg\big(\phi'(x)+i\phi(x)\big)+n\pi\\ &= \arg\big(\sqrt{E}\cos(\alpha+\sqrt{E}x)+i\sin(\alpha+\sqrt{E}x)\big)+n\pi\\ &= \arg\big(\sqrt{E}\cos(\alpha+\sqrt{E}x+n\pi)+i\sin(\alpha+\sqrt{E}x+n\pi)\big)\\ &= \beta\Big(x+\frac{n\pi}{\sqrt{E}}\Big).\end{aligned}$$

Puesto que de la Proposición 18(iii) se sigue que $\beta(x)$ es creciente entonces $a_2-a_1\geq\frac{\pi}{\sqrt{E}}$ implica que $\beta(a_2)-\beta(a_1)\geq\pi$.

Y utilizando la Proposición 18(ii) se tiene que

$$\int_{\beta(a_1)}^{\beta(a_2)} R_0\big(b,\beta,E,q(x)\big)^{-2}d\beta\geq\pi \quad \text{si} \quad a_2-a_1\geq\frac{\pi}{\sqrt{E}}.$$

Por lo cual es posible concluir que

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{1}{\pi}\left[\int_{E_1}^{E_2}R_0(b+a,\theta,E,V_a)^{-2}dE\right]da\geq C_8(E_2-E_1) \quad \text{si} \quad a_2-a_1\geq\frac{\pi}{\sqrt{E_0}}\ .$$

Para tratar el límite que aparece en (3.7) es necesario acotar

$$\tilde{F}_b(a):=\int_{E_1}^{E_2}R_0(b+a,\theta,E,V_a)^{-2}dE$$

para cada $b>0$ y aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Si utilizamos la descomposición de (3.8) es suficiente con acotar

$$F_b(a)=\int_{E_1}^{E_2}R_0\big(b,\beta(a),E,q(x)\big)^{-2}dE.$$

Del Lema 1 de [Pea] sabemos que

$$F_b(a) = \int_0^\pi \mu^b_{\beta(a),\gamma}(E_1, E_2) d\gamma$$

donde $\mu^b_{\beta,\gamma}$ es la medida espectral asociada al problema regular en $[0, b]$ con condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \phi(0)\cos\beta &- \phi'(0)\sin\beta = 0 \\ \phi(b)\cos\gamma &- \phi'(b)\sin\gamma = 0 \ . \end{aligned}$$

En este mismo artículo [Pea] se hace notar (prueba corolario 3) que estas medidas son uniformemente acotadas en b, β, γ. Por lo cual se tiene la cota de F. Por lo tanto

$$\mu_\theta(E_1, E_2) \geq C_8(E_2 - E_1)$$

y nuevamente por un argumento de aditividad numerable se puede obtener lo anterior para conjuntos de Borel en general de lo cual se sigue ii).

□

3.4. Aplicaciones a la teoría espectral

Como aplicación de este teorema tenemos el siguiente corolario

Corolario 1. *Sea $I := (E_1, E_2) \subset \mathbb{R}^+$ intervalo abierto y $H_{a,\alpha}$ definido anteriormente. Para $a \in \mathbb{R}^+$ cualquiera, el operador $H_{a,\alpha}$ tiene espectro singular continuo en I para un conjunto Θ de medida positiva de Lebesgue de θ, si y solo si para cualquier $\theta \in [0, \pi), H_{a,\alpha}$ tiene espectro singular continuo en I para todo $a \in B$ donde B es un conjunto tal que $|B| > 0$.*

Más aún, $\big|B \cap [a_1, a_2]\big| > 0$ siempre y cuando se cumpla la condición $a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{E_0}}$, donde $0 < E_0 < E_1$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea S el conjunto de energías E para el cual hay soluciones subordinadas en $H_a u = Eu$ que no estén en L_2. Este es el conjunto que soporta a la parte singular continua de $H_{a,\alpha}$ y además no depende de a ni de θ. Este conjunto tiene medida espectral positiva para un conjunto, es decir

$$\rho_{a,\theta}(S \cap I) > 0$$

en el conjunto Θ por hipótesis. Se tiene que

$$|S \cap I| = \int_0^\pi \rho_{a,\theta}(S \cap I) d\theta$$

por lo cual $|S \cap I| > 0$. Aplicando entonces el Teorema 5 ii) se tiene entonces que para cualquier θ si se cumple la condición $a_2 - a_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{E_0}}$, entonces

$$\mu_\theta(S \cap I) > 0 \ .$$

Por lo tanto, también se tiene que

$$\rho_{a,\theta}(S \cap I) > 0$$

para $a \in B$ donde el conjunto B cumple la condición

$$\Big| B \cap [a_1, a_2] \Big| > 0 \ .$$

$\Leftarrow$) Suponiendo ahora que $H_{a,\alpha}$ tiene espectro singular continuo en I para $a \in B$, donde B es un conjunto con medida positiva de Lebesgue, entonces para $a \in B$ se tiene

$$\rho_{a,\theta}(S \cap I) > 0 \ ,$$

y por lo tanto

$$\int_B \rho_{a,\theta}(S \cap I) da > 0 \ .$$

Podemos entonces decir que existe un intervalo $J = [a_1, a_2]$ para el cual

$$\int_J \rho_{a,\theta}(S \cap I) da \geq \int_{B \cap J} \rho_{a\theta}(S \cap I) da > 0 \ .$$

Si ahora aplicamos el Teorema 5 i) tenemos que $|S \cap I| > 0$ y por lo tanto para un valor fijo de a,

$$\int_0^\pi \rho_{a,\theta}(S \cap I) d\theta = |S \cap I| > 0 \ .$$

De aquí es posible concluir que $H_{a,\alpha}$ tiene espectro singular continuo en I para $\theta \in \Theta$, donde Θ es un conjunto con medida de Lebesgue positiva.

$\square$

Apéndice A

Notación de Dirac

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable, a un elemento ϕ de éste se le llama estado y se representa por

$$|\phi\rangle \ .$$

Esto también se puede ver como un vector columna

$$|\phi\rangle \ = \ (\phi_1, \phi_2, ...)^T \ .$$

Esto es posible hacerlo siempre y cuando el espacio de Hilbert sea separable, es decir que tenga una base numerable. Si denotamos a la base ortonormalizada por $|n\rangle$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces se tiene la descomposición usual de un vector con respecto a esta base

$$|\phi\rangle = \sum_{n\geq 1} \phi_n |n\rangle \ ,$$

donde $\phi_n \in \mathbb{C}$. En el caso particular del espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, la elección natural para los elementos de la base es el vector columna $|n\rangle = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)^T$ con una sola entrada que vale 1 en el lugar n-ésimo. De manera que también podemos expresar la componente ϕ_n de ϕ como $\phi_n = \langle n|\phi\rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interior del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Por otro lado $\langle\psi|$ es un elemento del espacio dual de $\mathcal{H}$, es decir es un funcional lineal, que se ve como un vector renglón

$$\langle\psi| = (\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, ...) \ .$$

Y de igual forma $\langle n|$ es el vector renglón que solo tiene 1 en la n-ésima entrada y 0 en el resto.

Aplicar $\langle \psi|$ a un elemento $\phi \in \mathcal{H}$, quiere decir hacer su producto interior, por lo que

$$\langle \psi|\phi\rangle = \sum_{n\geq 1} \overline{\psi_n}\phi_n \ .$$

Ahora, dado un operador lineal acotado sobre el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, tenemos que $A|\phi\rangle$ es también un elemento de $\mathcal{H}$, con lo cual, también es un vector columna al cual se le puede aplicar el funcional lineal $\langle \psi|$. Luego,

$$\langle \psi|A|\phi\rangle = \sum_{n,m\geq 1} \overline{\psi_n} A_{n,m}\phi_m \ ,$$

donde $A_{n,m} = \langle n|A|m\rangle \in \mathbb{C}$. Por otro lado, definimos $|\phi\rangle\langle\psi|$ como el operador de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ de rango uno. Más aún, si ϕ está normalizado, entonces $P = |\phi\rangle\langle\phi|$ es una proyección 1-dimensional en el subespacio generado por ϕ. Esto resulta de $P^2 = P^* = P$. En el caso en que $\dim(\mathcal{H}) = n$ sea finita, entonces con matrices de tamaño $n \times 1$ y $1 \times n$ obtenemos una nueva matriz de tamaño $n \times n$ de la siguiente forma:

$$|\phi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \overline{\psi_1}\phi_1 & \overline{\psi_2}\phi_1 & \dots & \overline{\psi_n}\phi_1 \\ \overline{\psi_1}\phi_2 & \overline{\psi_2}\phi_2 & \dots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \overline{\psi_1}\phi_n & \overline{\psi_2}\phi_n & \dots & \overline{\psi_n}\phi_n \end{pmatrix} .$$

Lo mismo sucede para subespacios de dimensión finita de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ de dimensión infinita, pues solo es necesario suponer que la matriz tiene entradas $a_{i\,j}$ distintas de 0 para $i, j \leq n$ y el resto de las entradas con valor 0.

Apéndice B

Transformaciones de Möbius

Definición 8. *Una transformación de Möbius es una función* $\mathcal{Z} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *de la forma:*

$$\mathcal{Z}(w) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot w = \frac{aw+b}{cw+d}$$

asociado a una matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *donde* $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
En el caso en que el denominados se haga 0*, entonces se entiende que* $\mathcal{Z}(w)$ *vale infinito en ese punto. Por lo cual la acción de Möbius* $\mathcal{Z}$*, más específicamente es en* $\mathbb{C} \cup \infty$*, es decir la compactificación en un punto de Alexandroff en* $\mathbb{C}$ *y* $\mathcal{Z}(\infty) = \frac{a}{c}$.

Proposición 19. *Sea* $\mathbb{H}^+$ *el semiplano superior del plano complejo. Para la transformación de Möbius definida anteriormente, en el caso en que* a, b, c, d *sean reales, con* $w \in \mathbb{H}^+$ *el denominador nunca se hace* 0*, y más aún* $\mathcal{Z}(w)$ *está nuevamente en el semiplano superior* $\mathbb{H}^+$.

Definición 9. *Denotemos por* $\mathcal{M}_{n \times m}$ *a las matrices de* n *renglones y* m *columnas. Definamos a la función de proyección* $\Pi : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *donde para* $y \neq 0$ *como*

$$\Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{x}{y} \; . \tag{B.1}$$

Claramente esta función cumple, que para una constante $r \in \mathbb{R}$ $r \neq 0$,

$$\Pi \begin{pmatrix} rx \\ ry \end{pmatrix} = \frac{x}{y} = \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

y además, que para matrices $\mathcal{U}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{M}_{2\,\times\,2}$, si $y \neq 0$

$$\Pi \left(\mathcal{U} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \mathcal{U} \cdot \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

y

$$\Pi \left(\mathcal{U}\mathcal{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = (\mathcal{U}\mathcal{V}) \cdot \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathcal{U} \cdot \left(\mathcal{V} \cdot \Pi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) . \tag{B.4}$$

Definición 10. *Se define la transformación de Cayley $\mathcal{C} : \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{C})$ como aquella matriz que está dada por*

$$\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} . \tag{B.5}$$

Su inversa $\mathcal{C}^{-1}$ está dada por

$$\mathcal{C}^{-1} = \mathcal{C}^{*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} . \tag{B.6}$$

Proposición 20. *Dadas Π definida en* (B.1) *y $\mathcal{C}$ la matriz de Cayley definida en* (B.5)*, se tiene que dado un ángulo θ,*

$$\Pi \left(\mathcal{C} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right) = e^{-2i\theta} .$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\Pi \left(\mathcal{C} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right) &= \Pi \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right) \\
&= \frac{\cos(\theta) - i \sin(\theta)}{\cos(\theta) + i \sin(\theta)} \\
&= \cos(2\theta) - i \sin(2\theta) \\
&= e^{-2i\theta} .
\end{aligned}$$

Apéndice C

Teoría de la medida

Sea (X, μ) un espacio de medida y sea $L_1(X, \mu)$ el espacio de las funciones integrables, es decir las que cumplen que $\int d\mu |f| < \infty$.

C.1. Teorema de Convergencia Monótona

Teorema 6. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X y supongamos que para cada $x \in X$*

(i) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots,$

(ii) $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Entonces la función $f(x)$ es medible, y

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu \, .$$

C.2. Teorema de Convergencia Dominada

Teorema 7. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X tales que*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x), \quad c.t.p. x \in X.$$

Si existe una función $g \in L_1(X, \mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

entonces $f \in L_1(X, \mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

C.3. Teorema de Fubini

Teorema 8. *Sean* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *y* $(Y, \mathcal{B}, \rho)$ *dos espacios de medida* σ*-finitos y* $f(x, y)$ *una función integrable en el espacio* $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \rho)$*. Entonces*

$$\begin{aligned} \int_{X\times Y} f(x,y)\, d(\mu\times\rho) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\rho \right) d\mu \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu \right) d\rho \, . \qquad \text{(C.1)} \\ & \qquad \text{(C.2)} \end{aligned}$$

Si existe por lo menos una de las integrales

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, d\rho \right) d\mu \quad o \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu \right) d\rho \, ,$$

entonces $f(x, y)$ *es integrable en* $(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mu \times \rho)$ *y la igualdad* (C.1) *se cumple.*

Apéndice D

Medida y Descomposición espectral

Dado un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ y un operador $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ autoadjunto, para cada $\phi \in \mathcal{H}$, la medida espectral ρ es la única medida de Borel que cumple que para cualquier función de Borel acotada f

$$\langle \phi | f(H) | \phi \rangle = \int f(x) d\rho(x).$$

Por el teorema de descomposición de Lebesgue, cualquier medida de Borel ρ se descompone de manera única

$$\rho = \rho_{ac} + \rho_{sc} + \rho_{pp}.$$

La parte absolutamente continua, ρ_{ac}, no da peso a los conjuntos de medida de Lebesgue cero. La parte puramente puntual, ρ_{pp}, es una suma numerable de medidas atómicas. La parte singular continua, ρ_{sc}, no da peso a los conjuntos numerables y está soportada en un conjunto de medida de Lebesgue cero. Definimos

$$\mathcal{H}_{ac} = \{\phi \in \mathcal{H} | \rho \text{ es puramente absolutamente continua}\} ,$$
$$\mathcal{H}_{sc} = \{\phi \in \mathcal{H} | \rho \text{ es puramente singular}\}$$

y

$$\mathcal{H}_{pp} = \{\phi \in \mathcal{H} | \rho \text{ es puramente puntual}\} .$$

Entonces

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} + \mathcal{H}_{sc} + \mathcal{H}_{pp}$$

y $\mathcal{H}_{ac}$, $\mathcal{H}_{sc}$, $\mathcal{H}_{pp}$ son espacios cerrados en norma,invariantes bajo H y mutuamente ortogonales. De manera que el espectro absolutamente continuo $\sigma_{ac}(H)$, el espectro singular continuo $\sigma_{sc}(H)$ y el puramente puntual $\sigma_{pp}(H)$ se definen como los espectros de las restricciones de H a los subespacios correspondientes y el espectro de H denotado por $\sigma(H)$ es su unión .
El teorema espectral para estos operadores dice que:

$$\langle\psi|f(H)|\psi\rangle = \int \rho_{\psi}(dE)f(E) \tag{D.1}$$

Si esto lo aplicamos a $f(H) = (H - z)^{-1}$ se tiene entonces que

$$\langle\psi|(H - z)^{-1}|\psi\rangle = \int \frac{\rho_{\psi}(dE)}{E - z}$$

Apéndice E

Teoría de Subordinación

El concepto de solución subordinada y su relación con la medida espectral fue desarrollado por Gilbert y Pearson para el caso continuo y por Kahn y Pearson y Jitomiriskaya y Last para el caso discreto [GP, KP, JL].

E.1. Caso Matrices de Jacobi

En esta sección se considerará una matriz de Jacobi semiinfinita H con condiciones de frontera a la izquierda, y que está en el caso punto límite en infinito y las soluciones de la ecuación de Schrödinger $H\phi = E\phi$ para una energía fija real E asociada a H.

Definición 11. *Si ϕ es una solución de la ecuación de Schrödinger, se dice que ϕ es una solución subordinada si para cualquier otra solución ψ a la misma energía se cumple que*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\|\phi\|_L}{\|\psi\|_L} = 0\ .$$

donde $L \in \mathbb{R}^+$ y la norma $\|\cdot\|_L$ está definida por

$$\|\,\phi\,\|_L = \left[\sum_{n=1}^{[L]} |\phi(n)|^2 + (L-[L])|\phi([L]+1)|^2\right]^{1/2} ,$$

donde $[L]$ denota la parte entera de L.

Definición 12. *El conjunto $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ es soporte minimal de una medida ρ dada en $\mathbb{R}$, si*

(i) $\rho(\mathbb{R} \setminus \mathcal{M}) = 0$,

(ii) $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ *y* $\rho(\mathcal{M}_0) = 0 \Rightarrow |\mathcal{M}_0| = 0$.

Teorema 9. *Si denotamos a los soportes minimales de la parte absolutamente continua y la singular de la medida espectral ρ como $\mathcal{M}_{ac}$ y $\mathcal{M}_s$, entonces tenemos que*

$$\mathcal{M}_{ac} = \{E \in \mathbb{R} : \textit{no existen soluciones subordinadas de } H\phi = E\phi\} ,$$

$$\mathcal{M}_s = \left\{ \begin{array}{c} E \in \mathbb{R} : \textit{existe una solución subordinada de } H\phi = E\phi \\ \textit{que cumple condiciones de frontera correspondientes en } 0 \end{array} \right\} .$$

E.2. Caso operadores de Schödinger

En esta sección se considerarán un operador de Schrödinger H en la semirecta positiva con condiciones de frontera en 0, que está en el caso punto límite en infinito y las soluciones de la ecuación de Schrödinger $H\phi = E\phi$ para una energía fija real E asociada a H.

Definición 13. *Si ϕ es una solución de la ecuación de Schrödinger, se dice que ϕ es una solución subordinada si para cualquier otra solución ψ a la misma energía se cumple que*

$$\lim_{L\to\infty} \frac{\|\phi\|_L}{\|\psi\|_L} = 0 .$$

La norma $\|\cdot\|_L$ es la norma en $L^2[0,\infty)$, dada por

$$\|\phi\|_L = \left(\int dx \phi(x) \right)^{1/2} .$$

Teorema 10. *Si denotamos a los soportes minimales de la parte absolutamente continua y la singular de la medida espectral ρ como $\mathcal{M}_{ac}$ y $\mathcal{M}_s$, entonces tenemos que*

$$\mathcal{M}_{ac} = \{E \in \mathbb{R} : \textit{no existen soluciones subordinadas de } H\phi = E\phi\}$$

$$\mathcal{M}_s = \left\{ \begin{array}{c} E \in \mathbb{R} : \textit{existe una solución subordinada de } H\phi = E\phi \\ \textit{que cumple condiciones de frontera correspondientes en } 0 \end{array} \right\} .$$

Además si denotamos $\mathcal{M}_{sc}$ al soporte minimal de la parte singular continua de ρ entonces se tiene que

$$\mathcal{M}_{sc} = \left\{ \begin{array}{c} E \in \mathbb{R} : \textit{existe una solución subordinada de } H\phi = E\phi \\ \textit{que cumple condiciones de frontera correspondientes en } 0 \\ \textit{pero no está en } L_2[0, \infty) \end{array} \right\} .$$

Bibliografía

[BL] P. Bougerol, J. Lacroix, *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*, (Birkhäuser, Boston, 1985).

[BS] D. Buschmann, G. Stolz, *Two-Parameter Spectral Averaging and Localization for Non-Monotonic Random Schrödinger Operator*, Trans. AMS **353**, 635-653 (2001).

[CL] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, (Birkhäuser, Boston, 1990).

[CdLv] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw–Hill Book Company Inc., 1955.

[dR1] R. del Rio, *Instability of the Absolutely Continuous Spectrum of Ordinary Differential Operators under Local Perturbations*, J. Math. Anal.Appl. **142**, 591-604 (1989).

[dR2] R. del Rio, *Embedded Eigenvalues of Sturm Liouville Operators*, Commun. Math. Phys. **142**, 421-431 (1991).

[dRM] R. del Rio, C.A. Martinez, *Sturm-Liouville operators in the half axis with shifted potentials*, Applic. Anal., **86**, 1211-1221 (2007).

[dRMS] R. del Rio, C.A. Martinez, H.Schulz-Baldes, *Spectral Averaging Technics for Jacobi Matrices*, J. Math. Phys., **49**, 023507 (2008).

[dRSS] R. del Rio, B. Simon, G. Stolz, *Stability of spectral types for Sturm-Liouville operators*, Math. Research Letters **1**, 437-450 (1999).

[dRT] R. del Rio, O. Tchebotareva, *Sturm-Liouville operators in the half axis with local perturbations*, J. Math. Anal. Appl. **329**, 557-566 (2007).

[EG] L. C. Evans, R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, (CRC Press, Boca Raton, 1992)

[GP] D.J. Gilbert, D.B. Pearson, *On Subordinacy and Analysis of the Spectrum of One-Dimensional Schrödinger Operators*, J. Math. Anal. Appl. **128**, 30-56 (1987).

[Hir] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, (Springer, New York, 1976).

[JL] S. Jitomirskaya, Y. Last, *Power-law subordinacy and singular spectra I. Half-line operators*, Acta Math. **183**, 171-189 (1999).

[JSS] S. Jitomirskaya, H. Schulz-Baldes, G. Stolz, *Delocalization in random polymer chains*, Commun. Math. Phys. **233**, 27-48 (2003).

[KP] S. Kahn, D.B. Pearson, *Subordinacy and spectral theory for infinite matrices*, Helv. Phys. Acta, **65**, 505-527 (1992).

[Kat] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, 2nd Edition, (Springer, Berlin, 1980).

[KS] S. Kotani, B. Simon, *Stochastic Schrödinger Operators and Jacobi Matrices on the Strip*, Commun. Math. Phys. **119**, 403-429 (1988).

[KLS] A. Kiselev, Y. Last, B. Simon, *Stability of singular spectral types under decaying perturbations*, J. Funct. Anal. **198**, 1-27 (2003).

[HM] P. D. Hislop, P. Müller, *A lower bound for the density of states of the lattice Anderson model*, preprint 2007.

[PF] L. Pastur, A. Figotin, *Spectra of Random and Almost-Periodic Operators*, (Springer, Berlin, 1992).

[Pea] D. B. Pearson, *Value distribution and spectral analysis of differential operators*, J. Phys. A **26**, 4067-4080 (1993).

[Sim1] B. Simon, *Spectral analysis of rank one perturbations and applications*, CRM Proc. Lecture Notes **8**, 109-149 (1995).

[Sim2] B. Simon, *Orthogonal polynomials with exponentially decaying recursion coefficients*, Procedings of S. Molchanov's 65th Birthday conference, 2006.

[Sto1] G. Stolz, *Localization for random Schrödinger operators with Poisson potential*, Ann. Inst. Henri Poincaré vol. 63 no. 3, 297–314 (1995).

[Sto2] G. Stolz, *Spectral theory of Schrödinger operators with potentials of infinite barriers type*, Habilitationsschrift, Frankfurt University (1994).

[Weg] F. Wegner, *Bounds on the Density of States in Disordered Systems*, Z. Phys. B - Condensed Matter **44**, 9-15 (1981).

[Wei] Weidmann, *Spectral Theory of Ordinary Differential Operators*, Lecture Notes in Mathematics **1258**, (Springer, Berlin, 1987).