UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

Posgrado en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias

OPERADORES DE SCHRODINGER Y TIPOS ESPECTRALES

T E S I S

Que para obtener el grado académico de

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMATICAS

PRESENTA

OLGA TCHEBOTAREVA NIKOLAEVNA

Director de tesis:

DR. RAFAEL RENE DEL RIO CASTILLO

MEXICO, D. F. FEBRERO, 2004

A mis abuelos.

Agradecimientos

Un profundo agradecimiento a mi asesor de doctorado, Dr. Rafael del Río, cuyo apoyo, entusiasmo y creatividad fueron para mi un gran impulso en la realización de este trabajo. Así también, le agradezco el tiempo que me ha dedicado y muchas cosas que aprendí de él, que sin duda serán de gran relevancia en mi desarrollo académico.

También quiero expresar un gran agradecimiento al Dr. Ricardo Weder por el tiempo y la dedicación con los que leyó este trabajo y sus muy importantes comentarios. De igual manera, le agradezco las diversas ocasiones que pude conversar con él, ya que estas platicas fueron muy constructivas para mí.

Deseo agradecer a los Doctores Natig Atakishiyev, Javier Rosenblueth, Juan Héctor Arredondo, Carlos Villegas y Stephen Sontz por la revisión de la tesis y ser jurado de la misma. No puedo dejar de mencionar la amistad y el apoyo de los Doctores Carlos Villegas y Stephen Sontz.

Agradezco al Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y Sistemas de la UNAM todas las facilidades proporcionadas para la realización de esta tesis.

Resumen

En esta tesis estudiamos las propiedades espectrales del operador de Schrödinger en la semirecta. Primero, damos un ejemplo de un potencial que genera espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo y el espectro singular continuo está soportado en un conjunto denso. Esto nos da el primer ejemplo conocido de espectros realmente mezclados.

En la segunda parte estudiamos promedios de la función espectral correspondiente al operador de Schrödinger para diferentes condiciones de frontera. Como consecuencia obtenemos condiciones que implican existencia del espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo para conjuntos de condiciones de frontera de medida positiva y potenciales nulos en el intervalo $[0, N]$. Estas condiciones están relacionadas con las estimaciones de la medida de conjuntos donde la densidad espectral es positiva.

Índice general

Introducción

La ecuación de Schrödinger en la semirecta

$$-y''(x) + V(x)y(x) = Ey(x), \quad x \in [0, \infty) \qquad (1)$$

describe el movimiento de una partícula cuántica en un caso particular e importantes propiedades físicas de este sistema dependen directamente de la estructura espectral del operador asociado a esta ecuación. Esta tesis está dedicada al estudio de diferentes partes del espectro del operador de Schrödinger, especialmente al espectro singular continuo.

Desde hace bastante tiempo se sabe que existen operadores de Schrödinger con espectro singular continuo (por el teorema espectral inverso de Gelfand-Levitan). Debido a que usualmente se suponía que este tipo de espectro no admite una interpretación física, los trabajos en el estudio del espectro se concentraban en la tarea de dar criterios que garantizan ausencia de este tipo de espectro. El punto que cambió la dirección en el estudio del espectro fué el trabajo de Pearson [17] en 1978, donde por primera vez se da un ejemplo explícito de un potencial con espectro singular continuo y una interpretación física de este tipo de espectro.

En 1997 Remling en [20] dió el primer ejemplo de potencial con espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo. En este ejemplo tenemos el espectro absolutamente continuo, igual al espectro esencial, que llena todo el semieje positivo. No tenemos espectro puntual en el semieje positivo y para un conjunto de condiciones de frontera de medida positiva tenemos el espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo (ver sección 2.6).

En relación con la construcción de Remling surgen dos preguntas:
Primero, en dado ejemplo el espectro singular continuo está soportado en un conjunto denso en ningún lado. Entonces es interesante obtener un ejemplo con espectros realmente mezclados, donde el espectro singular continuo

está soportado en un conjunto denso.
Segundo, no se da ninguna característica del conjunto de condiciones de frontera para las cuales tenemos espectro mixto. No se sabe por ejemplo si es un conjunto grande, probablemente que contiene todas las condiciones de frontera o un conjunto realmente pequeño.

Los resultados de esta tesis contestan estas dos preguntas. En el capítulo 3 damos una construcción explícita de un potencial con espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo y el espectro singular continuo está soportado en un conjunto denso, lo cual nos da un ejemplo de espectros realmente mezclados.

Los resultados del capítulo 4 están relacionados con el estudio del comportamiento de diferentes partes del espectro cuando la condición de frontera varía. Hay varios resultados conocidos en esta dirección. Por ejemplo se sabe que no podemos tener un conjunto de eigenvalores denso en un intervalo para todas las condiciones de frontera; ver [7, 2]. En cierta forma el espectro esencial impide la existencia del espectro denso puntual para muchas condiciones de frontera. Por otro lado, es posible tener el espectro singular continuo para todas las condiciones de frontera. En este contexto en el capítulo 4 estudiamos como la existencia del espectro absolutamente continuo afecta las posibilidades de existencia del espectro singular continuo y damos un criterio que caracteriza el conjunto de condiciones de frontera donde tenemos el espectro mixto. En particular, este criterio nos permite describir el conjunto de condiciones de frontera para las cuales tenemos el espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo en [20] y capítulo 3.

Además de los nuevos resultados de los capítulos 3, 4 esta tesis incluye preliminares reunidos en los capítulos 1, 2. En el capítulo 2 presentamos una breve descripción de aspectos básicos de la teoría de operadores de Schrödinger en la semirecta y en el capítulo 1 están reunidos varios resultados que usamos a lo largo de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo están reunidas las principales herramientas que se usan en el resto de la tesis, salvo la teoría de los operadores de Schrödinger en la semirecta que se describe en el siguiente capítulo. Aquí se discuten elementos de los siguientes temas: Densidad de conjuntos, Teoría de la medida, Espacios L_p, Convergencia de series, Transformadas de Fourier, la Representación integral de Herglotz, la Fórmula de inversión de Stieltjes y Probabilidad. El material de cada sección es tomado de la referencia que indicamos al inicio de la sección, salvo cuando en el texto se da otra referencia.

1.1. Definiciones sobre densidad de conjuntos (Ver [9, sección 5.2])

Sean A y B dos subconjuntos de un espacio métrico R. $\overline{A}$ denota la clausura del conjunto A en R.

Definición 1.1 (Conjuntos densos). *El conjunto A es denso en B, si $\overline{A} \supset B$.*

Definición 1.2 (Conjuntos densos en ningún lado). *El conjunto A es denso en ningún lado, si es denso en ninguna bola, i.e. $\forall$ bola $B \subset R$ existe otra bola $B' \subset B$ tal que $B' \cap A = \emptyset$.*

Sea $R = \mathbb{R}$ los números reales y $|\cdot|$ la medida de Lebesgue.

Definición 1.3 (Conjuntos esencialmente densos). *Un conjunto A es esencialmente denso en B, si $\forall$ intervalo abierto $B' \subset B$ tenemos que $|A \cap B'| \neq 0$.*

1.2. Elementos de la teoría de la medida (Ver [22, Cap. 11])

Definición 1.4 (**σ-álgebra**). *Sea X un conjunto arbitrario. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es una σ-álgebra si:*

(i) $X \in \mathcal{A}$,

(ii) *para todo conjunto A que pertenece a $\mathcal{A}$ el conjunto A^c pertenece a $\mathcal{A}$, donde $A^c = X \setminus A$ es el complemento de A en X, y*

(iii) *para cada sucesión $\{A_i\}$ de conjuntos que pertenecen a $\mathcal{A}$, el conjunto $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ pertenece a $\mathcal{A}$.*

Entonces una σ-álgebra en X es una familia de subconjuntos de X que contiene a X y es cerrada respecto al complemento y a la formación de uniones numerables. La σ-álgebra mas común es la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$. Esta σ-álgebra es generada por la colección de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$. Un **conjunto de Borel** es un conjunto que pertenece a la σ-álgebra de Borel.

Definición 1.5 (**Medida**). *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X. Una medida en $\mathcal{A}$ es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que satisface siguientes condiciones;*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$, *y*

(ii) $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$, *para cualquier colección numerable disjunta de conjuntos $\{A_i\}$ que pertenecen a $\mathcal{A}$. (Como $\mu(A_i) \geq 0$ para todo i, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ siempre existe como un número real o como $+\infty$.)*

Los conjuntos en $\mathcal{A}$ se llaman medibles respecto a μ.

Si X es un conjunto, $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X y μ es una medida en $\mathcal{A}$, entonces la tercia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ la llamamos un espacio medible. Muchas veces se refiere al par $(X, \mathcal{A})$ como un espacio medible.

Definición 1.6 (**Medidas absolutamente continuas**). *Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, μ y ν dos medidas en $(X, \mathcal{A})$. Entonces ν es absolutamente continua respecto a μ, si para todo conjunto A que pertenece a $\mathcal{A}$ y satisface $\mu(A) = 0$ tenemos que $\nu(A) = 0$.*

Cuando decimos que una medida es absolutamente continua, nos referimos a una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.

Definición 1.7 (**Medidas singulares**). *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una medida μ está concentrada en un conjunto $E \in \mathcal{A}$, si $\mu(E^c) = 0$. Supongamos que μ y ν son dos medidas en $(X, \mathcal{A})$. Entonces μ y ν son mutuamente singulares, si existe un conjunto $E \in \mathcal{A}$ tal que μ está concentrada en E y ν está concentrada en E^c.*

Decimos que una medida es singular, si es singular respecto a la medida de Lebesgue.

Teorema 1.1 (**De descomposición de Lebesgue**). *Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y μ una medida en $(X, \mathcal{A})$. Entonces existen únicas medidas μ_{ac} y μ_s en $(X, \mathcal{A})$ tales que*

(i) *μ_{ac} es absolutamente continua,*

(ii) *μ_s es singular, y*

(iii) $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$.

La descomposición $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ se llama la descomposición de Lebesgue de μ; μ_{ac} y μ_s son las partes absolutamente continua y singular de μ.

Sea $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con las siguientes propiedades:

(i) $\rho(\lambda)$ es una función monótona creciente,

(ii) $\rho(\lambda)$ es continua por la derecha, i.e.

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \rho(\lambda + \varepsilon) = \rho(\lambda),$$

entonces podemos definir una medida μ en la σ-álgebra de Borel de la siguiente manera

$$\mu((a, b]) = \rho(b) - \rho(a).$$

La medida μ se llama la medida de Borel-Stieltjes generada por ρ. Para una medida de Borel-Stieltjes, un punto singular λ_0 puede tener medida positiva si y solo si la función $\rho(\lambda)$ es discontinua en λ_0. La medida de un punto singular λ_0 está dada por

$$\mu(\{\lambda_0\}) = \rho(\lambda_0) - \lim_{\varepsilon \to 0+} \rho(\lambda_0 - \varepsilon).$$

Puntos que tienen una medida estrictamente positiva se llaman puntos discretos de la medida. Una medida de Borel-Stieltjes puede tener a lo más un número numerable de puntos discretos. Si no hay puntos discretos, entonces la función $\rho(\lambda)$ es continua y la medida μ es una medida continua. Para cualquier medida continua de Borel-Stieltjes, la medida de un conjunto numerable de puntos es cero.

Por el Teorema de descomposición de Lebesgue 1.1, una medida de Borel-Stieltjes dada μ puede descomponerse en partes absolutamente continua y singular respecto a la medida de Lebesgue, $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$. A su vez, la parte singular μ_s puede descomponerse en partes singular continua y discreta. Así μ_{sc} es una medida singular continua en el sentido de que los puntos singulares tienen medida cero. Por otro lado, la parte discreta μ_d de la medida μ está concentrada en aquellos puntos (un número finito o numerable) que tienen medida positiva. Tomando $\mu_s = \mu_{sc} + \mu_d$, podemos escribir la descomposición completa

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d.$$

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama **función de escalera** si es una función monótona, continua salvo un conjunto numerable de puntos y f es constante en trozos en el complemento de este conjunto. Una función f se llama **singular continua** si f' existe a.e. y es igual a cero a.e. La función f se llama **absolutamente continua** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_i')| < \epsilon$$

para cada entero $n \geq 1$ y $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n' \in \mathbb{R}$. En correspondencia con la descomposición de Lebesgue, cualquier función monótona $\rho(\lambda)$ se descompone (de manera única) en suma de funciones absolutamente continua, singular continua y de escalera (parte puntual):

$$\rho(\lambda) = \rho_{ac}(\lambda) + \rho_{sc}(\lambda) + \rho_p(\lambda).$$

1.3. Espacios L_p (Ver [24, p.66])

Definición 1.8 (Funciones medibles). *Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y A un subconjunto de X que pertenece a $\mathcal{A}$. Una función $f : A \to [-\infty, +\infty]$ es $\mathcal{A}$-medible, si para todo número real t el conjunto $\{x \in A : f(x) < t\}$ pertenece a $\mathcal{A}$.*

Definición 1.9 (Espacio L_p). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio medible y $1 \leq p < \infty$. $L_p(X, \mu)$ es el espacio de todas las funciones medibles en X tales que $\int_X |f|^p \, d\mu < \infty$, considerando dos funciones equivalentes si son iguales salvo un conjunto de medida cero (a.e.)*

L_p es un espacio métrico completo, con la norma

$$||f||_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Si $p = 2$, en el espacio L_2 podemos definir el producto escalar:

$$(f, g) = \int_X f\bar{g} \, d\mu$$

Teorema 1.2. *Si $\{f_n(x)\}$ es una sucesión de funciones en L_p $(1 \leq p < \infty)$ convergente en la métrica de L_p a una función $\hat{f}(x)$ y, además, $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente para casi todo x, entonces $\hat{f}(x) = f(x)$ a.e.*

Demostración. La sucesión $\{f_n(x)\}$ contiene una subsucesión que converge a $\hat{f}(x)$ puntualmente a.e. ([24, Teor.3.12, p. 70]). Como $f_n(x)$ converge a $f(x)$ puntualmente, esto implica que $\hat{f}(x) = f(x)$ a.e. □

A continuación presentamos algunos de los resultados fundamentales de la teoría de integración que vamos a usar repetidamente.

Teorema 1.3 (Lema de convergencia monótona de Beppo Levi). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X y supongamos que para casi todo $x \in X$ $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq \infty$. Entonces $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$, la función $f(x)$ es medible, y*

$$\int_X f_n \, d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X f \, d\mu$$

Demostración. Ver [24, Teor. 1.26, p.22] □

Teorema 1.4 (Lema de Fatou). *Si $f_n : X \to [0, \infty]$ son medibles, entonces*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Demostración. [24, Teor. 1.28, p.24] Sea $g_k(x) = \inf_{i\geq k} f_i(x)$. Entonces $g_k \leq f_k$ y tenemos que

$$\int_X g_k\,d\mu \leq \int_X f_k\,d\mu \qquad \text{y} \qquad \liminf \int_X g_k\,d\mu \leq \liminf \int_X f_k\,d\mu \quad (1.1)$$

Tambien tenemos que $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \ldots$, cada g_k es medible y

$$g_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \liminf_{n\to\infty} f_n(x).$$

Por el Teorema de convergencia monótona 1.3 tenemos que

$$\int_X g_k\,d\mu \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu$$

y usando (1.1) obtenemos el enunciado del Teorema. □

Teorema 1.5 (Teorema de convergencia dominada de Lebesgue). *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en X tales que para c.t.p. $x \in X$*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

y existe una función $g \in L_1(X,\mu)$ tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x).$$

Entonces $f \in L_1(X,\mu)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Demostración. [24, Teor. 1.34, p.27] Como $|f| \leq g$ y f es medible, tenemos que $f \in L_1(X,\mu)$. Además tenemos que $|f_n - f| \leq 2g$. Vamos a aplicar el Lema de Fatou 1.4 a las funciones $2g - |f_n - f|$:

$$\begin{aligned}\int_X 2g\,d\mu &= \int_X \liminf\,(2g - |f_n - f|)\,d\mu \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2g - |f_n - f|)\,d\mu = \int_X 2g\,d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left(-\int_X |f_n - f|\,d\mu\right) \\ &= \int_X 2g\,d\mu - \limsup_{n\to\infty}\left(\int_X |f_n - f|\,d\mu\right).\end{aligned}$$

$\int_X 2g\,d\mu$ es finita y obtenemos

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_X |f_n - f|\,d\mu\right) \leq 0.$$

Esto implica que $\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|\,d\mu = 0$ y, usando que $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$, obtenemos $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$. □

Definición 1.10 (Espacio medible σ-finito). *Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio medible. Si X es una unión numerable de conjuntos E_i tales que $\mu(E_i) < \infty$, entonces el espacio $(X,\mathcal{A},\mu)$ se llama σ-finito.*

Teorema 1.6 (Teorema de Fubini). *Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$ y $(Y,\mathcal{B},\rho)$ dos espacios medibles σ-finitos y $f(x,y)$ una función integrable en el espacio $(X \times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\rho)$. Entonces*

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f(x,y)\,d(\mu\times\rho) &= \int_X \left(\int_Y f(x,y)\,d\rho\right) d\mu \\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,d\mu\right) d\rho\end{aligned}$$

Si ocurre que por lo menos una de las integrales

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\,d\rho\right) d\mu \quad o \quad \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\,d\mu\right) d\rho$$

es finita, en tal caso $f(x,y)$ es integrable en $(X\times Y, \mathcal{A}\times\mathcal{B}, \mu\times\rho)$ y las igualdades se cumplen.

Demostración. Ver [9, Teorema 4, p.359]. □

1.4. Transformada de Fourier (Ver [24, Cap. 9, p.192])

Si $f \in L_1(-\infty,+\infty)$ podemos definir la integral

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx$$

para cada t real. La función $\hat{f}$ se llama la transformada de Fourier de f.

Para las funciones en $L_2(-\infty,+\infty)$ tenemos el siguiente resultado principal:

Teorema 1.7 (Teorema de Plancherel). *A cada función $f \in L_2$ le podemos asociar una función $\hat{f} \in L_2$ tal que se cumplen las siguientes propiedades*

(a) Si $f \in L_1 \cap L_2$, entonces $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f previamente definida.

(b) Para todo $f \in L_2$, $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$.

(c) El mapeo $f \to \hat{f}$ es un isomorfismo del espacio de Hilbert L_2 sobre L_2.

(d) f y $\hat{f}$ están relacionadas de la siguiente manera simétrica: si

$$\varphi_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} f(x)e^{-ixt}\,dx \quad y \quad \psi_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \hat{f}(t)e^{ixt}\,dt \qquad (1.2)$$

entonces $||\varphi_A - \hat{f}||_2 \xrightarrow[A\to\infty]{} 0$ *y* $||\psi_A - f||_2 \xrightarrow[A\to\infty]{} 0$

La propiedad (d) define la transformada de Fourier inversa.

Demostración. Ver [24, Teor. 9.13, p.200] □

También podemos definir la transformada de Fourier para las funciones $f(x) \in L_p(-\infty, +\infty), 1 < p < 2$ (ver [30]):

Teorema 1.8. *Si $f \in L_p(-\infty, +\infty)$, donde $1 \leq p < 2$, entonces la integral*

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt}\,dx$$

converge como integral impropia para casi todo t y la función $\hat{f}(t)$ se llama la transformada de Fourier de $f(x)$.

Demostración. Ver [30, Teor. A] □

1.5. Algunos criterios de convergencia de series (Ver [23, Cap. 3, p. 51])

Vamos a necesitar los siguientes criterios de convergencia de series:

Teorema 1.9 (Criterio de comparación). *Si $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq N_0 (N_0 \in \mathbb{N})$ y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces también converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Demostración. Ver [23, Teor. 3.2, p. 52]. □

Teorema 1.10 (Criterio de la razón). *La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*

(a) converge si $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,

(b) diverge si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ para todo $n \geq n_0$, donde n_0 es un número natural fijo.

Demostración. Ver [23, Teor. 3.34, p. 57] □

Teorema 1.11. *Supongamos que $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq 0$. Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si y solo si converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots.$$

Demostración. Ver [23, Teor. 3.27, p. 53] □

Observación 1.

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-1} \geq \ln N$$

Demostración.

$$\sum_{n=1}^{N} n^{-1} \geq \int_{1}^{N} \frac{1}{x}\,dx = \ln N$$

□

Teorema 1.12 (Expansión de Taylor). *Supongamos que $f(x)$ es una función real en el intervalo $[a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n-1)}(x)$ es continua en $[a, b]$, $f^{(n)}(x)$ existe para cada $t \in (a, b)$. Sean α, β dos puntos de $[a, b]$ y definimos*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(\alpha)}{k!}(t - \alpha)^k.$$

Entonces existe un punto x entre α y β tal que

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^n(x)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

Demostración. Ver [23, Teor. 5.15, p. 95]. □

1.6. Representación integral de Herglotz
(Ver [3, Sec. II])

Para demostrar la representación integral de Herglotz primero necesitamos una serie de resultados preliminares:

Teorema 1.13 (Teorema de selección de Helly). *Sean $f_n(x)$ funciones reales monótonas no-decrecientes y k una constante positiva tal que*

$$|f_n(x)| < k \qquad (n = 1, 2 \ldots ; a \leq x \leq b).$$

Entonces existe una sucesión de números $n_0 < n_1 < \ldots$ y una función acotada no-decreciente $f(x)$ tal que

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i} = f(x), (a \leq x \leq b).$$

Demostración. Ver [28, p. 165] □

Teorema 1.14. *Sea $W(z,t)$ una función continua de dos variables, la variable compleja z pertenece a un conjunto abierto G y la variable real t pertenece al intervalo $[a,b]$. Entonces la función*

$$H(z) = \int_a^b W(z,t)\,dt$$

es continua en el conjunto G.

Si, además, para cada $t \in [a,b]$ la función $W(z,t)$ en cada punto $z \in G$ tiene la derivada parcial $W'_z(z,t)$, continua respecto a ambas variables z y t, entonces la función $H(z)$ es analítica en G y

$$H'(z) = \int_a^b W'_z(z,t)\,dt$$

Demostración. Ver [25, Teor. 3.1, p. 107] □

Teorema 1.15 (Teorema de Cauchy sobre la expansión de una función analítica en una serie de potencias). *Sea $f(x)$ una función analítica en un dominio G, sea z_0 un punto arbitrario de G y $\Delta = \Delta(z_0)$ la distancia entre z_0 y la frontera de G. Entonces existe una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

convergente a $f(z)$ en el disco $\{z \in G : |z - z_0| < \Delta\}$.

Demostración. Ver [12, Teor. 16.7, p. 361] □

Teorema 1.16. *Sean $u(x,y)$ una función armónica en el dominio G, $v(x,y)$ su conjugado armónico y z_0 algún punto de G. Sea $\Delta = \Delta(z_0)$ la distancia entre z_0 y la frontera de G. Entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ tienen las siguientes expansiones*

$$u(x,y) = u(r,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta - \beta_n \sin n\theta) r^n \tag{1.3}$$

$$v(x,y) = v(r,\theta) = \beta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n \cos n\theta + \alpha_n \sin n\theta) r^n \tag{1.4}$$

en el disco $|z - z_0| < \Delta$, donde $z - z_0 = re^{i\theta}$.

Demostración. Sea $f(z)$ una función analítica en el disco $|z - z_0| < \Delta$ tal que su parte real es igual a $u(x,y)$. Por el Teorema 1.15 la función $f(z)$ tiene la expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

en el disco $\{z \in G : |z - z_0| < \Delta\}$. Sustituimos en esta expansión $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $z - z_0 = re^{i\theta}$ y tomando las partes real e imaginaria de

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + i\beta_n) r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

obtenemos (1.3) y (1.4). □

Lema 1.1. *Las series*

$$\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \cos n(\theta - \phi)$$

$$\frac{2\rho r \sin(\theta - \phi)}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \sin n(\theta - \phi)$$

convergen uniformemente en cada subconjunto compacto del disco $\{z : |z - z_0| < \rho\}$, donde $z_0 = \rho e^{i\phi}$, $z - z_0 = re^{i\theta}$ y $\theta, \phi \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Ver [13, p. 149]. □

La integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\rho,\phi)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

con el núcleo

$$\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)} = Re\left[\frac{\rho e^{i\phi}+re^{i\theta}}{\rho e^{i\phi}-re^{i\theta}}\right]$$

se llama la integral de Poisson. Vamos a demostrar una propiedad característica de las funciones armónicas que consiste en la representación en forma de integral de Poisson:

Teorema 1.17. *Sea $u(x,y)$ una función armónica en el dominio G con el conjugado armónico $v(x,y)$. Sean z_0 algún punto de G y $\Delta=\Delta(z_0)$ la distancia de z_0 a la frontera de G. Entonces $u(x,y)$ y $v(x,y)$ pueden representarse en el disco $|z-z_0|<\Delta$, donde $z-z_0=re^{i\theta}$, en forma de integrales de Poisson de la siguiente manera*

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi \tag{1.5}$$

$$v(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\rho,\phi)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi \tag{1.6}$$

para toda ρ con $r<\rho<\Delta$ y cualquier θ. Además

$$v(r,\theta)=\beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\frac{2\rho r\sin(\theta-\phi)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi$$

en términos de $u(r,\theta)$.

Demostración. Usamos la fórmula (1.3) reemplazando r por ρ ($\rho<\Delta$), θ por ϕ y n por m:

$$u(\rho,\phi)=\alpha_0+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\cos m\phi-\beta_m\sin m\phi)\,\rho^m \tag{1.7}$$

Usando la convergencia uniforme de (1.7) para todo $\rho<\Delta$, multiplicamos (1.7) por $\cos(n\phi)$ e integramos término a término respecto a ϕ entre 0 y 2π. Como resultado obtenemos

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\,d\phi\\ \alpha_n &= \frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\cos(n\phi)\,d\phi \qquad (n\geq 1).\end{aligned} \tag{1.8}$$

De la misma manera, multiplicando (1.7) por $\sin(n\phi)$, donde $n\geq 1$ es un entero, e integrando término a término obtenemos

$$-\beta_n=\frac{1}{\pi\rho^n}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\sin(n\phi)\,d\phi \qquad (n\geq 1). \tag{1.9}$$

La sustitución de (1.8) y (1.9) en (1.3) y (1.4) nos da

$$\begin{aligned}u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\,d\phi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\cos n(\theta-\phi)\,d\phi\\ v(r,\theta) &= \beta_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\sin n(\theta-\phi)\,d\phi\end{aligned}$$

Por el Lema 1.1 obtenemos

$$\begin{aligned}u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\frac{\rho^2-r^2}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi\\ v(r,\theta) &= \beta_0+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho,\phi)\frac{2\rho r\sin(\theta-\phi)}{\rho^2+r^2-2\rho r\cos(\theta-\phi)}\,d\phi.\end{aligned}$$

Como (1.5) se cumple para cualquier función armónica en G, podemos reemplazar $u(r,\theta)$ por $v(r,\theta)$ y obtenemos (1.6). □

Teorema 1.18. *Una función analítica en el círculo $|z|<1$ satisface la condición $Ref(z)\geq 0$ para $|z|<1$ si y solo si $f(z)$ tiene la representación integral*

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\psi}+z}{e^{i\psi}-z}\,d\rho(\psi)+ic \tag{1.10}$$

donde $\rho(\psi)$ es una medida de Borel positiva y finita en el intervalo $[0,2\pi]$ y c es un número real.

Demostración. La función $f(z)$ definida por (1.10) es analítica en el círculo $|z| < 1$ por el Teorema 1.14. Si ponemos $z = re^{i\theta}$

$$Ref(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\rho(\psi) \geq 0$$

para $r < 1$. Entonces la representación (1.10) es suficiente para que $f(z)$ tenga las propiedades indicadas en el Teorema.

Sea $f(z)$ una función analítica en el círculo $|z| < 1$ y tal que $Ref(z) \geq 0$ para $|z| < 1$. Vamos a considerar las funciones $f_n(z) = f(\frac{n-1}{n} z)$. Las funciones $Ref_n(z)$ son armónicas y no-negativas en el círculo cerrado $|z| \leq 1$ y su valor $u_n(\theta) = Re\, f_n(z)$ en la frontera $z = e^{i\theta}$ es no-negativo y continuo. Por la fórmula integral de Poisson (Teorema 1.17) tenemos

$$Re\, f_n(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\rho_n(\psi)$$

donde $\rho_n(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\psi} u_n(\alpha)\, d\alpha$ es una función continua y monótona creciente para $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Cuando $z = 0$ obtenemos

$$Ref(0) = Ref_n(0) = \int_0^{2\pi} d\rho_n(\psi) = \rho_n(2\pi) - \rho_n(0) = \rho_n(2\pi).$$

Entonces la sucesión $\{\rho_n(\psi)\}$ satisface las condiciones del Teorema de Helly (Teorema 1.13). Esto implica que existe una sucesión de números enteros $\{n_k\}$ y una función monótona creciente $\rho(\psi)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} n_k = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} \rho_{n_k}(\psi) = \rho(\psi), \quad 0 \leq \rho(\psi) \leq Ref(0).$$

Pasando al límite en la fórmula para $Ref_n(z)$ cuando $n_k \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z), \quad |z| < 1 \quad \text{y}$$

$$Ref(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\rho(\psi)$$

para $|z| < 1$.

La función $Imf(z)$ es armónica en $|z| < 1$ y podemos determinarla usando el hecho de que es conjugada a $Ref(z)$ y asume el valor $Imf(0)$ para $z = 0$:

$$Imf(z) = \int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta - \psi)}{1 - 2r\cos(\theta - \psi) + r^2}\, d\rho(\psi) + Imf(0).$$

Combinando las expresiones para $Ref(z)$ y $Imf(z)$, encontramos que

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z}\, d\rho(\psi) + iImf(0)$$

□

Definición 1.11 (Funciones de Pick). *Una función de Pick es una función analítica en el semiplano superior con la parte imaginaria positiva.*

Teorema 1.19 (Representación integral de Herglotz). *Una función de Pick $F(\varsigma)$ admite la representación integral en la siguiente forma:*

$$F(\varsigma) = a_F + b_F\varsigma + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{t - \varsigma} - \frac{t}{t^2 + 1}\right] d\mu(t) \tag{1.11}$$

donde $b_F \geq 0$ y a_F son dos constantes reales y $\mu(t)$ es una medida de Borel en $[-\infty, +\infty]$ tal que $\int (t^2 + 1)^{-1}\, d\mu(t)$ es finita.

Demostración. Las transformaciones dadas por

$$z(\varsigma) = \frac{\varsigma - i}{\varsigma + i} \quad \text{y} \quad \varsigma(z) = \frac{1}{i}\frac{z + 1}{z - 1} \tag{1.12}$$

son transformaciones lineales fraccionarias, inversas una de la otra. $\varsigma(z)$ mapea el disco unitario $|z| < 1$ en el semiplano superior, mientras que $z(\varsigma)$ transforma el semiplano superior de regreso al disco. Si $f(z)$ es una función analítica en el disco $|z| < 1$ con la parte real positiva, la función $\phi(\varsigma) = if(z(\varsigma))$ es una función de Pick; inversamente, si $\phi(\varsigma)$ es una función de Pick, la función $f(z) = -i\phi(\varsigma(z))$ es analítica en $|z| < 1$ con la parte real positiva. Entonces existe una biyección entre estas dos clases de funciones.

Podemos encontrar la representación integral de Herglotz de $\phi(\varsigma)$ usando la representación para $f(z)$ dada por el Teorema 1.18:

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z}\, d\rho(\psi) + iImf(0).$$

Si la medida $d\rho$ da peso positivo $\alpha > 0$ al punto $\theta = 0$, separamos este punto

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}\alpha - i\beta + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\psi} + z}{e^{i\psi} - z}\, d\rho'(\psi).$$

Vamos a formar $if(z(\varsigma))$. Los primeros dos términos se reducen a $\alpha\varsigma + \beta$ y la integral es igual a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varsigma \cos\theta/2 - \sin\theta/2}{\varsigma \sin\theta/2 + \cos\theta/2} d\rho'(\theta).$$

Vamos a introducir el cambio de variable $t = -\cot\theta/2$ que mapea el círculo en el eje real y el punto $z = 1$ que quitamos al infinito. La medida $d\rho'$ se transforma en una medida finita $v(t)$ en el eje real y obtenemos

$$\phi(\varsigma) = \alpha\varsigma + \beta + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\varsigma + 1}{t - \varsigma} dv(t) \qquad \text{donde} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dv(t) < +\infty$$

Finalmente tomando $d\mu(t) = (t^2+1)dv(t)$ obtenemos (1.11). □

Lema 1.2. *Sea $F(\varsigma)$ una función de Pick con la representación integral*

$$F(\varsigma) = a_F + b_F\varsigma + \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{t-\varsigma} - \frac{t}{t^2+1}\right] d\mu(t) \tag{1.13}$$

Entonces las constantes a_F y b_F están determinadas por

$$a_F = ReF(i), \quad b_F = \lim_{s\to\infty} \frac{ImF(is)}{s}.$$

Demostración. De (1.13) tenemos que

$$F(i) = a_F + i\left(b_F + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+t^2} d\mu(t)\right)$$

entonces $ReF(i) = a_F$. También tenemos que

$$\frac{ImF(is)}{s} = b_F + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s^2+t^2} d\mu(t).$$

Como $\frac{1}{s^2+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$ $(s \geq 1)$ y la función $\frac{1}{1+t^2}$ es integrable respecto a μ, podemos aplicar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue 1.5 y en el límite cuando $s \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{s\to\infty} \frac{ImF(is)}{s} = b_F.$$

□

Sea $d\rho(\lambda)$ una medida de Borel-Stieltjes tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2+1} < \infty. \tag{1.14}$$

Entonces podemos definir

$$\phi(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\, d\rho(\lambda)}{(x-\lambda)^2 + y^2}.$$

La fórmula de inversión de Stieltjes nos permite expresar $\rho(\lambda)$ en términos de $\phi(x,y)$.

Teorema 1.20. *Si $-\infty < a < b < +\infty$, entonces*

$$\lim_{y\downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \phi(x,y)\, dx = \rho((a,b)) + \frac{1}{2}\rho(\{a\}) + \frac{1}{2}\rho(\{b\}). \tag{1.15}$$

Demostración. Ver [21, Teor. 5.4, p. 84]. □

Ejemplo: Consideremos la función $F(\varsigma) = \log\varsigma$. El logaritmo está determinado de tal manera que es real en el semieje positivo. Es una función de Pick. Entonces

$$\begin{aligned}
a_F &= Re \log i = 0 \\
b_F &= \lim_{s\to\infty} \frac{Im \log is}{s} = \lim_{s\to\infty} \frac{\pi/2}{s} = 0 \\
\mu(b) - \mu(a) &= \lim_{\nu\to 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b Arg\, F(x+i\nu)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } [a,b] \subset \mathbb{R}^+, \\ b-a & \text{si } [a,b] \subset \mathbb{R}^-. \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces

$$\log z = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{t-z} - \frac{t}{t^2+1} dt.$$

Teorema 1.21 (Teorema de Fatou). *Sea $f(z)$ una función analítica acotada en el disco unitario $|z| < 1$. Entonces el conjunto de los puntos donde el límite*

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

no existe es de medida de Lebesgue cero.

Corolario 1.1. *Sea $F(z)$ una función de Pick. Entonces casi siempre respecto a la medida de Lebesgue existe el límite*

$$\lim_{y\to 0+} F(x+iy).$$

Demostración. Si la función $F(z)$ es acotada, el resultado se sigue del Teorema de Fatou 1.21 usando las transformaciones (1.12).

Si la función $F(z)$ no es acotada, entonces la función

$$G(z) = -\frac{1}{F(z)+i}$$

es una función de Pick acotada y la existencia de valores en la frontera de $G(z)$ implica la existencia de valores en la frontera de $F(z)$. □

1.7. Elementos de la teoría de la probabilidad (Ver [1, Cap. 5])

Un espacio de probabilidad es una tercia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es un conjunto, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra en este conjunto y P una medida en esta σ-álgebra tal que $P(\Omega) = 1$. Vamos a llamar P la medida de probabilidad y los elementos de $\mathcal{F}$ eventos.

Definición 1.12 (Variables aleatorias). *Una variable aleatoria X en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una función Borel-medible de Ω a $\mathbb{R}$. Si X, Y son dos variables aleatorias, llamamos a $X+iY$ una variable aleatoria compleja.*

Definición 1.13 (Variables aleatorias independientes). *Las variables aleatorias $X_1, \ldots X_n$ son independientes si $\forall\, B_1, \ldots B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (σ-algebra de Borel) tenemos*

$$P\{X_1 \in B_1, \ldots X_n \in B_n\} = P\{X_1 \in B_1\} \ldots P\{X_n \in B_n\}$$

Definición 1.14 (Esperanzas matemáticas). *Si X es una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la esperanza matemática de X está definida por*

$$E\,X = \int_\Omega X\,dP$$

si la integral existe.

Teorema 1.22 (Desigualdad de Chebyshev). *Sean X una variable aleatoria no-negativa, $0 < p < \infty$ y $0 < \varepsilon < \infty$. Entonces*

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\,X^p}{\varepsilon^p}$$

Demostración. Ver [1, Teor. 5.10.7, p. 227]. □

Teorema 1.23 (Lema de Borel-Cantelli). *Si $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, entonces*

$$P[\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n] = 0.$$

Sean $T_1, T_2, \ldots$ y T variables aleatorias. Decimos que T_n convergen a T casi seguro si $P[T_n \to T \text{ cuando } n \to \infty] = 1$ y usamos la anotación $T_n \to T$ *a.s.*

Teorema 1.24. *Supongamos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} E|T_n|^p < \infty$$

para algún $p > 0$. Entonces $T_n \to 0$ a.s.

Demostración. [29, Teor. 2.1.3, p.13] Por el Teorema de convergencia monótona de Lebesgue 1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} E|T_n|^p < \infty$ implica que $E\sum_{n=1}^{\infty} |T_n|^p < \infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |T_n|^p < \infty$ a.s. Entonces $T_n \to 0$ a.s. □

Teorema 1.25. *Sea T_n una sucesión de variables aleatorias. Supongamos que existe una variable aleatoria T y una sucesión de números $n_k \to \infty$ tal que $T_{n_k} \to T$ a.s. y*

$$\max_{n_{k-1}<n\leq n_k} |T_n - T_{n_{k-1}}| \to 0 \quad \text{a.s. cuando } k \to \infty.$$

Entonces $T_n \to T$ a.s.

Demostración. [29, Lema 2.3.1, p.17] Para un número n dado escogemos n_k tal que $n_{k-1} < n \leq n_k$.

$$|T_n - T| \leq |T - T_{n_{k-1}}| + |T_n - T_{n_{k-1}}| \leq |T - T_{n_{k-1}}| + \max_{n_{k-1}<n\leq n_k} |T_n - T_{n_{k-1}}|$$

en la suma final ambos miembros convergen a cero a.s. cuando $k \to \infty$. Esto implica que $T_n \to T$ a.s. □

Teorema 1.26. *Sean X_n ($n \in \mathbb{N}$) variables aleatorias complejas. Supongamos que existen números $\rho_n \geq 0$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \ln^2 n < \infty$ y*

$$E|X_n|^2 + \sum_{m=1}^{n-1} |EX_m \overline{X_n}| \leq \rho_n.$$

Entonces $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} X_n$ existe casi seguro.

Demostración. Este resultado se sigue esencialmente de [29, Teor. 2.4.2]. Nosotros necesitamos una versión para X_n complejas.

Sean $g(j,N) = 2\sum_{n=j+1}^{j+N} \rho_n$ y $h(j,N) = 2\sum_{n=j+1}^{j+N} \rho_n \ln^2 n$. Tenemos que

$$\begin{aligned} E\left|\sum_{n=j+1}^{j+N} X_n\right|^2 &\leq \sum_{n=j+1}^{j+N} E|X_n|^2 + 2\sum_{n=j+1}^{j+N}\sum_{m=1}^{n-1} |EX_m\overline{X_n}| \\ &\leq 2\sum_{n=j+1}^{j+N} \rho_n = g(j,N) \end{aligned} \tag{1.16}$$

y

$$g(j,k) + g(j+k,m) = g(j,k+m)$$
$$h(j,k) + h(j+k,m) = h(j,k+m)$$
$$h(j,n) \leq C \text{ (C es una constante que no depende de j y n)} \tag{1.17}$$
$$g(j,n) \leq h(j,n)/\ln^2(j+1) \tag{1.18}$$

Usando (1.16), (1.17) y (1.18) obtenemos

$$\begin{aligned} E\left|\sum_{n=j+1}^{j+N} X_n\right|^2 &\leq g(j,N) \leq Ch(j,N)/\log^2(j+1) \\ &\leq \frac{C^2}{\log^2(j+1)} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad j\to\infty. \end{aligned}$$

Entonces la sucesión $\{S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 1\}$ es una sucesión de Cauchy en la norma de L_2. Como L_2 es un espacio completo existe $S \in L_2$ tal que $E(S_n - S)^2 \to 0$.

Vamos a demostrar que la subsucesión $S_{2^k} \to S$ a.s. Por el Teorema 1.24 es suficiente demostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} E|S - S_{2^k}|^2 < \infty$.

Usando otra vez (1.16), (1.17) y (1.18)

$$\begin{aligned} E|S - S_{2^k}|^2 &= \lim_{n\to\infty} E|S_n - S_{2^k}|^2 \leq \lim_{n\to\infty}\sup g(2^k, n-2^k) \\ &\leq C\lim_{n\to\infty}\sup \frac{h(2^k, n-2^k)}{\log^2(2^k+1)} \leq C^2\log^{-2}(2^k+1) \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} E|S - S_{2^k}|^2 \leq C^2 \sum_{k=1}^{\infty} \log^{-2}(2^k+1) < \infty$$

demostrando que $S_{2^k} \to S$ a.s.

Para demostrar que $S_n \to S$ a.s. vamos a usar el Teorema 1.25. Hace falta demostrar que

$$\max_{2^{k-1}<n\leq 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}| \to 0 \text{ a.s cuando } k\to\infty.$$

Para eso, por el Teorema 1.24 es suficiente demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} E[\max_{2^{k-1}<n\leq 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}|^2] < \infty.$$

Para demostrarlo vamos a necesitar el siguiente Lema:

Lema 1.3. *Sea $M_{j,n} = \max_{j<k\leq n} \left|\sum_{i=j+1}^{j+k} X_i\right|$, entonces*

$$EM_{j,n}^2 \leq (\log(2n)/\log 2)^2 g(j,n).$$

Demostración. Ver [29, Teor. 2.4.1, p. 22] □

Usando el Lema y (1.17), (1.18) obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} E[\max_{2^{k-1}<n\leq 2^k} |S_n - S_{2^{k-1}}|^2] = \sum_{k=1}^{\infty} E\, M_{(2^{k-1}-1),2^{k-1}} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\log(2^k)}{\log 2}\right)^2 g(2^{k-1},2^{k-1}) \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\log(2^k)}{\log 2}\right)^2 \frac{h(2^{k-1},2^{k-1})}{\log^2(2^{k-1}+1)} \\ &\leq C\hat{C}\sum_{k=1}^{\infty} h(2^{k-1},2^{k-1}) \leq C^2\hat{C} < \infty. \end{aligned}$$

□

Capítulo 2

El operador de Schrödinger en una dimensión

En este capítulo están reunidos los principales resultados sobre los Operadores de Schrödinger en la semirecta que usamos en el resto de la tesis. También damos una breve descripción de dos conocidos ejemplos de Pearson [17] y Remling [20] que motivan los resultados de la tesis y los ponen en el contexto de los trabajos que se han hecho en este campo. El material de cada sección es tomado de la referencia que indicamos al inicio de la sección, salvo cuando en el texto se da otra referencia.

2.1. Extensión autoadjunta y la alternativa de Weyl (Ver [16, cap.6, p. 231])

Vamos a considerar el operador diferencial de la forma

$$Ly = -y''(x) + V(x)y(x) \quad , \quad 0 \leq x < \infty$$

donde $V(x)$ es una función real y supongamos que $V(x) \in L^1_{loc}[0,\infty)$. Es la mínima condición necesaria para garantizar que L sea un operador en $C_0^\infty(0,\infty)$, el conjunto de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto. Observamos que $C_0^\infty(0,\infty)$ es un subconjunto denso de $L^2(0,\infty)$.

Para poder aplicar el análisis espectral necesitamos definir una extensión autoadjunta del operador L. Definimos esta extensión como el operador H_α de la siguiente manera

$$H_\alpha u = Lu \qquad \text{para} \qquad u \in D$$

donde $u \in D$ si

(i) $u, Lu \in L_2(0,\infty)$,

(ii) u, u' son absolutamente continuas en cualquier subintervalo finito de $[0,\infty)$,

(iii) $u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0$ para algún $\alpha \in [0,\pi)$.

Según la llamada alternativa de Weyl en el infinito pueden suceder dos situaciones:

(i) para cada $z \in \mathbb{C}$ cada solución de la ecuación $Lu = zu$ está en $L_2(c,\infty)$, para algún $c > 0$; este caso se llama el **caso de círculo límite**.

(ii) para cada $z \in \mathbb{C}$ no más de una solución de la ecuación $Lu = zu$, linealmente independiente, está en $L_2(c,\infty)$; este caso se llama el **caso de punto límite** y para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ siempre hay una solución en $L_2(c,\infty)$.

Si para algún $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tiene lugar el caso de círculo límite, entonces este caso tiene lugar para cualquier $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Nosotros vamos a considerar la opción de punto límite, ya que la mayoría de los casos de interés físico o matemático son de punto límite. En el caso de punto límite el operador H_α es un operador autoadjunto.

Tenemos el siguiente útil criterio

Teorema 2.1. *Si $V(x) \geq -kx^2$, donde k es una constante positiva, entonces tenemos el caso de punto límite al infinito.*

Demostración. Vamos a demostrar que la ecuación

$$-y'' + V(x)y = 0$$

no tiene dos soluciones linealmente independientes en $L_2(c,\infty)$. Supongamos que $\phi(x)$ es una solución real de $Ly = 0$ y $\phi(x) \in L_2(c,\infty)$. Como $\phi'' = V\phi$, obtenemos

$$\int_c^x \frac{\phi''(t)\phi(t)}{t^2}dt = \int_c^x \frac{V(t)\phi^2(t)}{t^2}dt \geq -k\int_c^x \phi^2(t)dt$$

y como $\phi(x) \in L_2(c,\infty)$ existe una constante k_1 tal que

$$k_1 \geq -\int_c^x \frac{\phi''(t)\phi(t)}{t^2}dt. \tag{2.1}$$

Integrando por partes (2.1) obtenemos

$$\begin{aligned} -\int_c^x \frac{\phi''(t)\phi(t)}{t^2}dt &= \frac{\phi'(c)\phi(c)}{c^2} - \frac{\phi'(x)\phi(x)}{x^2} \\ &+ \int_c^x \frac{\{\phi'(t)\}^2}{t^2}dt - \int_c^x \frac{2\phi'(t)\phi(t)}{t^3}dt \le k_1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sea $H(x) = \int_c^x \frac{\{\phi'(t)\}^2}{t^2}dt$. Entonces, usando la desigualdad de Schwartz obtenemos

$$\begin{aligned} \left|\int_c^x \frac{2\phi'(t)\phi(t)}{t^3}dt\right|^2 &\le k_2\left(\int_c^x \frac{|\phi'(t)||\phi(t)|}{t}dt\right)^2 \\ &\le k_2\left(\int_c^x \frac{(\phi'(t))^2}{t^2}dt\right)\left(\int_c^x (\phi(t))^2\,dt\right) \le k_3 H(x) \end{aligned}$$

Entonces podemos reescribir (2.2) como

$$-\frac{\phi'(x)\phi(x)}{x^2} + H(x) - k_4 H^{1/2}(x) \le k_2. \tag{2.3}$$

Si $H(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$ de (2.3) podemos concluir que

$$\frac{\phi'(x)\phi(x)}{x^2} > \frac{1}{2}H(x)$$

para x suficientemente grandes. Esto significa que $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ tienen el mismo signo para x grandes, que contradice el hecho de que $\phi(x) \in L_2(c,\infty)$, entonces $H(x)$ es acotada y

$$\int_c^\infty \frac{(\phi'(x))^2}{t^2}dt < \infty. \tag{2.4}$$

Ahora supongamos que $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación $Ly = 0$ y $\phi(x), \psi(x) \in L_2(c,\infty)$, i.e. supongamos que para L tiene lugar el caso de círculo límite. Podemos asumir que estas soluciones son reales y el Wronskiano

$$W\{\phi,\psi\} = \phi(x)\psi'(x) - \phi'(x)\psi(x) = 1.$$

Dividiendo el Wronskiano entre x, obtenemos

$$\phi(x)\frac{\psi'(x)}{x} - \frac{\phi'(x)}{x}\psi(x) = \frac{1}{x}.$$

Por (2.4) y la desigualdad de Schwartz tenemos que la función en la parte izquierda es integrable en (c,∞), pero la parte derecha no es integrable. Entonces el caso del círculo límite es imposible. □

2.2. Función espectral. Espectro. (Ver [11, Sec. 2.1, p. 38])

Estamos considerando la ecuación

$$y'' + (\lambda - V(x))\,y = 0\,, \qquad 0 \le x < \infty \tag{2.5}$$

con la condición inicial

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{2.6}$$

Sea b un número positivo finito, $\beta \in [0,\pi)$ y para empezar vamos a considerar el problema de Sturm-Liouville en el intervalo finito

$$y'' + (\lambda - V(x))\,y = 0\,, \qquad 0 \le x \le b \tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha &= 0 \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta &= 0 \end{aligned}\right. \tag{2.8}$$

Definición 2.1 (Valor propio y función propia). *Si el problema* (2.7)–(2.8) *tiene una solución no trivial* $y(x,\lambda_0)$ *para un cierto* λ_0, *entonces* λ_0 *es un valor propio e* $y(x,\lambda_0)$ *es una función propia de este problema.*

El problema (2.7)–(2.8) tiene un conjunto numerable de valores propios $\{\lambda_{n,b}\}$ (esto se sabe desde principios del siglo XIX por los trabajos de Sturm y Liouville) y sean $y_{n,b}(x) = y(x,\lambda_{n,b})$ funciones propias correspondientes.

Si $f(x) \in L_2(0,b)$ y

$$\alpha_{n,b}^2 = \int_0^b y_{n,b}^2(x)\,dx$$

entonces por la igualdad de Parseval

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\alpha_{n,b}^2}\left(\int_0^b f(x)y_{n,b}(x)\,dx\right)^2 \tag{2.9}$$

Vamos a introducir la función espectral del problema de Sturm-Liouville en el intervalo finito. Es una función de escalera, monótona creciente dada por

$$\begin{aligned} \rho_b(\lambda) &= -\sum_{\lambda<\lambda_{n,b}\le 0} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \qquad (\lambda \le 0) \\ \rho_b(\lambda) &= \sum_{0<\lambda_{n,b}\le\lambda} \frac{1}{\alpha_{n,b}^2} \qquad (\lambda > 0). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Entonces podemos reescribir la igualdad (2.9) en la siguiente forma

$$\int_0^b f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\lambda)\,d\rho_b(\lambda)$$

donde $F(\lambda) = \int_0^b f(x)y(x,\lambda)\,dx$.

El conjunto de las funciones monótonas $\{\rho_b(\lambda)\}$ $(-N \leq \lambda \leq N)$ es acotado. Entonces podemos escoger una sucesión $\{b_k\}$ tal que las funciones $\rho_{b_k}(\lambda)$ convergen a una función monótona $\rho_\alpha(\lambda)$ (por el Teorema de Helly 1.13). La función $\rho_\alpha(\lambda)$ es la **función espectral** del problema (2.5)–(2.6) y además, para cualquier función $f(x) \in L_2(0,\infty)$ tenemos la igualdad de Parseval

$$\int_0^\infty f^2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(\lambda)\,d\rho_\alpha(\lambda)$$

donde $F(\lambda)$ (la transformada de Fourier generalizada) es el límite en $L_2(0,\infty)$ de funciones

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f(x)y(x,\lambda)\,dx.$$

Podemos usar la función espectral $\rho_\alpha(\lambda)$ para definir el espectro del operador H_α.

Definición 2.2 (Espectro). *El espectro del operador H_α es el complemento de conjunto de los puntos en cuya vecindad la función espectral es constante.*

La descomposición de la función espectral en partes absolutamente continua, singular continua y puntual define en forma similar las partes absolutamente continua, singular continua y puntual del espectro. Así, por ejemplo, el **espectro singular continuo** es el complemento del conjunto de los puntos en cuya vecindad la parte singular continua de la función espectral es constante.

Tiene lugar la siguiente fórmula (ver [5, formula A.9])

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{1/2}} \int_{-R}^{R} \mathrm{d}\rho_\alpha(x) = \frac{2(1+\cot^2\alpha)}{\pi}. \tag{2.11}$$

2.3. La función m de Weyl. (Ver [4, Sec. 2.2 y 2.3])

Sean $u_1(x,z)$ y $u_2(x,z)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación

$$Lu = zu$$

que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u_1(0,z) &= -\sin\alpha & \qquad u_2(0,z) &= \cos\alpha \\ u_1'(0,z) &= \cos\alpha & \qquad u_2'(0,z) &= \sin\alpha \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por la alternativa de Weyl sabemos que para cada $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ existe una solución $u_\alpha(x,z) \in L_2(c,\infty)$. Esta solución la podemos expresar como combinación lineal de $u_1(x,z)$ y $u_2(x,z)$:

$$u_\alpha(x,z) = u_2(x,z) + m_\alpha(z)u_1(x,z). \tag{2.13}$$

El coeficiente en esta combinación lineal es una función de z y se llama **la función m de Weyl**. La función m de Weyl es una función analítica en $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ y para a.e. $x \in \mathbb{R}$ tiene el límite finito cuando nos acercamos a x en forma perpendicular:

$$m_\alpha(x+i0) = \lim_{y\downarrow 0} m_\alpha(x+iy).$$

Tomamos dos condiciones de frontera distintas $\alpha_1 \neq \alpha_2 \,(\operatorname{mod}\pi)$ y sean $u_1(x,z), u_2(x,z)$ y $v_1(x,z), v_2(x,z)$ soluciones de la ecuación de Schrödinger que satisfacen las condiciones iniciales (2.12) para α_1 y α_2 correspondientes. Por la definición de la función m de Weyl tenemos que

$$\begin{aligned} u_{\alpha_1}(x,z) &= u_2(x,z) + m_{\alpha_1}(z)u_1(x,z) \in L_2(c,\infty) \\ u_{\alpha_2}(x,z) &= v_2(x,z) + m_{\alpha_2}(z)v_1(x,z) \in L_2(c,\infty). \end{aligned}$$

Por la alternativa de Weyl sabemos que no más de una solución linealmente independiente está en $L_2(c,\infty)$, entonces el Wronskiano $W(u_{\alpha_1}, u_{\alpha_2}) = 0$. Esto implica que

$$u_{\alpha_1}(0,z)u_{\alpha_2}'(0,z) - u_{\alpha_1}'(0,z)u_{\alpha_2}(0,z) = 0.$$

Usando las condiciones iniciales (2.12) obtenemos

$$\begin{aligned}
&(\cos\alpha_1 - m_{\alpha_1}(z)\sin\alpha_1)(\sin\alpha_2 + m_{\alpha_2}(z)\cos\alpha_2)\\
&-(\sin\alpha_1 + m_{\alpha_1}(z)\cos\alpha_1)(\cos\alpha_2 - m_{\alpha_2}(z)\sin\alpha_2) = 0 \quad \text{y}\\
&\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2 - m_{\alpha_1}(z)(\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2\\
&+ m_{\alpha_2}(z)(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2))\\
&\qquad\qquad + m_{\alpha_2}(z)(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2) = 0
\end{aligned}$$

Tomando $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$, podemos reescribir la última expresión como

$$m_{\alpha_1}(z) = \frac{m_{\alpha_2}(z)\cot\gamma + 1}{\cot\gamma - m_{\alpha_2}(z)} \tag{2.14}$$

Sea $z = x + iy$. Tenemos las siguientes fórmulas que conectan la función espectral $\rho_\alpha(\lambda)$ y la función m de Weyl

$$\rho_\alpha(\lambda+\Delta) - \rho_\alpha(\lambda) = \frac{1}{\pi}\lim_{y\downarrow 0}\int_\lambda^{\lambda+\Delta} \operatorname{Im} m_\alpha(x+iy)\,dx \tag{2.15}$$

donde λ y $\lambda+\Delta$ son puntos de continuidad de ρ_α.

$$m_\alpha(z) = \cot\alpha + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{\lambda - z}. \tag{2.16}$$

donde $\alpha \neq 0$ y $z \notin \mathbb{R}$ (ver [4, (2.3.5) y (2.3.9), p. 31]).

2.4. Medida espectral y soportes minimales (Ver [6])

Usando (2.15) podemos dar una clasificación del espectro en términos de límite de la parte imaginaria de la función m de Weyl. Para poder hacerlo primero vamos a definir el soporte minimal de una medida.

Definición 2.3 (Soporte minimal). *El conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es soporte minimal de una medida μ dada en $\mathbb{R}$, si*

(i) $\mu(\mathbb{R}\setminus S) = 0$,

(ii) $S_0 \subset S$ *y* $\mu(S_0) = 0 \Rightarrow |S_0| = 0$.

El soporte minimal nos indica dónde nuestra medida está viviendo, salvo los conjuntos de medida cero respecto a esta medida y medida de Lebesgue.

Sea $\mu_\alpha(\lambda)$ la medida de Borel-Stieltjes generada por la función espectral $\rho_\alpha(\lambda)$. Esta medida se llama **la medida espectral**. El análisis del espectro que vamos a hacer es en términos de soportes minimales de la medida espectral y sus partes absolutamente continua, singular continua y puntual. Tiene lugar el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Los siguientes conjuntos son soportes minimales de la medida espectral y de sus partes absolutamente continua, singular, singular continua y puntual:*

$$\begin{aligned}
M'_\mu &= \{x : 0 < \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) \le \infty\}\\
M'_{ac} &= \{x : 0 < \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) < \infty\}\\
M'_s &= \{x : \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) = \infty\}\\
M'_{sc} &= \{x : \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) = \infty \quad y \quad \mu_\alpha(x) = 0\}\\
M'_p &= \{x : \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) = \infty \quad y \quad \mu_\alpha(x) > 0\}
\end{aligned}$$

Demostración. Ver [6, Propos.1]. □

La relación entre el conjunto de los soportes minimales de la medida espectral y el espectro se aclara en el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $\sigma(H_\alpha)$ el espectro del operador de Schrödinger H_α de la sección 2.1. Entonces existe un soporte minimal M_μ de la medida espectral $\mu_\alpha(\lambda)$ tal que $\sigma(H_\alpha) = \overline{M_\mu}$. El mismo resultado tiene lugar para cada una de las partes absolutamente continua y singular del espectro.*

Demostración. Ver [6, Lema 5]. □

Observación 2. *En general los conjuntos M'_{ac} y M'_s no estan contenidos en los espectros respectivos.*

Sean $E_{ac}(\alpha)$ el conjunto de todos los soportes minimales de la parte absolutamente continua de $\sigma(H_\alpha)$ y $E_s(\alpha)$ el conjunto de todos los soportes minimales de la parte singular de $\sigma(H_\alpha)$. Hay una notable diferencia en el comportamiento de estos conjuntos cuando la condición de frontera α varía:

Teorema 2.4. *(i)* $E_{ac}(\alpha_1) = E_{ac}(\alpha_2) \quad \forall \quad \alpha_1, \alpha_2$.

(ii) Si para $\alpha_1 \neq \alpha_2$ tenemos espectro singular, entonces $E_s(\alpha_1) \neq E_s(\alpha_2)$. Aún más, existen soportes minimales $M_s(\alpha_1) \in E_s(\alpha_1)$ y $M_s(\alpha_2) \in E_s(\alpha_2)$ tales que $M_s(\alpha_1) \cap M_s(\alpha_2) = \emptyset$.

Demostración. Ver [6, Lema 6]. □

Entonces, si las partes absolutamente continuas del espectro son equivalentes para dos condiciones de frontera, las partes singulares son más bien ortogonales.

Corolario 2.1. *El conjunto $S = \{x$: no existe ninguna condición de frontera α tal que $\operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) = 0\}$ es un soporte minimal de la parte absolutamente continua del espectro.*

Vamos a considerar el conjunto

$$\Delta_0 = \{x \,:\, \operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) > 0\}.$$

Este conjunto es un soporte minimal de la parte absolutamente continua del espectro. En efecto, los puntos que sobran aquí en comparación con la caracterización que dimos en el Teorema 2.2 son los puntos x donde $\operatorname{Im} m_\alpha(x+i0) = \infty$. Este conjunto es de medida de Lebesgue cero y como se trata de una medida absolutamente continua pueden ser incluidos en el soporte minimal.

Por el Colorario 2.1 lo único que puede soportar el complemento del conjunto Δ_0 para cualquier condición de frontera es la parte singular del espectro.

2.5. Criterios para el espectro absolutamente continuo

En la sección anterior hemos vinculado la función m de Weyl con el espectro del operador de Schrödinger. Por otro lado, la función m de Weyl está relacionada con las soluciones de la ecuación de Schrödinger. Entonces de algún modo podemos relacionar el espectro con el comportamiento de las soluciones. Esta conexión puede resultar de gran utilidad, ya que muchas veces es imposible encontrar en forma directa la función espectral o la función m de Weyl, sin embargo se puede analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

Como un ejemplo de dicha relación vamos a presentar dos criterios que usaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 2.5 (B. Simon). *Supongamos que el potencial $V(x)$ satisface la siguiente condición:*

$$\sup_{x\geq 1}\left(\int_{x-1}^{x+1} |V(y)|^2\,dy\right) < \infty$$

y sea $S = \{\lambda$: todas las soluciones de la ecuación (2.5) están acotadas $\}$. Entonces el espectro es puramente absolutamente continuo en S en el sentido de que

(i) $\forall T \subset S$, $|T| > 0$ tenemos que $\mu_\alpha^{ac}(T) > 0$,

(ii) $\mu_\alpha^s(S) = 0$.

Demostración. Ver [27, Teorema 1]. □

Sean H_0 el operador de Schrödinger que corresponde a la condición de frontera dada por $\alpha = 0$ y $T_\lambda(x,y)$ la **matriz de transferencia**, es una matriz 2×2 que transforma $\binom{u'(x)}{u(x)}$ en $\binom{u'(y)}{u(y)}$ para las soluciones u de la ecuación (2.5). Denotamos por $||\,.\,||$ su norma.

Teorema 2.6 (Last, Simon). *Sean x_i, y_i sucesiones arbitrarias en $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ Entonces para a.e. λ en la parte absolutamente continua de la medida espectral de H_0 tenemos que*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{x_j-1}^{x_j+1} dx \int_{y_j-1}^{y_j+1} dy ||T_\lambda(x,y)|| < \infty. \tag{2.17}$$

Demostración. Ver [10, Teor. 3.5C]. □

De este Teorema podemos obtener el siguiente corolario:

Corolario 2.2. *Sea $S = \{\lambda$: existen soluciones no acotadas de la ecuación (2.5)$\}$, entonces $\mu_\alpha^{ac}(S) = 0$.*

Demostración. Como $||T_\lambda(x,y)|| = \sup\limits_{||u(y)||=1} ||u(x)||$ donde $||u(x)|| = \sqrt{|u(x)|^2 + |u'(x)|^2}$, para $\lambda \in S$ tenemos que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{x_j-1}^{x_j+1} dx \int_{y_j-1}^{y_j+1} dy ||T_\lambda(x,y)|| = \infty$$

y por el teorema anterior podemos concluir que S no está en la parte absolutamente continua de la medida espectral de H_0. Como las partes absolutamente continuas son equivalentes para todas las condiciones de frontera, obtenemos el resultado para cualquier α. $\square$

Los siguientes resultados relacionan el espectro del operador de Schrödinger con el comportamiento de potencial $V(x)$.

Teorema 2.7. *Si* $\lim_{x\to+\infty} V(x) = A$, *entonces en el intervalo* $(-\infty, A)$ *el operador* H_α *puede tener solamente eigenvalores discretos que pueden acumularse solo en* $\lambda = A$.

Demostración. Ver [15, Teorema 1,Sección 24.1, p.211]. $\square$

Teorema 2.8. *Si* $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$, *entonces el espectro continuo del operador* H_α *cubre todo el semieje positivo.*

Demostración. Ver [15, Corolario 1,Sección 24.1, p.214]. $\square$

El espectro esencial $\sigma_{ess}(H_\alpha)$ es el complemento en el espectro del conjunto de eigenvalores aislados de multiplicidad finita.

Corolario 2.3. *Si* $\lim_{x\to+\infty} V(x) = 0$, *entonces* $\sigma_{ess}(H_\alpha) = [0, \infty)$.

Demostración. Por el Teorema 2.7 $\sigma_{ess}(H_\alpha) \cap (-\infty, 0) = \emptyset$ y por el Teorema 2.8 $\sigma_{ess}(H_\alpha) \supset [0, \infty)$ entonces $\sigma_{ess}(H_\alpha) = [0, \infty)$. $\square$

2.6. Dos ejemplos del espectro singular continuo

En esta sección vamos a describir brevemente dos ejemplos de potenciales con espectro singular continuo. Estos ejemplos están estrechamente relacionados con los resultados de la tesis.

En 1978 Pearson en su trabajo [17] por primera vez dio un ejemplo explícito de un potencial con espectro singular continuo y dio una interpretación física de este tipo de espectro.

Vamos a describir brevemente el tipo de potenciales introducidos por Pearson. Son potenciales de tipo barrera:

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n V_n(x - a_n)$$

donde $g_n > 0$ son números, $V_n(x) = \chi_{[-B_n,B_n]}W(x)$, aquí $\chi_{[-B_n,B_n]}$ es la función característica del intervalo $[-B_n, B_n]$ y $W(x) \in L_1^{loc}(0,\infty)$. Los intervalos $[a_n - B_n, a_n + B_n]$ son disjuntos y $L_n = a_n - B_n - a_{n-1} - B_{n-1}$ es la distancia entre las barreras.

Para obtener un ejemplo de potencial con espectro singular continuo podemos tomar barreras de la misma anchura y altura

$$B_n = B, \quad g_n = 1$$

y $L_n \to \infty$ suficientemente rápido. Entonces para el operador H_α generado por el potencial $V(x)$ que acabamos de describir tenemos espectro singular continuo en el semieje positivo:

$$\sigma_{sc}(H_\alpha) \cap (0, \infty) \neq \emptyset.$$

El tipo de potenciales introducidos por Pearson se anulan en muchos intervalos y a través de la transformada de Prüfer permiten dar asintóticas no triviales de las soluciones. Este tipo de potenciales fue usado en varios trabajos. Por ejemplo en [8] se demuestra que cuando $B_n =$ const, $g_n \to 0$, $W(x) \geq 0$ es una función acotada y $a_n/a_{n+1} \to 0$ la condición $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 < \infty$ es suficiente para tener espectro puramente absolutamente continuo en $(0, \infty)$ para cualquier condición de frontera y la condición $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 = \infty$ es suficiente para que el espectro sea puramente singular continuo en $(0, \infty)$ para cualquier condición de frontera.

Remling en [20] en 1997 usando potenciales de tipo barrera dio el primer ejemplo de potencial con espectro singular continuo sumergido en el espectro absolutamente continuo. En su ejemplo Remling tomó las barreras de soporte creciente, los g_n tales que $g_n > 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 = \infty$ y las distancias entre las barreras crecen muy rápido (mas rápido que exponencialmente). Entonces para el operador de Schrödinger con el potencial que acabamos de describir

$$\sigma_{ac}(H_\alpha) = \sigma_{ess}(H_\alpha) = [0, \infty)$$
$$\sigma_p(H_\alpha) \cap (0, \infty) = \emptyset$$

y para un conjunto de condiciones de frontera de medida positiva tenemos

$$\sigma_s(H_\alpha) \cap (0, \infty) \neq \emptyset.$$

Capítulo 3

Ejemplo de potencial con espectro singular soportado en un conjunto denso.

En este capítulo vamos a presentar una modificación de la construcción en [20], que nos permite obtener espectro singular continuo sumergido en espectro absolutamente continuo y donde el soporte del espectro singular es denso en un subintervalo I del espectro absolutamente continuo, en el sentido que para cualquier subintervalo de I existen condiciones de frontera (un subconjunto de medida positiva) para las cuales tenemos espectro singular en este subintervalo. Esto nos da un ejemplo de los espectros realmente mezclados.

Para construir un potencial, tal que el correspondiente operador de Schrödinger tenga regiones del espectro absolutamente continuo y singular continuo es suficiente tomar una función $W(x)$, que va a generar el potencial, tal que su transformada de Fourier $\widehat{W}(x)$ sea cero en algún conjunto S. Resulta que el espectro absolutamente continuo está soportado en S. Esta idea fue usada en el artículo [8, Teor. 6.3] donde se da un ejemplo de un operador que tiene el espectro singular continuo en un intervalo S y el espectro absolutamente continuo fuera de S. Para otros casos donde se estudia espectro mixto véase [14].

Si $W(x)$ es de soporte compacto, $\widehat{W}(x)$ no se anula, entonces necesitamos tomar una función de barreras, donde las barreras son de soporte creciente, que convergen a una función cuya transformada de Fourier se anula en S. Este ejemplo requiere una construcción más complicada del conjunto que

va a soportar la parte singular continua que en [20], porque necesitamos un conjunto F tal que él y su complemento F^C (que va a soportar la parte absolutamente continua) sean esencialmente densos en un intervalo. Las líneas de demostración siguen las ideas de [20]. La diferencia está en que tomamos la transformada de Fourier de la función $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{F_n}(t)$ en lugar de la transformada de Fourier de la función característica del conjunto F, que lleva a ligeros cambios en la demostración de los Lemas 3.1, 3.6 y se necesitan estimaciones un poco más laboriosas cuando evaluamos el comportamiento de las soluciones al infinito (en la demostración de Teorema 3.1, parte B).

3.1. La construcción del conjunto F.

Vamos a considerar, como en los ejemplos de Pearson [17] y Remling [20], el potencial de tipo barrera

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n V_n(x - a_n) \tag{3.1}$$

donde $g_n > 0$, $V_n \in L_1([-B_n, B_n]$, los intervalos $[a_n - B_n, a_n + B_n]$ son disjuntos. Sean $L_n = (a_n - B_n - a_{n-1} - B_{n-1})$ (donde $a_0 = B_0 = 0$) las distancias entre barreras y

$$I_n = \int_{-B_n}^{B_n} |V_n(x)|\, dx. \tag{3.2}$$

Los V_n tienen la siguiente forma

$$V_n(x) = \chi_{(-B_n, B_n)}(x) W(x) \tag{3.3}$$

donde $\chi_{(-B_n,B_n)}(x)$ es la función característica del intervalo $(-B_n, B_n)$, y definimos

$$W(x) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{F_n}(t) \cos 2xt\, dt \tag{3.4}$$

donde $c_n > 0$, tales que $\sum_{n=N}^{\infty} c_n \leq C 2^{(1-\gamma)N}$; aquí C es una constante, $\gamma > 2$ (por ejemplo $c_n = 2^{(1-\gamma)n}$) y $F_n \subset [a, b]$ son conjuntos disjuntos tipo Cantor. Cada uno de los conjuntos F_n está construido en los "huecos" de algún conjunto anterior y $[a, b] \subset (0, \infty)$ es un intervalo finito fijo.

Construimos los conjuntos F_n de la siguiente forma:

1. Vamos a construir el conjunto F_0. Sean $\delta_n > 0$ números suficientemente pequeños y dados y $n \in \mathbb{N}$. Fijamos $J_0 = [a,b] \subset (0,\infty)$ y sea $J_1 = J_0 \setminus (c_1^{(0)} - \delta_0, c_1^{(0)} + \delta_0)$ donde $c_1^{(0)}$ es el centro del segmento J_0. En general, si J_n es la unión disjunta de 2^n intervalos cerrados con centros en $c_m^{(n)} (m = 1, \ldots 2^n)$, sea $J_{n+1} = J_n \setminus \cup_{m=1}^{2^n} (c_m^{(n)} - \delta_n, c_m^{(n)} + \delta_n)$. El conjunto $F_0 = \cap_{n=1}^{\infty} J_n$ es un conjunto tipo Cantor y tiene medida de Lebesgue $|F_0| = b - a - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\delta_n$. Asumimos que δ_n son suficientemente pequeños para que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\delta_n < \infty$ y $|F_0| > 0$. Vamos a numerar los intervalos que quitamos en la construcción del conjunto F_0, sean estos J_{1k}, entonces $J_{1k} = (c_m^{(n)} - \delta_n, c_m^{(n)} + \delta_n)$ (para algunos n, m que dependen de k).

2. En cada uno de los segmentos J_{1k} construimos, como lo describimos en el paso 1, un conjunto tipo Cantor F_{1k} de medida positiva. Denotamos los intervalos que quitamos en la construcción de los conjuntos F_{1k} como J_{2k}. En cada uno de los intervalos J_{2k} construimos un conjunto tipo Cantor de medida positiva F_{2k}.

3. En general en el paso i tenemos una sucesión de intervalos J_{ik} y en cada uno de ellos construimos un conjunto tipo Cantor F_{ik} y denotamos los intervalos que quitamos en la construcción de estos conjuntos con $J_{(i+1)k}$. Al final tomamos solamente la mitad de los conjuntos construidos, por ejemplo los conjuntos construidos en los pasos impar $F_{(2i+1)k}$ y los numeramos con un solo índice $n \in \mathbb{N}$: $F_n = F_{(2i+1)k}$ (para algunos i, k que dependen de n) y sea $F = \cup_{n=0}^{\infty} F_n$. Sean $G_n = F_{(2i)k}$ y $G = \cup_{n=0}^{\infty} G_n$.

Los conjuntos F y G son esencialmente densos en el intervalo $[a,b]$. En efecto, sea $J \subset [a,b]$ un intervalo, existe J_{ij} (i impar corresponde a F, i par corresponde a G) tal que $J_{ij} \subset J$ y $|F| \geq |F \cap J| \geq |F \cap J_{ij}| \geq |F \cap F_{ij}| = |F_{ij}| > 0$ y lo mismo tenemos para el complemento de F.

En las demostraciones que vamos a dar a continuación, por comodidad vamos a usar la misma letra C para denotar cualquier constante, cuyo valor particular no tiene relevancia.

Lema 3.1. *Sean $F, W(x)$ como arriba. Supongamos que* $\sup \delta_n 2^{\gamma n} < \infty$ *para algún* $\gamma > 2$. *Entonces* $W(x) = O\left((1+|x|)^{-1+\frac{1}{\gamma}}\right)$.

Demostración. Sea $W_i(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{F_i}(t) \cos 2tx\, dt$ y el conjunto $F_i = \cap_{n=0}^{\infty} F_i^n$, donde F_i^0 es el intervalo en que está construido el conjunto F_i, $F_i^{n+1} = F_i^n \setminus \cup_{m=1}^{2^n} (c_{(i)m}^n - \delta_n^{(i)}, c_{(i)m}^n + \delta_n^{(i)})$ es la unión disjunta de 2^{n+1} intervalos cerrados con los centros $c_{(i)m}^{n+1}$ $(m = \overline{1, 2^{n+1}})$ y $0 < \delta_n^{(i)} \leq \delta_n$ son números suficientemente pequeños, tales que $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1}\delta_n^{(i)} < \infty$ y $|F_i| > 0$. Vamos a demostrar que $|W_i(x)| \leq C\left((1+|x|)^{-1+\frac{1}{\gamma}}\right)$ donde C no depende de i y usando esta estimación

$$
\begin{aligned}
|W(x)| &= \left|\sum_{i=0}^{\infty} c_i W_i(x)\right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} c_i |W_i(x)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} c_i C(1+|x|)^{-1+1/\gamma} \leq \\
&\leq C(1+|x|)^{-1+1/\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} c_i = O((1+|x|)^{-1+1/\gamma}).
\end{aligned}
$$

obtenemos el enunciado de Lema. Aquí podemos intercambiar el orden de integración y de suma por el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue 1.5.

Sean $f_i^n(x) = \int \chi_{F_i^n}(t) \cos 2tx\, dt$. Por la construcción de F_i

$$
\begin{aligned}
f_i^{n+1}(x) - f_i^n(x) &= \int \chi_{F_i^{n+1}}(t) \cos 2tx\, dt - \int \chi_{F_i^n}(t) \cos 2tx\, dt \\
&= \int (\chi_{F_i^{n+1}}(t) - \chi_{F_i^n}(t)) \cos 2tx\, dt = -\int_{F_i^n \setminus F_i^{n+1}} \cos 2tx\, dt \\
&= -\sum_{m=1}^{2^n} \int_{c_{(i)m}^n - \delta_n^{(i)}}^{c_{(i)m}^n + \delta_n^{(i)}} \cos 2tx\, dt \\
&= \frac{-1}{2x} \sum_{m=1}^{2^n} (\sin 2x(c_{(i)m}^n + \delta_n^{(i)}) - \sin 2x(c_{(i)m}^n - \delta_n^{(i)})) \\
&= \frac{-1}{x} \sin 2x\delta_n^{(i)} \sum_{m=1}^{2^n} \cos 2xc_{(i)m}^n. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Usando (3.5) podemos demostrar que la suma $\sum_{n=0}^{\infty} \left(f_i^{n+1}(x) - f_i^n(x)\right)$ converge absolutamente a $W_i(x)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}|f_i^{n+1}(x)-f_i^n(x)| &\le \sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\delta_n^{(i)}\le\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}\delta_n<\infty \text{ y}\\
|f_i^n(x)-W_i(x)| &= \left|\int\chi_{F_i^n}(t)\cos 2tx\,dt-\int\chi_{F_i}(t)\cos 2tx\,dt\right|\\
&= \left|\int\left(\chi_{F_i^n}(t)-\chi_{F_i}(t)\right)\cos 2tx\,dt\right|\\
&= \left|\int_{F_i^n\setminus F_i}\cos 2tx\,dt\right|\le|F_i^n\setminus F_i|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.
\end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$W_i(x)=f_i^0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(f_i^{n+1}(x)-f_i^n(x)\right)$$

$$|W_i(x)|=\left|f_i^0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\left(f_i^{n+1}(x)-f_i^n(x)\right)\right|\le\frac{1}{|x|}\left(1+\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left|\sin 2x\delta_n^{(i)}\right|\right).$$

Para $|x|>2^{-\gamma}$, definimos $N(x)\in\mathbb{N}$ tal que satisface la condición $2^{-\gamma}<2^{-\gamma N(x)}|x|\le 1$. Ahora, vamos a considerar por separado las sumas $\sum_{n<N(x)}$ y $\sum_{n\ge N(x)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|}\left(1+\sum_{n=0}^{N(x)-1}2^n\left|\sin 2x\delta_n^{(i)}\right|\right) &\le \frac{1}{|x|}\left(1+\sum_{n=0}^{N(x)-1}2^n\right)\\
&=\frac{1}{|x|}\left(1+2^{N(x)}-1\right)=\frac{2^{N(x)}}{|x|}\le 2|x|^{-1+1/\gamma}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|x|}\sum_{n=N(x)}^{\infty}2^n\left|\sin 2x\delta_n^{(i)}\right| &\le \sum_{n=N(x)}^{\infty}2^{n+1}\delta_n^{(i)}\le\sum_{n=N(x)}^{\infty}2^{n+1}\delta_n\\
&\le C\sum_{n=N(x)}^{\infty}2^{n+1}2^{-\gamma n}=C2\sum_{n=N(x)}^{\infty}2^{(1-\gamma)n}=C2^{(1-\gamma)N(x)+1}\sum_{n=0}^{\infty}2^{(1-\gamma)n}\\
&=C2^{(1-\gamma)N(x)+1}\frac{1}{1-2^{1-\gamma}}\le C|x|^{-1+1/\gamma}.
\end{aligned}$$

Entonces, obtenemos $|W_i(x)|\le C|x|^{-1+1/\gamma}$ para $|x|>2^{-\gamma}$.

Para $|x|\le 2^{-\gamma}$, $|W_i(x)|\le|F_i|\le|F|$ y sea $C=|F|\left(1+2^{-\gamma}\right)^{1-1/\gamma}\Rightarrow |W_i(x)|\le C\left(1+2^{-\gamma}\right)^{-1+1/\gamma}\le C(1+|x|)^{-1+1/\gamma}$. □

Lema 3.2. *Supongamos que* $\sup\delta_n2^{\gamma n}<\infty$ *para algún* $\gamma>2$. *Sea* $f(k)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\chi_{G_n}(k)$. *Existen funciones* $f_N(k)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f_N(k)\ge 0$ *tales que*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}|f(k)-f_N(k)|\,dk &\le C2^{(1-\gamma)N} \qquad y\\
\int_{\mathbb{R}}|f_N'(k)|\,dk &\le C2^{N+1}.
\end{aligned}$$

Demostración. Tenemos que

$$\left|f(k)-\sum_{n=0}^{N}c_n\chi_{G_n}(k)\right|=\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n\chi_{G_n}(k)\right|\le\sum_{n=N+1}^{\infty}c_n\le C2^{(1-\gamma)N}.$$

Para cada conjunto de Cantor G_n $n=1,\ldots N$ tomamos el conjunto G_n^N que obtuvimos en el paso N de la construcción. G_n^N es una unión disjunta de 2^N intervalos cerrados:

$$G_n^N=\cup_{k=1}^{2^N}[a_k,b_k].$$

Entonces

$$|G_n^N\setminus G_n|=\sum_{n=N}^{\infty}2^{n+1}\delta_n\le C\sum_{n=N}^{\infty}2^{n+1}2^{-\gamma n}\le C2^{N(1-\gamma)}$$

(Ver Lema 3.1). Esto implica que

$$\int\left|\sum_{n=0}^{N}c_n\chi_{G_n}(k)-\sum_{n=0}^{N}c_n\chi_{G_n^N}(k)\right|dk\le\sum_{n=0}^{N}c_n|G_n^N\setminus G_n|\le C2^{N(1-\gamma)}.$$

Aproximamos cada una de las funciones características $\chi_{G_n^N}(k)$ $n=1,\ldots N$ que toman valores 0 y 1 y sus puntos de discontinuidad son a_k,b_k $k=1\ldots 2^N$ con las funciones $f_n^N(k)\in C_0^\infty(\mathbb{R}), 0\le f_N(k)\le 1$

$$\int_{\mathbb{R}}|\chi_{G_n^N}(k)-f_n^N(k)|\,dk\le 2^{(1-\gamma)N},$$

y tales que para la derivada de la función $f_n^N(k)$ tenemos la siguiente estimación:

$$\int \left|(f_n^N(k))'\right| dk = \sum_{k=1}^{2^N} \int_{a_k-\Delta}^{a_k+\Delta} (f_n^N(k))'\, dk - \int_{b_k-\Delta}^{b_k+\Delta} (f_n^N(k))'\, dk$$

donde $\Delta > 0$ es un número suficientemente pequeño. Entonces

$$\int \left|(f_n^N(k))'\right| dk = \sum_{k=1}^{2^N} \{f_n^N(a_k+\Delta) - f_n^N(a_k-\Delta)$$
$$-f_n^N(b_k+\Delta) + f_n^N(b_k-\Delta)\} = \sum_{k=1}^{2^N} 2 = 2^{N+1}.$$

Esto implica que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{n=0}^{N} c_n \chi_{G_n^N}(k) - \sum_{n=0}^{N} c_n f_n^N(k)\right| dk \leq \sum_{n=1}^{N} c_n 2^{(1-\gamma)N} \quad \text{y}$$
$$\int_{\mathbb{R}} \left|\left(\sum_{n=0}^{N} c_n f_n^N(k)\right)'\right| dk \leq \sum_{n=0}^{N} c_n \int |(f_n^N(k))'|\, dk \leq C2^{N+1}$$

y tomamos $f_N(k) = \sum_{n=0}^{N} c_n f_n^N(k)$. □

3.2. Asintóticas de las soluciones.

Fijamos $\alpha \in [0,\pi)$ y, para $k > 0$, sea $y(x,k)$ la solución de la ecuación de Schrödinger en la semirecta

$$-y''(x) + V(x)\, y(x) = k^2 y(x), \quad x \in [0,\infty) \tag{3.6}$$

con la condición inicial $y(0,k) = -\sin\alpha$, $y'(0,k) = \cos\alpha$ y $V(x) \in L^1_{loc}[0,\infty)$.

Definimos las variables de Prüfer $R(x,k)$, $\varphi(x,k)$, tales que $R(x,k) > 0$, $\varphi(x,k)$ es continua en x y hacemos el cambio de variables

$$\begin{aligned} y(x) &= R(x)\sin\varphi(x) \\ y'(x) &= R(x)\, k\cos\varphi(x) \end{aligned} \tag{3.7}$$

R, φ satisfacen las siguientes ecuaciones

$$(\ln R)' = \frac{V}{2k}\sin 2\varphi, \tag{3.8}$$
$$\varphi' = k - \frac{V}{k}\sin^2\varphi. \tag{3.9}$$

Denotamos por $R_n(k) = R(a_n - B_n, k)$, $\varphi_n(k) = \varphi(a_n - B_n, k)$ y de (3.8), (3.9) tenemos que

$$R(x,k) \equiv R_n(k) \quad \text{si} \quad x \in [a_{n-1} + B_{n-1}, a_n - B_n] \tag{3.10}$$
$$\text{y} \quad \varphi_n(k) = \varphi(a_{n-1} + B_{n-1}, k) + kL_n. \tag{3.11}$$

Fijamos un intervalo $J = [k_1, k_2] \subset (0,\infty)$. Para $k \in J$, podemos integrar (3.8), (3.9) sobre el intervalo $[a_n - B_n, a_n + B_n]$ y usando la expansión de Taylor respecto al parámetro $g_n I_n$ obtenemos

$$\ln\frac{R_{n+1}(k)}{R_n(k)} = \frac{g_n}{2k}\int_{-B_n}^{B_n} dx V_n(x)\sin 2\theta_n(x,k) \tag{3.12}$$
$$-\frac{g_n^2}{k^2}\int_{-B_n}^{B_n} dx V_n(x)\cos 2\theta_n(x,k)\int_{-B_n}^{x} dt V_n(t)\sin^2\theta_n(t,k) + O\left(g_n^3 I_n^3\right)$$

donde $\theta_n(x,k) = k(x+B_n) + \varphi_n(k)$.

Suponemos que $g_n I_n \in l_3$. Entonces podemos escribir (3.12) en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \ln R_{N+1}(k) &= \frac{1}{2k} Im\sum_{n=1}^{N} X_n(k) - \frac{1}{2k^2} Re\sum_{n=1}^{N} Y_n(k) \\ &+ \frac{1}{8k^2} Re\sum_{n=1}^{N} Z_n(k) + \frac{1}{8k^2}\sum_{n=1}^{N} g_n^2 |\widehat{V_n}(2k)|^2 + \rho_N(k) \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde $|\rho_N(k)| \leq C$ para todos $N \in \mathbb{N}, k \in J$. Ponemos

$$\widehat{V_n}(2k) = \int_{-B_n}^{B_n} V_n(x)\, e^{2ikx} dx \tag{3.14}$$

y

$$X_n(k) = g_n \widehat{V_n}(2k)\, e^{2i(\varphi_n(k) + kB_n)} \tag{3.15}$$

$$Y_n(k) = g_n^2 e^{2i(\varphi_n(k)+kB_n)} \int_{-B_n}^{B_n} dx V_n(x) e^{2ikx} \int_{-B_n}^{x} dt V_n(t)$$
$$Z_n(k) = g_n^2 \left(\widehat{V_n}(2k)\right)^2 e^{4i(\varphi_n(k)+kB_n)}.$$

Lema 3.3. *Sea* $C_n = \max_{k\in J}\left|\frac{\partial\varphi(a_{n-1}+B_{n-1},k)}{\partial k}\right|$. *Suponemos que* $g_n I_n \to 0$ *y* $(L_n + B_n)/L_{n+1} \to 0$. *Entonces existe una constante* $C = C(J)$ *tal que* $C_n \le C L_{n-1}$ *y*

$$\max_{k\in J}\left|\frac{d^2\varphi(a_{n-1}+B_{n-1},k)}{dk^2}\right| \le C\left(1+\sum_{m=1}^{n-1} g_m I_m L_m^2\right)$$

Demostración. Este resultado es de [8, Proposición 5.1]. □

3.3. Espectro mixto

Para la demostración del teorema principal vamos a necesitar los siguientes lemas.

Lema 3.4. *Sean* $B_n, \alpha_n, \beta_n \ge 0$ *números reales tales que*

$$B_n \le B_{n-1} + 2\alpha_n\sqrt{B_{n-1}} + \beta_n \quad (n \ge 1)$$

entonces

$$\sqrt{B_n} \le \sqrt{B_0} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\beta_k}.$$

Demostración. Este resultado es de [8, Lema 6.2]. □

Lema 3.5. *Sean* X_n $(n \in \mathbb{N})$ *variables complejas aleatorias. Suponemos que existen números* $\rho_n \ge 0$ *tales que* $\sum \rho_n \ln^2 n < \infty$ *y*

$$E\left|X_n\right|^2 + \sum_{m=1}^{n-1}\left|EX_m\overline{X_n}\right| \le \rho_n,$$

donde $EX_n = \int X_n(k)\,dP(k)$ *son las esperanzas matemáticas respecto a alguna medida de probabilidad* $dP(k)$. *Entonces* $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} X_n$ *existe casi seguro, respecto a esta medida de probabilidad.*

Demostración. Este resultado es de [29], ver Teorema 1.26. □

Ponemos $\varepsilon_n = \left(\int_{|x|>B_n}|W(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Lema 3.6. a) $\lim_{n\to\infty}\widehat{V_n}(2k) = \pi/2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(k)$ *para casi toda* k.

b) *Sea* $f(k)$ *una función acotada, entonces existe una constante* $C = C(f)$, *tal que*

$$\int\left|\widehat{V_n}(2k) - \pi/2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(k)\right|^2 f(k)\,dk \le C\varepsilon_n^2$$

Demostración. a) Como $\gamma > 2$, Lema 3.1 demuestra que $W(x) \in L_p(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ para algún $1 < p < 2$. Entonces, por el Teorema 1.8 la integral $\int_{-B_n}^{B_n} W(x)e^{2ixk}\,dx$ converge puntualmente a $\int_{-\infty}^{+\infty} W(x)e^{2ixk}\,dx$, cuando $B_n \to \infty$. El límite puntual coincide con el límite de $\widehat{V_n}(2k) = \int_{-B_n}^{B_n} W(x)e^{2ixk}\,dx$ en la métrica de $L_2(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Plancherel 1.7 este límite es la transformada de Fourier inversa de $W(x)$ y es igual a $\pi/2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(k)$, tomando en cuenta que $2W(x) = \int\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(t)e^{2ixt}\,dt$. Entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x)e^{2ixk}\,dx = \lim_{B_n\to\infty}\int_{-B_n}^{B_n} W(x)e^{2ixk}\,dx = \pi/2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(k)$$

b)Para demostrar el punto b), vamos a usar la fórmula de Plancherel (1.2) para la función $\chi_{|x|>B_n}W(x) \in L_2(\mathbb{R})$ (Lema 3.1).
Sea $\int \chi_{|x|>B_n}W(x)\,e^{2ikx}\,dx$ su transformada de Fourier inversa (en el sentido de $L_2(\mathbb{R})$). Por la fórmula de Plancherel

$$\int\left|\int \chi_{|x|>B_n}W(x)e^{2ikx}\,dx\right|^2 dk = \pi\int\left|\chi_{|x|>B_n}W(x)\right|^2 dx$$
$$= \pi\int_{|x|>B_n}|W(x)|^2 dx = \pi\varepsilon_n^2 \quad (3.16)$$

Ahora, usando a)

$$\widehat{V_n}(2k) - \pi/2\sum_{n=0}^{\infty} c_n\chi_{F_n\cup -F_n}(k)$$
$$= \int_{-B_n}^{B_n}\chi_{(-B_n,B_n)}W(x)e^{2ikx}\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} W(x)e^{2ikx}\,dx = \int_{|x|>B_n} W(x)\,e^{2ikx}\,dx$$

y finalmente usando (3.16)

$$\int \left|\widehat{V_n}(2k) - \pi/2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{F_n}(k)\right|^2 f(k)\,dk$$

$$= \int \left|\int_{|x|>B_n} W(x)\, e^{2ikx}\,dx\right|^2 f(k)\,dk \le C\varepsilon_n^2$$

□

Ahora podemos demostrar el resultado principal.

Teorema 3.1. *Supongamos que el conjunto F cumple con las condiciones de Lema 3.1 para un $\gamma > 6$. Sean $g_n = n^{-\frac{1}{2}}, B_n = n^{\beta}$ donde $(1-2/\gamma)^{-1} < \beta < \gamma/8$ y L_n tales que $n^{\beta/2\gamma} L_{n-1}/L_n \to 0$. Entonces, para el operador de Schrödinger en la semirecta H_α con el potencial $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n V_n(x - a_n)$ donde $V_n(x) = \chi_{(-B_n,B_n)} W(x)$ y $W(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} c_n \chi_{F_n}(k) \cos 2kx\,dk$ tenemos que $\sigma_{ac}(H_\alpha) = \sigma_{ess}(H_\alpha) = [0,\infty)$, $\sigma_p(H_\alpha) \cap (0,\infty) = \emptyset$ y, para un conjunto (que depende de I) de condiciones de frontera α de medida positiva, $\sigma_{sc}(H_\alpha) \cap I \ne \emptyset$ para todo intervalo $I \subset [a,b]$.*

Demostración. Para demostrar el teorema, primero observamos que $V(x) \to 0$, esto implica que $\sigma_{ess}(H_\alpha) = [0,\infty)$ (ver Colorario 2.3). En el paso A demostraremos que la ecuación (3.6) no tiene soluciones en $L_2(0,\infty)$, lo que implica que no tenemos espectro puntual en la semirecta $[0,\infty)$. En el paso B demostraremos que para casi toda $k \in F^C$ (referimos al conjunto $G \cup (\mathbb{R} \setminus [a,b])$ como el conjunto F^C) todas las soluciones de (3.6) son acotadas, esto implica que el espectro absolutamente continuo está soportado en $(F^C)^2 = \{k^2 : k \in F^C\}$ y cerrando el conjunto $(F^C)^2$, denso en $[0,\infty)$, obtenemos $\sigma_{ac}(H_\alpha) = [0,\infty)$. En el paso C se demostrará que para casi toda $k \in F$ tenemos soluciones de (3.6) no acotadas, entonces la parte absolutamente continua de la medida espectral no ve el conjunto $F^2 = \{k^2 : k \in F\}$, y tenemos el espectro singular continuo soportado en este conjunto.

A. Demostraremos que no hay soluciones de (3.6) $y(x,k) \in L_2(0,\infty)$. La clave aquí es el rápido crecimiento de las separaciones entre las barreras que no permite tener soluciones en $L_2(0,\infty)$.

Usando (3.10) y (3.11), tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} |y(x,k)|^2\,dx &= \int_0^{\infty} |R(x)|^2 |\sin\varphi(x)|^2\,dx \\
&\ge \sum_{n=2}^{\infty} \int_{a_{n-1}+B_{n-1}}^{a_n - B_n} |R(x)|^2 |\sin\varphi(x)|^2\,dx \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \int_{a_{n-1}+B_{n-1}}^{a_n - B_n} R_n^2 |\sin(\varphi(a_{n-1}+B_{n-1},k) + kx)|^2\,dx \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R_n^2}{2} \int_{a_{n-1}+B_{n-1}}^{a_n - B_n} 1 - \cos 2(\varphi(a_{n-1}+B_{n-1},k) + kx)\,dx \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R_n^2}{2} \left(L_n - \frac{1}{2k} \sin 2(\varphi(a_{n-1}+B_{n-1},k) + kx)\Big|_{a_{n-1}+B_{n-1}}^{a_n - B_n}\right) \\
&\ge \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R_n^2}{2}(L_n - \frac{1}{k}).
\end{aligned}$$

Vamos a demostrar la estimación de Gronwall

$$R(x) \le R_{n+1} \quad \text{para} \quad x \in [a_n - B_n, a_n + B_n]. \tag{3.17}$$

De (3.8) tenemos que $R'(x) = R(x)\frac{V(x)}{2k}\sin 2\varphi(x)$. Integrando esta ecuación, obtenemos

$$\int_x^{a_n+B_n} R'(t)\,dt = \int_x^{a_n+B_n} R(t)\frac{V(t)}{2k}\sin 2\varphi(t)\,dt \qquad \text{y}$$

$$R(x) = R(a_n+B_n) - \int_x^{a_n+B_n} R(t)\frac{V(t)}{2k}\sin 2\varphi(t)\,dt$$

$R(x) > 0$, $W(t)$ es una función acotada y tenemos que

$$\begin{aligned}
R(x) &\le R(a_n+B_n) + C\frac{g_n}{2k}\int_x^{a_n+B_n} R(t)\,dt \\
&\le R(a_n+B_n) + C\int_x^{a_n+B_n} R(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Sea $\phi(x) = R(a_n+B_n) + C\int_x^{a_n+B_n} R(t)\,dt$

$$-\phi'(x) = CR(x) \le C\phi(x) \Rightarrow \left(e^{Cx}\phi(x)\right)' \ge 0$$

y la función $e^{Cx}\phi(x)$ es monótona creciente. Entonces,

$$\begin{aligned} e^{C(a_n+B_n)}\phi(a_n+B_n) &= e^{C(a_n+B_n)}R_{n+1} \\ &\geq e^{C(a_n+B_n)}\phi(x) \geq e^{C(a_n+B_n)}R(x) \\ &\text{y} \quad R(x) \leq R_{n+1} \end{aligned}$$

En particular tenemos que

$$R_n \leq R_{n+1}. \tag{3.18}$$

Usando (3.18) vamos a demostrar que la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R_n^2}{2}(L_n-\frac{1}{k})$ diverge

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{R_n^2}{2}(L_n-\frac{1}{k}) \geq \sum_{n=m}^{\infty}\frac{R_n^2}{4}L_n \quad (L_n\to\infty)$$

Por el criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty}\frac{R_{n+1}^2L_{n+1}}{R_n^2L_n} \geq \lim_{n\to\infty}\frac{L_{n+1}}{L_n} = \infty$$

esta suma diverge. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty}|y(x,k)|^2\,dx \geq \sum_{n=2}^{\infty}\frac{R_n^2}{2}(L_n-\frac{1}{k}) = \infty$.

B. Para probar que para casi todo $k \in F^c$ todas las soluciones de (3.6) son acotadas demostraremos, usando Lema 3.5 y (3.13), que $|\ln R_N| < \infty$ si $N \to \infty$ para casi todo $k \in F^c$.

Primero vamos a demostrar algunas estimaciones que usaremos a lo largo de la demostración. Usando Lema 3.1, obtenemos:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-B_n}^{B_n}|V_n(x)|\,dx = \int_{-B_n}^{B_n}|W(x)|\,dx \leq C\int_0^{B_n}(1+x)^{-1+1/\gamma}\,dx \\ &= C\gamma\left((1+B_n)^{1/\gamma}-1\right) = C\gamma\left(\left(1+n^{\beta}\right)^{1/\gamma}-1\right) \leq Cn^{\beta/\gamma} \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$I_n \leq Cn^{\beta/\gamma} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \left(\int_{|x|>B_n}|W(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq C\left(\int_{x>B_n}(1+x)^{2(-1+1/\gamma)}dx\right)^{1/2} \\ &\leq C\left(n^{\beta(-1+2/\gamma)}\right)^{1/2} = Cn^{-\beta/2+\beta/\gamma} \end{aligned}$$

y obtenemos

$$\varepsilon_n \leq Cn^{-\beta/2+\beta/\gamma} \tag{3.20}$$

Como $\gamma > 6, \beta > 0 \Rightarrow \beta(1/\gamma - 1/2) < 0 \Rightarrow \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. También tenemos que $\sum(g_nI_n)^3 < \infty$:

$$(g_nI_n)^3 \leq Cn^{-3/2}n^{3\beta/\gamma} = Cn^{3(\beta/\gamma-1/2)}$$

y $3(\beta/\gamma-1/2) < -1$ por las condiciones del Teorema. Esto implica que podemos usar la fórmula (3.13).

Vamos a demostrar la siguiente estimación:

$$\sum_{s=1}^{n-1}g_sI_sL_s^2 \leq Cn^{-1/2+\beta/\gamma}L_{n-1}^2. \tag{3.21}$$

Como tenemos que $L_{n-1}/L_n \to 0$, podemos encontrar $C, \alpha > 0$ tales que $L_s^2/L_{n-1}^2 \leq Ce^{-\alpha(n-s)}$ para todos $s \leq n-1$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n-1}g_sI_sL_s^2 &\leq CL_{n-1}^2e^{-\alpha n}\sum_{s=1}^{n-1}s^{-1/2+\beta/\gamma}e^{\alpha s} \\ &\leq CL_{n-1}^2e^{-\alpha n}\int_1^n s^{-1/2+\beta/\gamma}e^{\alpha s}ds \leq Cn^{-1/2+\beta/\gamma}L_{n-1}^2. \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes estimaciones para $\left|\widehat{V}_n\right|$ y $\left|\widehat{V}_n'\right|$

$$\left|\widehat{V}_n(2k)\right| = \left|\int_{-B_n}^{B_n}V_n(x)\,e^{2ikx}dx\right| \leq \int_{-B_n}^{B_n}|V_n(x)|\,dx = I_n \tag{3.22}$$

$$\left|\widehat{V}_n'(2k)\right| = \left|\int_{-B_n}^{B_n}(2ix)\,V_n(x)\,e^{2ikx}dx\right| \leq 2B_nI_n \tag{3.23}$$

Sea $[c,d]$ cualquier subintervalo finito de $[0,\infty)$ e introducimos la función

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n\chi_{G_n}(k) + \chi_{[c,d]}(k) - \chi_{[a,b]}(k)$$

($[a,b]$ es el intervalo donde construimos el conjunto F). Tenemos que $f(k) = 0$ si $k \in F$ y $f(k) > 0$ si $k \in G$ o $k \in [c,d] \setminus [a,b]$. Consideramos la medida

$dP(k) = cf(k)\,dk$, donde c es una constante tal que $\int dP(k) = 1$. Vamos a demostrar que X_n satisfacen las condiciones de Lema 3.5 con la medida $dP(k)$. Vamos a estimar $EX_m\overline{X_n}$ ($m \leq n$), donde las esperanzas son calculadas respecto a la medida de probabilidad $dP(k)$. Por el Lema 3.2 existen funciones $f_N(k) \in C_0^\infty(0,\infty)$ ($N \in \mathbb{N}$) tales que $f_N \geq 0$ y

$$\int |f(k) - f_N(k)|\,dk \leq C2^{(1-\gamma)N}, \qquad \int |f_N'(k)|\,dk \leq C2^{N+1} \tag{3.24}$$

(γ es de Lema 1).

Usando (3.15), (3.24), (3.22), obtenemos

$$\begin{aligned} |EX_m\overline{X_n}| &= Cg_mg_n\left|\int f(k)\widehat{V}_m(2k)\overline{\widehat{V}_n(2k)}e^{2i(\phi_m(k)-\phi_n(k)+k(B_n-B_m))}dk\right| \\ &\leq Cg_mg_n\Bigg(I_nI_m\int |f(k)-f_N(k)|\,dk \qquad (3.25)\\ &+ \left|\int f_N(k)\widehat{V}_m(2k)\overline{\widehat{V}_n(2k)}e^{2i(\phi_m(k)-\phi_n(k)+k(B_n-B_m))}dk\right|\Bigg) \end{aligned}$$

Sean en (3.25)

$$I = Cg_mg_n\left(I_nI_m\int |f(k)-f_N(k)|\,dk\right) \qquad \text{y}$$

$$II = Cg_mg_n\left|\int f_N(k)\widehat{V}_m(2k)\overline{\widehat{V}_n(2k)}e^{2i(\phi_m(k)-\phi_n(k)+k(B_m-B_n))}dk.\right|$$

Podemos estimar I usando (3.24)

$$I \leq Cg_mg_nI_mI_n2^{(1-\gamma)N} \tag{3.26}$$

Integrando por partes, obtenemos para II

$$\begin{aligned} II &= C\frac{g_mg_n}{2}\Bigg(\int\Bigg|\frac{\hat{V}_m'(2k)\overline{\hat{V}_n(2k)}f_N(k)}{\phi_m'(k)-\phi_n'(k)+B_m-B_n} \qquad (3.27)\\ &+ \frac{\hat{V}_m(2k)\overline{\hat{V}_n'(2k)}f_N(k)}{\phi_m'(k)-\phi_n'(k)+B_m-B_n} + \frac{\hat{V}_m(2k)\overline{\hat{V}_n(2k)}f_N'(k)}{\phi_m'(k)-\phi_n'(k)+B_m-B_n} \\ &- \frac{(\hat{V}_m(2k)\overline{\hat{V}_n(2k)}f_N(k))(\phi_m''(k)-\phi_n''(k))}{(\phi_m'(k)-\phi_n'(k)+B_m-B_n)^2}\Bigg|\,dk\Bigg). \end{aligned}$$

Vamos a estimar cada uno de los términos de (3.27). Para los primeros dos términos, usando (3.22), (3.23), Lema 3.3 y (3.11), tenemos

$$C\frac{g_mg_n}{2}\int\left|\frac{\widehat{V}_m'(2k)\,\overline{\widehat{V}_n(2k)}f_N(k)}{\varphi_m'(k)-\varphi_n'(k)+B_m-B_n}\right|dk \leq Cm^{-1/2}n^{-1/2}\frac{I_nB_mI_m}{L_n} \tag{3.28}$$

Para el tercer término de (3.27), usando (3.24) tenemos

$$\begin{aligned} &C\frac{g_mg_n}{2}\left(\int\left|\frac{(\hat{V}_m(2k)\overline{\hat{V}_n(2k)}f_N'(k))}{(\phi_m'(k)-\phi_n'(k)+B_m-B_n)}\right|dk\right) \\ &\leq Cn^{-1/2}m^{-1/2}\frac{I_mI_n}{L_n}\int |f_N'(k)|\,dk \leq Cn^{-1/2}m^{-1/2}2^{N+1}\frac{I_mI_n}{L_n} \qquad (3.29) \end{aligned}$$

Para estimar el último término en (3.27), vamos a necesitar la siguiente estimación

$$\int\left|\widehat{V}_m(2k)\widehat{V}_n(2k)\right|f(k)\,dk$$

$$\leq \int\left|\widehat{V}_m(2k)\right|^2 f(k)\,dk\int\left|\widehat{V}_n(2k)\right|^2 f(k)\,dk$$

por la desigualdad de Schwartz. Como $supp\, f \cap F = \emptyset$ (donde $supp\, f$ es el soporte de la función f) tenemos

$$= \int\left|\widehat{V}_m(2k) - \pi/2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{F_n\cup -F_n}(x)\right|^2 f(k)\,dk$$

$$\times\int\left|\widehat{V}_n(2k) - \pi/2\sum_{n=0}^{\infty}\chi_{F_n\cup -F_n}(x)\right|^2 f(k)\,dk$$

$$\text{y por Lema 3.6} \qquad \leq c\varepsilon_n\varepsilon_m \tag{3.30}$$

Entonces para el último término en (3.27) tenemos

$$C\frac{g_m g_n}{2}\int\left|\frac{\widehat{V}_m(2k)\,\overline{\widehat{V}_n(2k)} f_N(k)\left(\varphi''_m(k)-\varphi''_n(k)\right)}{\left(\varphi'_m(k)-\varphi'_n(k)+B_m-B_n\right)^2}\right|dk,$$

usamos Lema3.3

$$\leq Cg_m g_n\sum_{s=1}^{n-1} g_s I_s\frac{L_s^2}{L_n^2}\int\left|\widehat{V}_m(2k)\,\widehat{V}_n(2k)\right| f_N(k)\,dk$$

usamos (3.21)

$$\leq Cm^{-1/2}n^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}\int\left|\widehat{V}_m(2k)\,\widehat{V}_n(2k)\right| f_N(k)\,dk$$

$$= Cm^{-1/2}n^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}\left(\int\left|\widehat{V}_m(2k)\,\widehat{V}_n(2k)\right|\left(f_N(k)-f(k)\right)dk\right.$$

$$\left.+\int\left|\widehat{V}_m(2k)\,\widehat{V}_n(2k)\right| f(k)\,dk\right) \qquad \text{y usamos(3.30), (3.24)}$$

$$\leq Cm^{-1/2}n^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}\left(I_m I_n 2^{(1-\gamma)N}+c\varepsilon_n\varepsilon_m\right) \tag{3.31}$$

En conclusión, usando (3.26), (3.28), (3.29) y (3.31) tenemos que $EX_m\overline{X_n}$ satisface la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}
\left|EX_m\overline{X_n}\right| &\leq Cm^{-1/2}n^{-1/2}I_m I_n 2^{(1-\gamma)N}+C\frac{m^{-1/2}n^{-1/2}I_n I_m B_n}{L_n}\\
&+ C\frac{n^{-1/2}m^{-1/2}I_n I_m B_m}{L_n}+Cn^{-1/2}m^{-1/2}2^{N+1}\frac{I_m I_n}{L_n}\\
&+ Cm^{-1/2}n^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}\left(I_m I_n 2^{(1-\gamma)N}+c\varepsilon_n\varepsilon_m\right)
\end{aligned}$$

usando (3.19), (3.20) y reagrupando, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\leq Cm^{-1/2+\beta/\gamma}n^{-1/2+\beta/\gamma}\left(2^{(1-\gamma)N}+\frac{2^{N+1}+m^\beta+n^\beta}{L_n}\right.\\
&+ \left.\left((mn)^{-\beta/2}+2^{(1-\gamma)N}\right)n^{-1/2+\beta/\gamma}\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}\right)
\end{aligned}$$

Tomamos $N=n$ y sumamos sobre m

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n-1}\left|EX_m\overline{X_n}\right| &\leq Cn^{-1/2+\beta/\gamma}\left(\left(2^{(1-\gamma)n}+\frac{2^{n+1}+n^\beta}{L_n}\right)\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1/2+\beta/\gamma}\right.\\
&+\frac{1}{L_n}\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1/2+\beta/\gamma+\beta}+\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}n^{-1/2+\beta/\gamma}\left(n^{-\beta/2}\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1/2+\beta/\gamma-\beta/2}\right.\\
&\left.\left.+2^{(1-\gamma)n}\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1/2+\beta/\gamma}\right)\right).
\end{aligned}$$

Asumimos que las potencias de m son positivas. La demostración en el caso contrario es completamente análoga. (La parte de mayor interés para nosotros es de decrecimiento más lento $\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}n^{-1+2\beta/\gamma}n^{-\beta/2}\sum_{m=1}^{n-1}m^{-1/2+\beta/\gamma-\beta/2}$ y en este miembro la potencia de m, $-1/2+\beta/\gamma-\beta/2$, es siempre positiva por las condiciones del Teorema.) Tomamos en cuenta que $2^{(1-\gamma)n}\to 0$ muy rápido (como $\gamma>6$), entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{n-1}\left|EX_m\overline{X_n}\right| &\leq C\left(n^{-1/2+\beta/\gamma}\frac{2^{n+1}+n^\beta}{L_n}n^{1/2+\beta/\gamma}\right.\\
&+\left.\frac{n^{2\beta/\gamma+\beta}}{L_n}+\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}n^{-1+2\beta/\gamma}\left(n^{-\beta/2}n^{1/2+\beta/\gamma-\beta/2}\right)\right)\\
&= C\left(n^{2\beta/\gamma}\frac{2^{n+1}+n^\beta}{L_n}+\frac{n^{2\beta/\gamma+\beta}}{L_n}+\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}n^{-1/2+3\beta/\gamma-\beta}\right)\\
&= C\left(\frac{2^{n+1}n^{c_1}}{L_n}+\frac{n^{c_2}}{L_n}+\frac{L_{n-1}^2}{L_n^2}n^{-1/2+3\beta/\gamma-\beta}\right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

para algunos c_1, c_2.

Para estimar $E\left|X_n\right|^2$ usamos el hecho de que $supp\, f\cap F=\emptyset$ y Lema 3.6a)

$$\begin{aligned}
E\left|X_n\right|^2 &= Cg_n^2\int\left|\widehat{V}_n(2k)\right|^2 f(k)\,dk\\
&= Cg_n^2\int\left|\widehat{V}_n(2k)-\pi/2\sum_{n=0}^{\infty}c_n\chi_{F_n\cup-F_n}(k)\right|^2 f(k)\,dk\\
&\leq Cg_n^2\varepsilon_n^2\leq Cn^{-1+2\beta/\gamma-\beta}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Usando (3.32) y (3.33) podemos tomar en Lema 3.5

$$\rho_n = n^{-1+2\beta/\gamma-\beta} + \frac{2^{n+1}n^{c_1}}{L_n} + \frac{n^{c_2}}{L_n} + \frac{L_{n-1}^2}{L_n^2} n^{-1/2+3\beta/\gamma-\beta} \quad \text{y}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \ln^2 n = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4$$

donde

$$\Sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}n^{c_1}}{L_n} \ln^2 n, \qquad \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{c_2}}{L_n} \ln^2 n$$

$$\Sigma_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_{n-1}^2}{L_n^2} n^{-1/2+3\beta/\gamma-\beta} \ln^2 n, \qquad \Sigma_4 = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+2\beta/\gamma-\beta} \ln^2 n$$

Vamos a demostrar que cada una de estas sumas converge. Por la condición $n^{\beta/2\gamma} L_{n-1}/L_n \to 0$ del Teorema tenemos un crecimiento rápido de L_n (más rápido que exponencial), entonces

$$n^c 2^n / L_n \to 0 \tag{3.34}$$

para cualquier c. Usando (3.34), tenemos que

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-2} \ln^2 n, \quad \text{donde} \quad a_n \to 0$$

y esto implica que ambas sumas convergen (aplicamos el Teorema 1.11).

La serie

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L_{n-1}}{L_n} n^{\beta/2\gamma} \right)^2 n^{-1/2+2\beta/\gamma-\beta} \ln^2 n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-1/2+2\beta/\gamma-\beta} \ln^2 n \quad \text{donde} \quad a_n \to 0. \end{aligned}$$

Entonces para demostrar que las series Σ_3 y Σ_4 convergen es suficiente demostrar que converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(-1/2+2\beta/\gamma-\beta)} \ln^2 n$. Esta serie converge por el Teorema 1.11 si y solo si converge la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{k(-1/2+2\beta/\gamma-\beta)} (\ln 2^k)^2 = \ln^2 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k(\beta(1-2/\gamma)-1/2)} k^2.$$

Por la condición de Teorema $\beta(1-2/\gamma) > 1$ y tenemos una serie convergente. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n \ln^2 n < \infty$ y por el Lema 3.5 $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ para casi todo $k \in \mathit{supp}\, f$ y como el intervalo $[c,d]$ es arbitrario $\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty$ para casi todo $k \in F^c$.

De manera similar podemos demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} Z_n$ son acotadas para casi todo $k \in F^c$.

Para demostrar que $|\ln R_N| < \infty$ cuando $N \to \infty$ para casi todo $k \in F^c$ falta demostrar que el último término en la asintótica (3.13) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \left|\widehat{V}_n(2k)\right|^2 < \infty$ casi siempre respecto a la medida $dP(k)$. Sea

$$S(k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n^2 \left|\widehat{V}_n(2k)\right|^2 \in [0,\infty].$$

Por (3.30)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C \int g_n^2 \left|\widehat{V}_n(2k)\right|^2 f(k)\, dk &\le C \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2 \varepsilon_n^2 \\ &\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1+2\beta/\gamma-\beta} < \infty \quad (2\beta/\gamma - \beta < 0) \end{aligned}$$

y por el Teorema de convergencia monótona 1.3 tenemos que $S(k) < \infty$ para casi todos $k \in \mathit{supp}\, f$. Y con esto demostramos que $R_N \le C$ para todo N y casi todo $k \in F^C$.

Por la estimación de Gronwall (3.17) tenemos que

$$R(x) \le R_{n+1} \le C$$

para todos $x \in \cup_n [a_n - B_n, a_n + B_n]$ y esto es cierto para dos diferentes ángulos iniciales $\varphi(0,k)$. Entonces tenemos que todas las soluciones de (3.6) son acotadas para casi todo $k \in (F)^C$.

Como se cumple la condición $\sup_x \left(\int_{x-1}^{x+1} |V(t)|^2\, dt \right) < \infty$ para el potencial $V(x)$ y $|F^c| > 0$ podemos usar el resultado de Simon Teorema 2.5. Entonces la medida espectral es puramente absolutamente continua en $\left(F^C\right)^2$ y, como el conjunto $\left(F^C\right)^2$ es denso en $[0,\infty)$, tenemos que $\sigma_{ac} = [0,\infty)$.

Demostraremos que $\sup_x \left(\int_{x-1}^{x+1} |V(t)|^2 dt\right) < \infty$

$$\begin{aligned}
\sup_x \int_{x-1}^{x+1} |V(t)|^2 dt &= \sup_n \sup_x \int_{x-1}^{x+1} |g_n V_n(t-a_n)|^2 dt \\
&= \sup_x \int_{x-1-a_n}^{x+1-a_n} \left|\sum_{n=1}^{\infty} g_n \chi_{(-B_n,B_n)} W(t)\right|^2 dt \\
&\leq \sup_n g_n^2 \int_{-B_n}^{B_n} |W(t)|^2 dt \quad \text{usamos Lema 3.1} \\
&\leq C \sup_n g_n^2 \int_0^{B_n} (1+t)^{-1+1/\gamma} dt \leq C \sup_n n^{-1} (1+B_n)^{1/\gamma} \\
&\leq C \sup_n n^{-1+\beta/\gamma} < C \quad (\beta/\gamma < 1/8).
\end{aligned}$$

C. Demostraremos que $\sigma_{sc}(H_\alpha) \cap (0,\infty) \neq \emptyset$.

Tomamos $f(k) \in C_0^\infty(0,\infty)$, $f(k) \geq 0$, $\int f(k)\,dk = 1$ y $F \subset suppf$. Es suficiente demostrar que $E\left|\sum_{n=1}^N X_n\right|^2 = o\left(\ln^2 N\right)$ para casi todo k respecto a la medida $dP(k) = f(k)\,dk$ e igualmente para Y_n, Z_n. Si esto es cierto, usando la desigualdad de Chebyshev tenemos que

$$P\left(\left|\sum_{n=1}^N X_n\right| \geq \delta \ln N\right) \leq \frac{E\left|\sum_{n=1}^N X_n\right|^2}{\delta^2 \ln^2 N} \to 0 \quad (N \to \infty) \tag{3.35}$$

para todo $\delta > 0$. En particular podemos encontrar una sucesión $N_i \to \infty$ tal que $\sum_{i=1}^\infty E\left|\sum_{n=1}^{N_i} X_n\right|^2 \ln^{-2} N_i < \infty$. Ahora, usando el Lema de Borel - Cantelli tenemos que

$$P\left(\left|\sum_{n=1}^{N_i} X_n\right| \geq \delta \ln N_i \quad \text{para un número infinito de } i\right) = 0$$

y lo mismo tenemos si reemplazamos X_n por Y_n o Z_n.

Por otro lado, Lema 3.6a) implica que

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{V}_n(2k) = \pi/2 \sum_{n=0}^\infty c_n \chi_{F_n \cup -F_n}(k)$$

para casi todo k. Si δ es suficientemente pequeño, de (3.13) vemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \ln R_{N_i}(k) &= \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2k} Im \sum_{n=1}^{N_i} X_n(k) - \frac{1}{2k^2} Re \sum_{n=1}^{N_i} Y_n(k) \\
&+ \frac{1}{8k^2} Re \sum_{n=1}^{N_i} Z_n(k) + \frac{1}{8k^2} \sum_{n=1}^{N_i} g_n^2 \left|\widehat{V_n}(2k)\right|^2 + \rho_{N_i}(k) \qquad (3.36) \\
&\geq \lim_{i\to\infty} \left(c_1 \sum_{n=1}^{N_i} g_n^2 - c_2 \delta \ln N_i\right) = \lim_{i\to\infty} \left(c_1 \sum_{n=1}^{N_i} n^{-1} - c_2 \delta \ln N_i\right) = \infty
\end{aligned}$$

para casi todo $k \in F$.

Entonces, para casi todo $k \in F$, tenemos soluciones no acotadas de (3.6) y la parte absolutamente continua de la medida espectral $\rho_\alpha^{ac}(F^2) = 0$ para cualquier α, donde $F^2 = \{k^2 : k \in F\}$ (por el resultado de Last y Simon Colorario 2.2). Igualmente, como lo demostramos al principio en A esto ocurre con la parte puntual de ρ_α. Como α es cualquiera, usando la fórmula del "promedio"(ver Corolario 4.1) obtenemos

$$0 < \left|F^2\right| = \int_0^\pi \rho_\alpha\left(F^2\right) d\alpha = \int_0^\pi \rho_\alpha^{sc}\left(F^2\right) d\alpha$$

Esto implica que $\rho_\alpha^{sc}(F^2) > 0$ para un conjunto de condiciones de frontera de medida positiva.

Falta demostrar que $E\left|\sum_{n=1}^N X_n\right|^2 = o\left(\ln^2 N\right)$. Sea $S_N = \sum_{n=1}^N X_n$, entonces

$$E|S_N|^2 \leq E|X_N|^2 + 2\left|ES_{N-1}\overline{X_N}\right| + E|S_{N-1}|^2. \tag{3.37}$$

Vamos a estimar cada uno de los términos de esta suma. Usamos el mismo procedimiento que en B.

Para el primer término, usando Lema 3.6a), tenemos

$$E|X_N|^2 = g_N^2 \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{V_N}(2k)\right|^2 f(k)\,dk \leq C g_N^2 = CN^{-1} \tag{3.38}$$

Para estimar el segundo miembro integramos por partes

$$
\begin{aligned}
\left|ES_{N-1}\overline{X_N}\right| &= g_N\left|\int S_{N-1}(k)\overline{\widehat{V_N}(2k)e^{2i(\varphi_N(k)+kB_N)}}f(k)\,dk\right| \\
&= g_N\left|\int e^{-2i(\varphi_N(k)+kB_N)}\frac{d}{dk}\left(\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)}{-2i(\varphi_N'(k)+B_N)}\right)dk\right| \\
&\leq Cg_N\int\left|\frac{d}{dk}\left(\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)}{\varphi_N'(k)+B_N)}\right)\right|dk \\
&= Cg_N\int\left|\frac{S_{N-1}'(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)}{\varphi_N'(k)+B_N}+\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}'(2k)}f(k)}{\varphi_N'(k)+B_N}\right. \\
&\quad\left.+\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f'(k)}{\varphi_N'(k)+B_N}-\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)\,\varphi_N''(k)}{(\varphi_N'(k)+B_N)^2}\right|dk
\end{aligned}
$$

Vamos a estimar cada uno de los cuatro términos que obtuvimos. Por la desigualdad de Schwartz tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int\left|S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)\right|dk &\leq \left(\int|S_{N-1}(k)|^2f(k)\,dk\right)^{1/2} \\
&\times\left(\int|\widehat{V_N}(2k)|^2f(k)\,dk\right)^{1/2}\leq C\left(E\,|S_{N-1}|^2\right)^{1/2} \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Para el último término, usando Lema 3.3, obtenemos

$$
\begin{aligned}
&g_N\int\left|\frac{S_{N-1}(k)\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)\varphi_N''(k)}{(\varphi_N'(k)+B_N)^2}\right|dk \\
&\leq Cg_N\sum_{m=1}^{N-1}g_mI_m\frac{L_m^2}{L_N^2}\int\left|S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)\right|dk \\
&\text{usamos (3.39) y (3.21)}\quad\leq CN^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{N-1}^2}{L_N^2}\left(E\,|S_{N-1}|^2\right)^{1/2}. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Para estimar el primer término necesitamos estimar $S_N'(k)$. Como en (3.21)

podemos estimar

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{n-1}g_sL_s &\leq CL_{n-1}e^{-\alpha n}\sum_{s=1}^{n-1}s^{-1/2}e^{\alpha s} \qquad (3.41)\\
&\leq CL_{n-1}e^{-\alpha n}\int_1^n s^{-1/2}e^{\alpha s}ds\leq Cn^{-1/2}L_{n-1}.
\end{aligned}
$$

y para $|S_N'(k)|$ tenemos

$$
\begin{aligned}
|S_N'(k)| &= \left|\sum_{n=1}^{N-1}g_n\left(\widehat{V_n}(2k)e^{2i(\varphi_n(k)+kB_n)}\right)'\right| \qquad (3.42)\\
&= \left|\sum_{n=1}^{N-1}g_n\left(\widehat{V_n}'(2k)e^{2i(\varphi_n(k)+kB_n)}+\widehat{V_n}(2k)2i\left(\varphi_n'(k)+B_n\right)e^{2i(\varphi_n(k)+kB_n)}\right)\right| \\
&\quad\text{usamos Lema 3.6a), (3.23), (3.5) y Lema 3.3} \\
&\leq C\sum_{n=1}^{N-1}g_n(2B_nI_n+L_n) \\
&\quad\text{como}\quad B_nI_n/L_n=n^c/L_m\to 0\quad\text{por el rápido crecimiento de } L_n \\
&\leq C\sum_{n=1}^{N-1}2g_nL_n\leq CN^{-1/2}L_{N-1}\quad\text{(usamos (3.41)).}
\end{aligned}
$$

Entonces para el tercer término, usando (3.42) y Lema 3.3 tenemos

$$
g_N\int\left|\frac{S_{N-1}'(k)\overline{\widehat{V_N}(2k)}f(k)}{\varphi_N'(k)+B_N}\right|dk\leq CN^{-1}\frac{L_{N-1}}{L_N} \qquad (3.43)
$$

Para los demás términos, usando (3.39), tenemos

$$
\begin{aligned}
g_N\int\left|\frac{S_{N-1}(k)\,\overline{\widehat{V_N}(2k)f'(k)}}{\varphi_N'(k)+B_N}\right|dk &\leq C\frac{g_N}{L_N}\left(E\,|S_{N-1}|^2\right)^{1/2} \\
&\leq C\frac{N^{-1/2}}{L_N}\left(E\,|S_{N-1}|^2\right)^{1/2} \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Entonces, sumando (3.38),(3.40),(3.43) y (3.44), (3.37) llega a

$$
\begin{aligned}
E\,|S_N|^2 &\leq E\,|S_{N-1}|^2+C\left(E\,|S_{N-1}|^2\right)^{1/2}\left(N^{-1+\beta/\gamma}\frac{L_{N-1}^2}{L_N^2}+\frac{N^{-1/2}}{L_N}\right) \\
&+\;C\left(N^{-1}\frac{L_{N-1}}{L_N}+N^{-1}\right) \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

De (3.45), usando Lema 3.4, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(E\left|S_N\right|^2\right)^{1/2} &\leq C\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1+\beta/\gamma}\left(\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^2 + n^{-1/2}/L_n\right)\\ &+ C\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1} + n^{-1}\frac{L_{n-1}}{L_n}\right)^{1/2} \qquad (3.46)\end{aligned}$$

Como tenemos que $n^{\beta/2\gamma}L_{n-1}/L_n \to 0$, $n^c/L_n \to 0$ y $L_{n-1}/L_n \to 0$, podemos reescribir (3.46) en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\left(E\left|S_N\right|^2\right)^{1/2} &\leq C\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-1} + C\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1}\right)^{1/2}\\ (\text{donde } \ a_n \to 0) &= o(\ln N)\end{aligned}$$

En efecto

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-1} + \left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1}\right)^{1/2}}{\ln N} \leq \frac{c + a_N \ln N + (\ln N)^{1/2}}{\ln N} \to 0.$$

Con esto finalizamos la demostración de C y del Teorema. □

Capítulo 4

Condiciones de frontera del operador de Schrödinger con espectro mixto.

En este capítulo estudiamos el comportamiento de diferentes partes del espectro cuando la condición de frontera varía. Usando estimaciones para la función espectral del correspondiente operador de Schrödinger, obtenemos un criterio que nos garantiza la existencia de espectro singular sumergido en el espectro absolutamente continuo para conjuntos de condiciones de frontera de medida positiva y potenciales que se anulan en un intervalo $[0, N]$.

En particular, usando este criterio, podemos dar una descripción más precisa del conjunto de condiciones de frontera para las cuales tenemos espectro singular sumergido en el espectro absolutamente continuo en los ejemplos de [20] y Capítulo 3.

4.1. Resultados auxiliares sobre la función espectral.

Estamos considerando la ecuación de Schrödinger en la semirecta

$$\begin{aligned} ly &= -y''(x) + v(x)\,y(x) = Ey(x) \\ & 0 \leq x < \infty \end{aligned} \qquad (4.1)$$

y el operador autoadjunto asociado

$$H_\alpha = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + v(x) \quad \text{en} \quad L_2(0,\infty)$$

generado por la condición de frontera

$$\begin{aligned} y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha &= 0 \\ \alpha \in [0,\pi). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sean $u_1(x,z)$ y $u_2(x,z)$ soluciones de la ecuación

$$lu = zu \tag{4.3}$$

que satisfacen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} u_1(0,z) &= -\sin\alpha \qquad & u_2(0,z) &= \cos\alpha \\ u_1'(0,z) &= \cos\alpha & u_2'(0,z) &= \sin\alpha \end{aligned}$$

Entonces para cada z no real existe una función

$$\varphi_\alpha(x,z) = u_1(x,z) + m_\alpha(z)u_2(x,z)$$

que es una solución de (4.3) y pertenece a $L_2(0,\infty)$. La función $m_\alpha(z)$ se llama la función m de Weyl y para $\alpha \neq 0$ tiene la representación integral de la forma

$$m_\alpha(z) = \cot\alpha + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\,\rho_\alpha(\lambda)}{\lambda - z} \tag{4.4}$$

donde ρ_α es una medida de Lebesgue–Stieltjes determinada por m_α. La medida ρ_α se llama la función espectral de H_α. La densidad espectral $\frac{\mathrm{d}\rho_\alpha}{\mathrm{d}\lambda}$ para casi todo λ está dada por

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\rho_\alpha(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} &= \lim_{E\to 0+} \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\, m_\alpha(\lambda + iE) \\ &=: \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\, m_\alpha(\lambda + i0) \end{aligned}$$

El siguiente Lema es similar a uno en [18, Teor. 1].

Lema 4.1. *Sean $\alpha,\beta \in [0,\pi)$ dos condiciones de frontera, $\alpha \le \beta$ y sea A un conjunto de Borel, entonces*

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(A)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_A \arg\left[\frac{\cos\beta + \sin\beta\, m_0(E+i0)}{\cos\alpha + \sin\alpha\, m_0(E+i0)}\right]\mathrm{d}E$$

Demostración. Sea

$$\begin{aligned} G(z) &:= \int_\alpha^\beta \left[\frac{m_0(z)\cos\theta - \sin\theta}{m_0(z)\sin\theta + \cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \log\Big(\cos\beta + \sin\beta\, m_0(z)\Big) - \log\Big(\cos\alpha + \sin\alpha\, m_0(z)\Big). \end{aligned}$$

Usando la representación integral de Herglotz el Teorema 1.19 obtenemos

$$G(z) = c + \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{x-z} - \frac{x}{x^2+1}\right]\mathrm{d}\mu(x)$$

donde

$$\mu(b) - \mu(a) = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{1}{\pi}\int_a^b \mathrm{Im\,G(x+i\epsilon)dx}.$$

Por una parte

$$\mathrm{Im\,G(z)} = \arg\frac{\cos\beta + \sin\beta\,\mathrm{m_0(z)}}{\cos\alpha + \sin\alpha\,\mathrm{m_0(z)}}$$

y

$$\mu(b) - \mu(a) = \frac{1}{\pi}\int_a^b \arg\frac{\cos\beta + \sin\beta\, m_0(x+i0)}{\cos\alpha + \sin\alpha\, m_0(x+i0)}\mathrm{d}x.$$

Por otra parte, usando la relación entre m_θ y m_0 (2.14) y la representación integral de m_θ (4.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, G(z) &= \mathrm{Im}\int_\alpha^\beta \left[\frac{m_0(z)\cos\theta - \sin\theta}{m_0(z)\sin\theta + \cos\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \mathrm{Im}\int_\alpha^\beta m_\theta(z)\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{Im}\int_\alpha^\beta \left\{\cot\theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_\theta(t)}{t-z}\right\}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2 + \epsilon^2}\mathrm{d}\rho_\theta(t) \end{aligned}$$

donde $z = \lambda + i\epsilon$ y

$$\mu(b) - \mu(a) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2 + \epsilon^2} \mathrm{d}\rho_\theta(t). \quad (4.5)$$

Por el Teorema de Fubini 1.6 podemos cambiar el orden de integración

$$\mu(b) - \mu(a) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2 + \epsilon^2} \mathrm{d}\rho_\theta(t).$$

Para evaluar ϵ-límite vamos a usar el Teorema de convergencia dominada de Lebesgue 1.5. Para esto observamos que

$$\operatorname{Im} m_\theta(i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_\theta(t)}{t^2+1} = \operatorname{Im} \frac{m_0(i)\cos\theta - \sin\theta}{m_0(i)\sin\theta + \cos\theta}$$

esta acotado uniformemente en θ. Entonces

$$\left| \int_{\mathbb{R}\setminus(a-\delta, b+\delta)} \frac{\epsilon\, \mathrm{d}\rho_\theta(t)}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2} \right| \leq |\epsilon| \int_{\mathbb{R}\setminus(a-\delta,b+\delta)} \frac{\mathrm{d}\rho_\theta(t)}{|t-\lambda|^2}$$
$$\leq C|\epsilon| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\rho_\theta(t)}{t^2+1} \quad \text{cuando } \lambda \in [a,b],$$

donde C es una constante y

$$\left| \int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_{\mathbb{R}\setminus(a-\delta,b+\delta)} \frac{\epsilon\, \mathrm{d}\rho_\theta(t)}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2} \right| \leq c(b-a)$$

cuando $\epsilon \to 0$. Por otro lado tenemos que

$$\left| \int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_{a-\delta}^{b+\delta} \frac{\epsilon\, \mathrm{d}\rho_\theta(t)}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2} \right| = \left| \int_{a-\delta}^{b+\delta} \mathrm{d}\rho_\theta(t) \int_a^b \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2} \mathrm{d}\lambda \right|$$
$$= \left| \int_{a-\delta}^{b+\delta} \left[\arctan\left(\frac{b-t}{\epsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{\epsilon}\right) \right] \mathrm{d}\rho_\theta(t) \right|$$
$$\leq C\rho_\theta\{(a-\delta, b+\delta)\}$$

y como

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{a-\delta}^{b+\delta} \mathrm{d}\rho_\theta(t) \leq C_1 \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\rho_\theta(t)}{t^2+1} \leq C_2,$$

podemos intercambiar el límite y la integral. Por la fórmula de inversión de Stieltjes Teorema 1.20 obtenemos

$$\mu(b) - \mu(a) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{d}\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(t-\lambda)^2+\epsilon^2} \mathrm{d}\rho_\theta(t)$$
$$= \int_\alpha^\beta \left(\rho_\theta\{(a,b)\} + \frac{1}{2}\rho_\theta(\{a\}) + \frac{1}{2}\rho_\theta(\{b\}) \right) \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \rho_\theta\{(a,b)\}\, \mathrm{d}\theta.$$

Usando la contabilidad aditiva obtenemos el enunciado para un conjunto general de Borel A.

□

Corolario 4.1. *Si tomamos $\alpha = 0$ y $\beta = \pi$ obtenemos la conocida fórmula del "promedio"[26, Teor. 1.12]*

$$\int_0^\pi \rho_\alpha(A)\, d\alpha = |A|.$$

Sea

$$\Lambda_M := \{E / \operatorname{Im} m_0(E + i0) > M\}. \quad (4.6)$$

Si tomamos $M = 0$, el conjunto Λ_0 soporta la parte absolutamente continua de la medida espectral, ver la Sección 2.4.

El resultado de Lema 4.2 nos da la cota por arriba que vamos a usar más adelante. En la siguiente sección donde analizaremos el espectro singular será suficiente tomar $M = 0$. En este caso el resultado del Lema es una cota que se sigue de Corolario 4.1

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big(I \cap \Lambda_0\Big) \mathrm{d}\theta \leq \Big|I \cap \Lambda_0\Big|$$

donde $|\cdot|$ denota la medida de Lebesgue.

Lema 4.2.

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big(I \cap \Lambda_M\Big) \mathrm{d}\theta \leq \frac{2}{\pi} \arctan\Big(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\Big) \Big|I \cap \Lambda_M\Big|$$

donde I es un intervalo arbitrario y $0 < \alpha \leq \beta < \pi$.

Demostración. Según Lema 4.1 tenemos

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(A)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi}\int_A \arg\left[\frac{\cos\beta + \sin\beta\, m_0(E+i0)}{\cos\alpha + \sin\alpha\, m_0(E+i0)}\right]\mathrm{d}E \tag{4.7}$$

para cada conjunto de Borel A. Sea

$$w = Tz = \frac{z\sin\beta + \cos\beta}{z\sin\alpha + \cos\alpha}$$

Para todo $M > 0, T$ mapea el semiplano $\operatorname{Im} z > M$ en el disco

$$\left(x - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(y - \frac{\sin(\beta-\alpha)}{2M\sin^2\alpha}\right)^2 < \left(\frac{\sin(\beta-\alpha)}{2M\sin^2\alpha}\right)^2$$

De aquí se sigue que si $\operatorname{Im} z > M$ entonces $\arg w \leq 2\arctan\left(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\right)$. Entonces si $\operatorname{Im} m_0(E+i0) > M$, usando (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \rho_\theta\left(I\cap\Lambda_M\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{I\cap\Lambda_M} \arg\left(T(m_0(E+i0)\right)\mathrm{d}E \\
&\leq \frac{2}{\pi}\int_{I\cap\Lambda_M} \arctan\left(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\right)\mathrm{d}E \\
&= \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\right)\left|I\cap\Lambda_M\right|.
\end{aligned}$$

□

Para demostrar la cota por abajo, vamos a usar el siguiente resultado de [19]. En el teorema siguiente, M_N denota a una familia de medidas que tiene en particular la siguiente propiedad: dado v en $[0,N]$, para cualquier extensión (localmente integrable) de v en $[0,\infty)$ la medida espectral del correspondiente problema en la semirecta pertenece a M_N.

Teorema 4.1. *(Cor. 1.2 en [19]) Sean λ_i, λ_j dos eigenvalores de (4.1) en un intervalo $[0,N]$ con la condición de frontera (4.2) y condiciones similares en N. Sea ρ_0 la medida espectral de este problema. Entonces*

$$\begin{aligned}
\rho_0\left([\lambda_i,\lambda_j]\right) &= \max_{\rho\in M_N} \rho\left([\lambda_i,\lambda_j]\right) \\
\rho_0\left((\lambda_i,\lambda_j)\right) &= \min_{\rho\in M_N} \rho\left((\lambda_i,\lambda_j)\right)
\end{aligned}$$

El siguiente Lema es una aplicación de este teorema.

Lema 4.3. *Asumimos que $v(x) \equiv 0$ para $x \in [0,N]$ donde N es cualquier número positivo.*

a) Sea $I_1 = \left(\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+2)}{N}\right)^2\right)$, *donde* $k \in \mathbb{N}$

entonces

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(I_1)\mathrm{d}\theta \geq \frac{2\pi(k+1)}{N^2}\int_{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$\alpha, \beta \in (0,\pi)$

b) Sea $I_2 = \left[\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2\right]$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{R}^+$

entonces

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(I_2)\mathrm{d}\theta \leq \frac{2\pi k}{N^2}\int_{\frac{N}{\pi k}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi k}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \frac{2\pi(k+1)}{N^2}\int_{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$\alpha, \beta \in (0,\pi)$

Demostración. a) La función

$$\psi_\alpha(x, \frac{\pi k}{N}) = \frac{1}{2}\left[\sin\alpha + \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right]e^{\frac{i\pi k}{N}x} + \frac{1}{2}\left[\sin\alpha - \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right]e^{\frac{-i\pi k}{N}x}$$

satisface

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= -\sin\alpha \\
\psi'(0) &= \cos\alpha
\end{aligned}$$

y

$$-\psi''\left(x, \frac{\pi k}{N}\right) = \left(\frac{\pi k}{N}\right)^2 \psi\left(x, \frac{\pi k}{N}\right)$$

para $x \in [0, N]$ con las condiciones de frontera

$$\psi(N)\cos\alpha + \psi'(N)\sin\alpha = 0$$
$$\psi(0)\cos\alpha + \psi'(0)\sin\alpha = 0$$

Además tenemos los mismos eigenvalores $\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2$ para todo $\alpha \in [0, \pi)$. Vamos a calcular la norma de los eigenfunciones $\psi_\alpha(x, \frac{\pi k}{N})$ en $L_2[0, N]$

$$\int_0^N \left|\psi_\alpha\left(x, \frac{\pi k}{N}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = \left\|\psi_\alpha\left(x, \frac{\pi k}{N}\right)\right\|^2_{L_2(0,N)}$$

$$= 1/4 \int_0^N \left(\left[\sin\alpha + \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right] e^{\frac{i\pi k}{N}x} + \left[\sin\alpha - \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right] e^{\frac{-i\pi k}{N}x}\right)$$
$$\left(\left[\sin\alpha - \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right] e^{\frac{-i\pi k}{N}x} + \left[\sin\alpha + \frac{N}{i\pi k}\cos\alpha\right] e^{\frac{i\pi k}{N}x}\right) \mathrm{d}x$$
$$= 1/4 \int_0^N 2\left[\sin^2\alpha + \left(\frac{N\cos\alpha}{\pi k}\right)^2\right] \mathrm{d}x = \frac{(\sin\alpha)^2}{2}N + \frac{1}{2}N\left(\frac{N\cos\alpha}{\pi k}\right)^2$$

La medida espectral ρ_0 del problema en el intervalo finito es una función de escalera, con las discontinuidades en los eigenvalores λ_i. El peso que da la medida al eigenvalor λ_i es igual a $\left\|\psi_\alpha\left(x, \frac{\pi k}{N}\right)\right\|^{-2}_{L_2(0,N)}$ (ver Sección 2.2). En el intervalo $\left(\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+2)}{N}\right)^2\right)$ tenemos un solo eigenvalor $\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2$ y usando el Teorema 4.1 obtenemos

$$\rho_\theta\left(\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+2)}{N}\right)^2\right) \geq \left\|\psi\left(x, \frac{\pi(k+1)}{N}\right)\right\|^{-2}_{L_2(0,N)}$$
$$= \rho_0\left(\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+2)}{N}\right)^2\right)$$

Entonces

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(I)\mathrm{d}\theta \geq \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}\theta}{\frac{N}{2}(\sin\theta)^2 + \frac{N}{2}\left(\frac{N\cos\theta}{\pi(k+1)}\right)^2} = \frac{2\pi(k+1)}{N^2} \int_{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

(hacemos cambio de variable $x = \frac{N}{\pi(k+1)}\cot\theta$)
y a) queda demostrado.

b) En el intervalo $\left[\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2\right]$ tenemos dos eigenvalores $\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2$ y $\left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2$. Usando Teorema 4.1 tenemos

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\left[\frac{(\sin\theta)^2}{2}N + \frac{1}{2}N\left(\frac{N\cos\theta}{\pi k}\right)^2\right]^{-1} + \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\left[\frac{(\sin\theta)^2}{2}N + \frac{1}{2}N\left(\frac{N\cos\theta}{\pi(k+1)}\right)^2\right]^{-1}$$
$$\geq \int_\alpha^\beta \rho_\theta\left(\left[\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2\right]\right)\mathrm{d}\theta$$

y haciendo cambios de variable $x = \frac{N}{\pi k}\cot\theta$ en la primera integral y $x = \frac{N}{\pi(k+1)}\cot\theta$ en la segunda obtenemos el enunciado de b). □

4.2. Resultado principal y ejemplos.

Los Lemas 4.2 y 4.3 nos dan cotas por arriba y por abajo que vamos a necesitar para demostrar el resultado principal.

Teorema 4.2. *Asumimos $v(x) \equiv 0$ para $x \in [0, N], N \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}$.*
Si

$$\frac{2\pi(k+1)}{N^2} \int_{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} > \frac{2|\Lambda_M \cap I|}{\pi} \int_0^{\frac{1}{M}\frac{\cot\alpha - \cot\beta}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$\alpha, \beta \in (0, \pi), \alpha < \beta$
entonces

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(I \cap \Lambda_M^c)\mathrm{d}\theta > 0$$

donde

$$I = \left(\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2, \left(\frac{\pi(k+2)}{N}\right)^2\right)$$

Demostración. Tenemos que

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta(I)\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \rho_\theta(I \cap \Lambda_M)\mathrm{d}\theta + \int_\alpha^\beta \rho_\theta(I \cap \Lambda_M^c)\mathrm{d}\theta$$

Usando Lemas 4.3 a), 4.2 y las hipótesis del Teorema

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho_\theta(I)\mathrm{d}\theta \geq$$

$$\frac{2\pi(k+1)}{N^2} \int_{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\beta}^{\frac{N}{\pi(k+1)}\cot\alpha} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} > \frac{2|\Lambda_M \cap I|}{\pi} \int_{0}^{\frac{1}{M}\frac{\cot\alpha-\cot\beta}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

$$\geq \int_{\alpha}^{\beta} \rho_\theta(I \cap \Lambda_M)\mathrm{d}\theta.$$

Esto implica

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho_\theta(I \cap \Lambda_M^c)\mathrm{d}\theta > 0$$

□

Ejemplos

a) Sean $k = 1, N = 2\pi$ y $M = 0$. Según el Teorema 4.2, si

$$\beta - \alpha > \pi|\Lambda_0 \cap I|$$

donde $I = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$, entonces

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho_\theta(I \cap \Lambda_0^c)\mathrm{d}\theta > 0.$$

Como Λ_0^c soporta la parte singular del espectro (ver la Sección 2.4) podemos concluir que existe un conjunto de condiciones de frontera $B \subset (\alpha, \beta)$, $|B| > 0$ tal que si $\theta \in B$ entonces H_θ tiene espectro singular en I.

b) De manera similar, si tomamos $k = 2, N = 3\pi, M = 0$ entonces una condición suficiente para tener espectro singular en I para condiciones de frontera θ entre α y β es

$$\frac{2}{3}(\beta - \alpha) > \pi|\Lambda_0 \cap I|$$

donde en este caso $I = \left[\frac{4}{9}, \frac{16}{9}\right]$

c) En la demostración del Teorema 3.1 del Capítulo 3 hemos demostrado que la parte absolutamente continua de la medida espectral da peso cero al conjunto F^2 y el potencial $V(x)$ puede ser nulo en un intervalo $[0, N]$. En este caso, usando Teorema 4.2, podemos tomar $k = 1, N = 2\pi$ y $M = 0$ como en el ejemplo a). Entonces la condición que garantiza la existencia de espectro singular continuo para un conjunto de condiciones de frontera de medida positiva en (α, β) es

$$\beta - \alpha > \pi|\Lambda_0 \cap I| = |(F^2)^c \cap I|$$

donde $I = \left(\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right)$. En particular observamos que en este caso podemos controlar la medida de $(F^2)^c$. Por ejemplo la podemos hacer tan pequeña (positiva) como queramos, entonces obtenemos espectro singular para muchas condiciones de frontera. Podemos aplicar esto al resultado del ejemplo dado por Remling en [20].

La restricción $v(x) \equiv 0$ en $[0, N]$ implica ciertas restricciones sobre la medida de Λ_M si M es grande, que vienen dadas por el siguiente Teorema.

Teorema 4.3. *Sea Λ_M como en (4.6) y asumimos que $v(x) \equiv 0$ para $x \in [0, N]$. Entonces*

$$|\Lambda_M \cap I| \cdot M \leq \frac{2\pi^3}{N^3}\left(k^2 + (k+1)^2\right)$$

donde $I := \left[\left(\frac{\pi k}{N}\right)^2 \left(\frac{\pi(k+1)}{N}\right)^2\right]$, $k \in \mathbb{N}$ *y* $N \in \mathbb{R}^+$.

Demostración. Tenemos que

$$\cot x - \cot(\pi - x) = \frac{\sin(\pi/2 - x)}{\cos(\pi/2 - x)} - \frac{\cos(\pi/2 - (x - \pi/2))}{\sin(\pi/2 - (x - \pi/2))} = 2\tan(\pi/2 - x)$$

Entonces, usando Lema 4.2 y Colorario 4.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^x \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-x}^{\pi} \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta - \int_x^{\pi-x} \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta = |\Lambda_M \cap I| - \int_x^{\pi-x} \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta \\
&\geq \left\{1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{2M}\cdot(\cot x - \cot(\pi - x))\right)\right\}|\Lambda_M \cap I| \\
&= \left\{1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{M}\tan(\pi/2 - x)\right)\right\}|\Lambda_M \cap I|
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Tenemos la siguiente cadena de desigualdades, para $x \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned}
II(x) &:= \frac{4\pi k}{N^2}\int_0^{\frac{\pi k}{N}\tan x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t + \frac{4\pi(k+1)}{N^2}\int_0^{\frac{\pi(k+1)}{N}\tan x} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t \\
&\overset{①}{\geq} \int_0^x \rho_\theta(I)\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-x}^{\pi} \rho_\theta(I)\mathrm{d}\theta \\
&\geq \int_0^x \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta + \int_{\pi-x}^{\pi} \rho_\theta(\Lambda_M \cap I)\mathrm{d}\theta \\
&\overset{②}{\geq} \left[1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{M}\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)\right]|\Lambda_M \cap I| \\
&=: III(x)
\end{aligned}$$

La desigualdad① se sigue del Lema 4.3 b) y② se sigue de (4.8). Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
II(x) &\geq III(x) \qquad \text{cuando} \qquad x \in [0, \pi/2) \\
\text{y} \quad II(0) &= III(0) = 0
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$II'(0) \geq III'(0)$$

pero

$$\begin{aligned}
III'(0) &= \frac{2|\Lambda_M \cap I|M}{\pi} \\
II'(0) &= \frac{4\pi^2}{N^3}\left(k^2 + (k+1)^2\right)
\end{aligned}$$

y obtenemos el enunciado del Teorema. □

Por el Teorema Espectral Inverso de Gelfand–Levitan, sabemos que la función espectral del operador de Schrödinger puede ser arbitraria en un intervalo finito, en este contexto es interesante notar que el Teorema 4.3 nos da restricciones sobre la derivada de la función espectral cuando el potencial es nulo en el intervalo $[0, N]$.

En el siguiente teorema la condición $v(x) \equiv 0$ en $[0, N]$ no es necesaria.

Teorema 4.4. *Dados $\alpha, \beta \in (0, \pi)$ y $1 > k > 0$, existe $\infty > N(\alpha, \beta, k) > 0$ tal que $R > N$ y*

$$\frac{|\Lambda_M \cap (-R, R)|}{R^{1/2}} < \frac{k(\cot\alpha - \cot\beta)}{\arctan\left(\frac{1}{M}\frac{\cot\alpha - \cot\beta}{2}\right)}$$

implica

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta\left((-R, R) \cap \Lambda_M^c\right)\mathrm{d}\theta > 0$$

para $R > N$.

Demostración. Por la fórmula (2.11) tenemos que

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^{1/2}}\int_{-R}^{R} \mathrm{d}\rho_\theta(x) = \frac{2(1 + \cot^2\theta)}{\pi}$$

Usando el Lema de Fatou 1.4 obtenemos

$$\int_\alpha^\beta \frac{2(1+\cot^2\theta)}{\pi}\mathrm{d}\theta \leq \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{R^{1/2}}\int_\alpha^\beta \rho_\theta\left((-R, R)\right)\mathrm{d}\theta$$

y

$$\int_\alpha^\beta \frac{2(1+\cot^2\theta)}{\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}(\cos\alpha - \sin\beta)$$

Entonces existe $N(\alpha, \beta, k) > 0$ tal que $R > N$ implica

$$kR^{1/2}\frac{2}{\pi}(\cot\alpha - \cot\beta) \leq \int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R)\Big)\mathrm{d}\theta$$

donde $0 < k < 1$.

Usando la cota por arriba dada por el Lema 4.2 y las hipótesis del teorema, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R)\cap\Lambda_M\Big)\mathrm{d}\theta &\leq \frac{2}{\pi}\arctan\Big(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\Big)\Big|(-R, R)\cap\Lambda_M\Big| \\
&< \frac{2}{\pi}\frac{R^{1/2}k(\cot\alpha - \cot\beta)}{\arctan\Big(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\Big)}\arctan\Big(\frac{1}{2M}(\cot\alpha - \cot\beta)\Big) \\
&= kR^{1/2}\frac{2}{\pi}(\cot\alpha - \cot\beta) \leq \int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R)\Big)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

para todo $R > N$. Entonces tenemos que

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R) \cap \Lambda_M\Big)\mathrm{d}\theta < \int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R)\Big)\mathrm{d}\theta$$

y podemos concluir

$$\int_\alpha^\beta \rho_\theta\Big((-R, R) \cap \Lambda_M^c\Big)\mathrm{d}\theta > 0.$$

□

Bibliografía

[1] R.B. Ash. *Real Analysis and Probability.* Academic Press, New York, 1972.

[2] R. del Rio, N. Makarov, y B. Simon. Operators with singular continuous spectrum: II. Rank one operators. *Commun. Math. Phys.*, 165:59–67, 1994.

[3] Jr. Donoghue, W.F. *Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[4] M. Eastham y H. Kalf. *Schrödinger-type operators with continuous spectra.* Pitman Publishing, Boston, 1982.

[5] F. Gesztesy y B. Simon. A new approach to inverse spectra theory, II. General real potentials and the connection to the spectral measure. *Annals of Mathematics*, 152:593–643, 2000.

[6] D.J. Gilbert y D. Pearson. On subordinacy and analysis of the spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 128(1):30–56, 1987.

[7] A. Gordon. Pure point spectrum under 1-parameter perturbations and instability of Anderson localization. *Commun. Math. Phys.*, 164:489–505, 1994.

[8] A. Kiselev, Y. Last, y B. Simon. Modified prüfer and EFGP transforms and the spectral analysis of one-dimensional Schrödinger operators. *Comm.Math.Phys.*, 194(1):1–45, 1998.

[9] A.N. Kolmogorov y S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications INC, New York, 1975.

[10] Y. Last y B. Simon. Eigenfunctions, transfer matrices, and absolutely continuous spectrum of one-dimensional Schrödinger operators. *Invent. Math.*, 135(2):329–367, 1999.

[11] B.M. Levitan y I.S. Sargsjan. *Sturm-Liouville and Dirac Operators.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[12] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, volume 1. Prentice-Hall.

[13] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable*, volume 2. Prentice-Hall.

[14] S. Molchanov. Multiscale averaging for ordinary differential equations. Applications to the spectral theory of one-dimensional Schrödinger operators with sparse potentials. *Ser. Adv. Math. Appl. Sci.*, 50(Homogenization):316–397, 1999.

[15] M. Naimark. *Linear Differential Operators*, volume 2. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1968.

[16] D. B. Pearson. *Quantum Scattering and Spectral Theory.* Academic Press, London, 1988.

[17] David Pearson. Singular continuos measures in scattering theory. *Comm. Math. Phys.*, 60:13–36, 1978.

[18] David Pearson. Value distribution and spectral analysis. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 26:4067–4080, 1993.

[19] C. Remling. Universal bounds on spectral measures of one–dimensional Schroedinger operators. *disponible electronicamente en http://www.ma.utexas.edu/mp_arc-bin/mpa?yn=02-394.*

[20] C. Remling. Embedded singular continuous spectrum for one-dimensional Schrödinger operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(6):2479–2497, 1999.

[21] M. Rosenblum y J. Rovnyak. *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[22] H.L. Royden. *Real Analysis.* Collier-Macmillan Limited, London, 1968.

[23] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1964.

[24] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, Singapore, 1987.

[25] S. Saks y A. Zygmund. *Analytic functions.* Elsevier, 1971.

[26] B. Simon. Spectral analysis of rank one perturbations and applications. *CMR Proceedings and Lecture Notes*, 8:109–149, 1995.

[27] B. Simon. Bounded eigenfunctions and absolutely continuous spectra for one-dimensional Schrödinger operators. *Proc.Amer.Math.Soc.*, 124(11):3361–3369, 1996.

[28] M.H. Stone. *Linear transformations in Hilbert space.* American Math. Soc., 1932.

[29] W.F. Stout. *Almost Sure Convergence.* Academic Press, New York, 1974.

[30] A. Zygmund. A remark on Fourier transforms. *Proc.Cambridge Phil.Soc.*, 32:321–327, 1936.